Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ

100 ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST 1917–2017

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem, nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **4. 1. 2018** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Rozpínání vesmíru

(max. 20 bodů)

Hubbleův parametr H měří relativní rychlost rozpínání vesmíru. Jeho současná hodnota určená z měření kosmického mikrovlnného pozadí (CMB) je $H_0 = 67{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$. Tatáž měření určila složení vesmíru, které se často vyjadřuje pomocí poměru Ω hustoty ϱ daného druhu látky ku kritické hustotě ϱ_{crit} vesmíru, tedy jako $\Omega = \varrho/\varrho_{\mathrm{crit}}$. Bylo změřeno, že vesmír v současnosti obsahuje $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}68$ temné energie, $\Omega_{\mathrm{m},0} = 0{,}32$ hmoty (baryonové a temné) a $\Omega_{\mathrm{r},0} = 0{,}000\,1$ záření.

Škálový faktor a definujeme jako relativní velikost vesmíru vzhledem k současnému stavu. Současná hodnota škálového parametru je tedy $a_0 = 1$. Hodnotu Hubblova parametru v čase, kdy je hodnota škálového parametru a, můžeme určit jako

$$H(a) = H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{r},0}a^{-4} + \Omega_{\mathrm{m},0}a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}\,.$$

V době dominance temné energie se škálový faktor vyvíjí jako $a(t) \propto e^{Ht}$, v době dominance hmoty jako $a(t) \propto t^{2/3}$ a v době dominance záření jako $a(t) \propto t^{1/2}$. Předpokládejte, že vesmír je $t_0 = 13{,}82\cdot 10^9$ let starý a že současná teplota mikrovlnného pozadí je $T_0 = 2{,}7\,\mathrm{K}$.

a) Určete hodnotu škálového faktoru $a_{\Lambda-\mathrm{m}}$ v době, kdy byl význam temné energie pro výpočet $H(a)$ stejně velký jako význam hmoty, neboli v době, kdy byly hustoty temné energie a hmoty stejné. V tomto výpočtu předpokládejte $\Omega_\mathrm{r} = 0$. Určete tehdejší teplotu $T_{\Lambda-\mathrm{m}}$ kosmického mikrovlnného pozadí.

Při výpočtu $H(a)$ mají různé druhy látky ve vesmíru různě velký vliv. Parita mezi hmotou a temnou energií nastala v době, kdy $\varrho_\Lambda = \varrho_\mathrm{m}$, neboli $\varrho_{\Lambda,0} = \varrho_{\mathrm{m},0}\,a_{\Lambda-\mathrm{m}}^{-3}$, a tedy $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{\mathrm{m},0}\,a_{\Lambda-\mathrm{m}}^{-3}$. Z toho vyplývá, že

$$a_{\Lambda-\mathrm{m}} = \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} \doteq 0{,}78\,.$$

Teplota kosmického mikrovlnného pozadí závisí na škálovém faktoru dle $T \propto a^{-1}$. Proto

$$T_{\Lambda-\mathrm{m}} = T_0\,a_{\Lambda-\mathrm{m}}^{-1} \doteq 3{,}5\,\mathrm{K}\,.$$

b) Určete hodnotu škálového faktoru $a_{\mathrm{m}-\mathrm{r}}$ v době, kdy byly záření a hmota stejně zastoupeny. V tomto výpočtu ignorujte temnou energii (tedy $\Omega_\Lambda = 0$).

Postupujeme stejně jako v bodě a). Parita nastává v době, kdy $\varrho_{\mathrm{r},0}\, a_{\mathrm{m-r}}^{-4} = \varrho_{\mathrm{m},0}\, a_{\mathrm{m-r}}^{-3}$, z čehož plyne, že

$$a_{\mathrm{m-r}} = \frac{\Omega_{\mathrm{r},0}}{\Omega_{\mathrm{m},0}} \doteq 0,000\,3\,.$$

Záření, které dnes nazýváme kosmickým mikrovlnným pozadím, se začalo vesmírem šířit v době, kterou dnes pozorujeme s kosmologickým červeným posuvem $z_{\mathrm{CMB}} = 1\,100$. V následujících úkolech určíte, jak starý byl v té době vesmír.

c) Určete hodnotu škálového faktoru a_{CMB} v době emise fotonů záření mikrovlnného pozadí. Jaká byla jeho tehdejší teplota T_{CMB}?

Červený posuv závisí na škálovém faktoru jako $1/a = 1 + z$. Máme tedy $a_{\mathrm{CMB}} \doteq 0{,}000\,9$. Pro teplotu získáváme $T_{\mathrm{CMB}} = T_0/a_{\mathrm{CMB}} = T_0\,(1 + z_{\mathrm{CMB}}) \doteq 3000\,\mathrm{K}$.

d) Za nerealistického předpokladu, že vesmír se celou dobu mezi emisí kosmického mikrovlnného záření a současností choval, jako by v něm dominovala temná energie, určete stáří t_{CMB} vesmíru v době emise CMB. Očekávejte nefyzikální výsledek v důsledku nerealistického předpokladu.

V případě dominance temné energie (tedy $\Omega_\Lambda = 1$) plyne, že $H(a) = H_0 = \mathrm{const.}$ Platí

$$1 + z = \frac{e^{H_0 t_0}}{e^{H_0 t}} = e^{H_0 (t_0 - t)}\,.$$

Odtud získáme

$$t_{\mathrm{CMB}} = t_0 - \frac{1}{H_0} \ln(1 + z_{\mathrm{CMB}}) \doteq -90 \cdot 10^9\,\mathrm{let}\,.$$

Tento výsledek je nefyzikální a pramení z chybného předpokladu, že vesmír se vyvíjel po celou dobu, jako by byl dominován temnou energií.

e) Nyní provedete realističtější výpočet. Předpokládejte, že pro $1 > a > a_{\Lambda-\mathrm{m}}$ se vesmír vyvíjí, jako by byl dominován temnou energií, pro $a_{\Lambda-\mathrm{m}} > a > a_{\mathrm{m-r}}$, jako by obsahoval pouze hmotu, a pro $a_{\mathrm{m-r}} > a$, jako by obsahoval pouze záření. Určete stáři t_{CMB} vesmíru v době emise kosmického mikrovlnného záření.

Všimneme si, že $1 > a_{\Lambda-\mathrm{m}} > a_{\mathrm{CMB}} > a_{\mathrm{m-r}}$. Záření mikrovlnného pozadí tedy bylo emitováno v době, kdy byl vesmír dominován hmotou. Nejprve určíme okamžik $t_{\Lambda-\mathrm{m}}$, kdy měl vesmír škálový faktor $a_{\Lambda-\mathrm{m}}$. Jelikož období mezi současností a tímto okamžikem spadá do doby dominance temné energie, můžeme psát

$$a_{\Lambda-\mathrm{m}} = e^{H_0 (t_{\Lambda-\mathrm{m}} - t_0)}\,.$$

Z toho plyne, že

$$t_{\Lambda-\mathrm{m}} = t_0 + \frac{1}{H_0} \ln a_{\Lambda-\mathrm{m}} \doteq 10{,}2 \cdot 10^9\,\mathrm{let}\,.$$

Mezi tímto okamžikem a dobou, kdy bylo emitováno CMB, se vesmír vyvíjel, jako by byl dominován hmotou. Platí tedy

$$\frac{a_{\mathrm{CMB}}}{a_{\Lambda-\mathrm{m}}} = \left(\frac{t_{\mathrm{CMB}}}{t_{\Lambda-\mathrm{m}}}\right)^{2/3}.$$

Z toho získáme

$$t_{\mathrm{CMB}} = t_{\Lambda-\mathrm{m}} \left(\frac{a_{\mathrm{CMB}}}{a_{\Lambda-\mathrm{m}}} \right)^{3/2} \doteq 400 \cdot 10^3 \,\mathrm{let}\,.$$

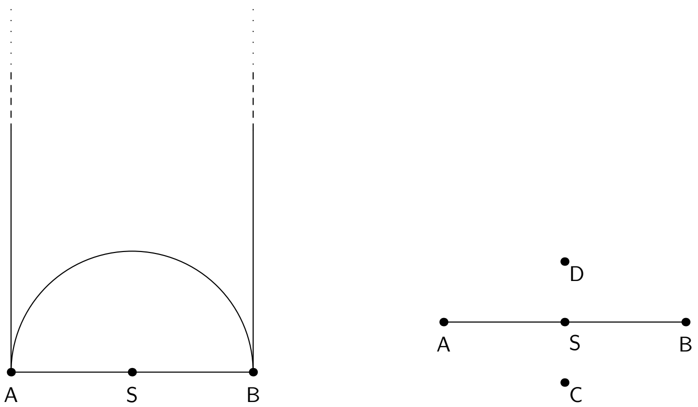
Určili jsme tedy, že CMB fotony byly vyzářeny v době, kdy vesmír byl 400 000 let starý. To už je velice blízko moderním odhadům.

C Monument

(max. 20 bodů)

16. prosince 2017 uplyne 100 let od narození známého britského autora sci-fi Arthura C. Clarka. Pojďme si tedy jeho dílo připomenout následující úlohou, která by se jistě dala s trochou fantazie rozvést do menší sci-fi povídky.

Na odlehlém místě na Zemi byl účastníky astronomické olympiády objeven monument, jenž tvoří dva velmi vysoké[1] sloupy ve vzájemné vzdálenosti $d = |\mathsf{AB}| = 200\,\mathrm{m}$ a oblouk o průměru d a středu S, který se obou sloupů dotýká ve svých protějších bodech. Spojnice AB probíhá přesně západo-východním směrem.



Obrázek 1: Schéma monumentu (vlevo pohled zepředu, vpravo pohled shora).

Protože objeviteli zmíněného monumentu byli účastníci *astronomické* olympiády, rozhodli se s jeho pomocí určit svou polohu. K tomuto účelu se jeden z účastníků (pozorovatel P) postavil do středu S mezi oba sloupy. Při pohledu severním směrem spatřil pozorovatel P cirkumpolární hvězdu H, jež nikdy v průběhu jednoho siderického dne nepřešla přes oblouk nad jeho hlavou. Deklinace hvězdy H je $\delta = 55°$.

a) Určete na základě předchozích dvou odstavců interval možných zeměpisných šířek místa S, na kterém pozorovatel P právě stojí.

Aby byla hvězda H cirkumpolární, musí pro zeměpisnou šířku φ pozorovatele P platit

$$90° - \delta \leq \varphi\,.$$

[1] zdánlivě sahající až k zenitu

Aby navíc zůstala vždy mezi severním bodem a zenitem, musí platit

$$90^\circ - \delta \leq 90^\circ - \varphi \,. \tag{1}$$

Pozorovatel P se tedy nachází na zeměpisné šířce $\varphi \in [90^\circ - \delta, \delta] = [35^\circ, 55^\circ]$.

b) Cvičenému oku pozorovatele P neuniklo, že hvězda H prochází během jednoho siderického dne všechny azimuty od azimutu východního bodu přes azimut severního bodu po azimut západního bodu. Určete s využitím této informace *přesnou* zeměpisnou šířku pozorovatele P.

V tomto případě má hvězda H horní kulminaci v zenitu , a v nerovnosti (1) tak nastává rovnost

$$90^\circ - \delta = 90^\circ - \varphi \Rightarrow \varphi = \delta = 55^\circ \,.$$

Pozorovatel P se tedy nachází na zeměpisné šířce $\varphi = 55^\circ$.

c) Po upozornění od zkušenějšího kamaráda si pozorovatel P uvědomil, že hvězda, kterou ve skutečnosti pozoroval, není hvězda H. Vydal se proto jižním směrem a zastavil se v bodě C ve vzdálenosti $l = |\mathsf{SC}| = 50\,\mathrm{m}$ od středu monumentu. Při pohledu severním směrem zpozoroval, že hvězda H zůstává v průběhu jednoho siderického dne stále mezi oběma sloupy monumentu a dostane se postupně do zákrytu oběma sloupy. Dokážete nyní určit přesnou zeměpisnou šířku pozorovatele P?

V tomto případě má interval azimutů, kterými hvězda H prochází, šířku

$$2\zeta = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{2l}\right) \,. \tag{2}$$

Uvažujme nyní sférický trojúhelník HZS tvořený hvězdou H v době jejího zákrytu jedním ze sloupů, zenitem Z a severním nebeským pólem S.

Vnitřní úhel u vrcholu Z tohoto sférického trojúhelníku má velikost ζ podle (2).

Strana z naproti zenitu Z má velikost

$$z = 90^\circ - \delta \,, \tag{3}$$

což je úhlová vzdálenost hvězdy H od severního nebeského pólu.

Protože hvězda H je v zákrytu sloupu, ale nepřechází přes něj, má vnitřní úhel u vrcholu H sférického trojúhelníku HZS velikost $\chi = 90^\circ$.

Strana h naproti hvězdě H má velikost

$$h = 90^\circ - \varphi \,, \tag{4}$$

což je úhlová vzdálenost zenitu od severního nebeského pólu.

S využitím sinové věty pro sférický trojúhelník dostáváme

$$\frac{\sin h}{\sin \chi} = \frac{\sin z}{\sin \zeta} \Rightarrow h = \arcsin\left(\frac{\sin z \sin \chi}{\sin \zeta}\right) \,.$$

Podle (4) pak odtud dostáváme

$$\varphi = 90^\circ - h = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin z \sin \chi}{\sin \zeta}\right) = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{\cos \delta}{\sin \zeta}\right) \doteq 50^\circ \,.$$

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Nyní, když zná svou přesnou zeměpisnou šířku, se pozorovatel P rozhodl určit deklinaci hvězdy H′, která kulminuje nad jihem. Přešel proto do vzdálenosti l severně od středu monumentu (do bodu D) a obrátil se jižním směrem. S pomocí stopek změřil dobu t, která uběhla mezi zákryty hvězdy H′ postupně oběma sloupy. Při pohledu na změřenou dobu t mu bylo hned jasné, že se jedná právě o polovinu siderického dne. Pomozte pozorovateli P nyní určit přesnou deklinaci hvězdy H′.

Uvažujme nyní opět sférický trojúhelník H′ZS tvořený hvězdou H′ v době jejího zákrytu jedním ze sloupů, zenitem Z a severním nebeským pólem S.

Vnitřní úhel u vrcholu Z má v tomto případě velikost

$$\zeta' = 180^\circ - \zeta\,,$$

kde ζ je dáno vztahem (2).

Protože doba mezi zákryty byla přesně polovina siderického dne, má vnitřní úhel u severního nebeského pólu velikost $\sigma = 90^\circ$.

S využitím kosinové věty pro úhly dostáváme

$$\cos\chi' = -\cos\sigma\cos\zeta' + \sin\sigma\sin\zeta'\cos h' = \sin\zeta'\cos h' \Rightarrow \chi' = \arccos\left(\sin\zeta'\cos h'\right)\,, \quad (5)$$

kde

$$h' = 90^\circ - \varphi$$

analogicky (4).

Ze sinové věty pro trojúhelník H′ZS dostáváme

$$\frac{\sin h'}{\sin\chi'} = \frac{\sin z'}{\sin\zeta'} \Rightarrow z' = \arcsin\left(\frac{\sin h'\sin\zeta'}{\sin\chi'}\right)\,,$$

kde $z' = 90^\circ - \delta'$.

Pro deklinaci δ' hvězdy H′ tak dostáváme

$$\delta' = 90^\circ - z' = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{\sin h'\sin\zeta'}{\sin\chi'}\right) \doteq 38^\circ\,.$$

Nápověda. Pro sférický trojúhelník ABC se stranami úhlových velikostí a, b, c a vnitřními úhly velikostí α, β, γ platí sinová věta

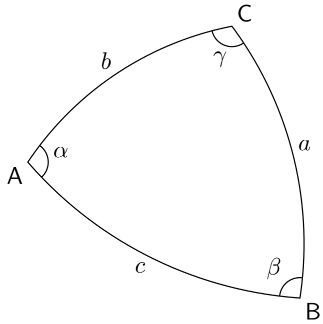
$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}\,,$$

kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$$

a kosinová věta pro úhly

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,.$$



Obrázek 2: Sférický trojúhelník ABC.

D Pohyb Měsíce (praktická)

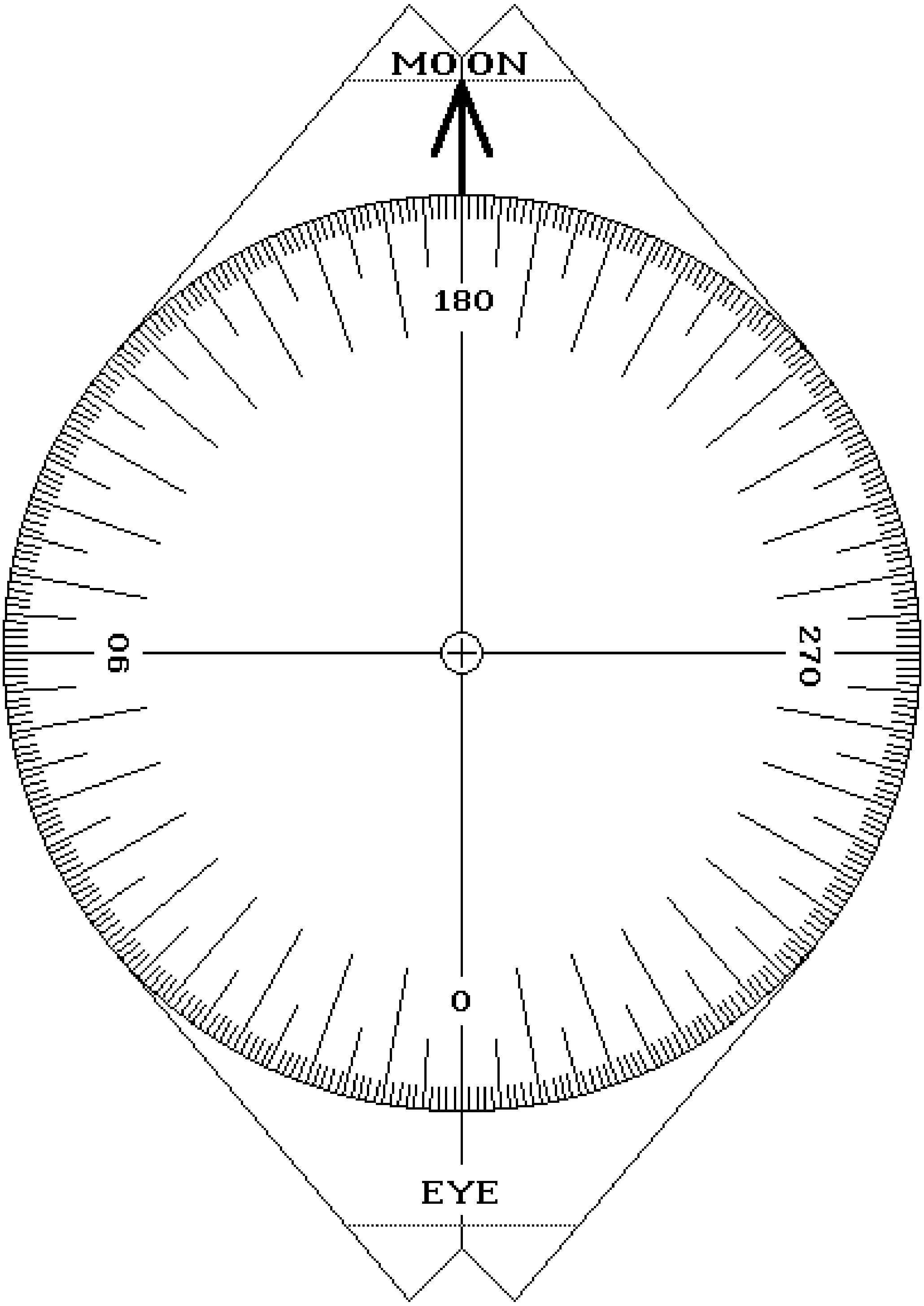
(max. 30 bodů)

Vaším úkolem bude změřit úhlovou rychlost pohybu Měsíce vzhledem ke Slunci. K tomu si vyrobíte úhloměr, který naleznete na obrázku na další straně. Úhloměr vytiskněte na kartón nebo jej podlepte tužším papírem. Doprostřed zabodněte špendlík nebo jehlu dostatečné délky, aby stín sahal až ke stupnici. Zkonstruovaný úhloměr vyfotografujte a snímek přiložte k řešení praktické úlohy.

K měření si musíte zvolit den za jasného počasí, kdy bude zároveň Slunce i Měsíc nad obzorem. K vytipování takových dnů využijte klasickou nebo elektronickou astronomickou ročenku. Na obloze najděte Měsíc a namiřte na něj vizír úhloměru tak, aby spojnice Slunce a Měsíce ležela v rovině úhloměru. Stín špendlíku vám na stupnici ukáže úhlovou vzdálenost od Slunce. Měření opakujte ve vhodných intervalech v průběhu několika dní. Každé měření proveďte několikrát za sebou. Určete průměrné hodnoty jednotlivých měření a jejich odchylky. Do přehledné tabulky zapište vždy naměřený úhel, odchylku, datum a čas měření.

Z tabulky měření vypočtěte průměrné úhlové rychlosti pohybu Měsíce vzhledem ke Slunci v časových intervalech mezi jednotlivými měřeními a jejich nejistoty. Hodnoty vyneste do grafu v závislosti na čase, kde vyznačíte okamžik perigea nebo apogea. Výsledky diskutujte. Je pohyb Měsíce vzhledem ke Slunci rovnoměrný? Pokud ne, jaké efekty mohou způsobovat nerovnoměrnosti v jeho pohybu?

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Autorem přehledového testu A je Tomáš Gráf. Autorem příkladu B je Stanislav Fořt, příklad C vytvořil Martin Raszyk a praktickou úlohu D navrhl Tomáš Gráf.