Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ

ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST 1917–2017

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

E Škvarková hvězda

(max. 25 bodů)

Hypotetické kvarkové hvězdy složené jen z podivných kvarků (s-kvarků) se vyznačují neobvyklou stavovou rovnicí pro hustotu ϱ

$$\varrho = \begin{cases} \gamma T^2\,, & \text{pro}\, r \leq R \\ 0\,, & \text{pro}\, r > R \end{cases}\,,$$

kde T je povrchová teplota hvězdy, parametr γ je roven $340\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}\cdot K^{-2}}$, r je vzdálenost od středu a R je poloměr hvězdy. Jinými slovy hustota hvězdy nezávisí na vzdálenosti od středu, je všude v nitru hvězdy konstantní. Vně hvězdy je hustota přirozeně nulová.

Ve vzdálenosti $a = 0{,}75\,\mathrm{au}$ kolem této hvězdy obíhá asteroid. Uvažujte, že jeho oběh se řídí Keplerovými zákony. Jeden oběh dokončí za $P = 1\,300\,\mathrm{d}$. Na povrch asteroidu dopadá zářivý tok $S = 10\,\mathrm{kW\cdot m^{-2}}$.

a) Vypočtěte poloměr R hvězdy. Výsledek vyjádřete nejprve obecně pomocí a, P, γ, S a vhodných fyzikálních konstant, poté číselně v km.

Jelikož je hustota konstantní, píšeme pro hmotnost hvězdy $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho$. Pro zářivý výkon L hvězdy platí $L = 4\pi a^2 S$. Stefanův-Boltzmannův zákon $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ nám dává

$$4\pi R^2 \sigma T^4 = 4\pi a^2 S\,.$$

Hustotu hvězdy tedy lze vyjádřit jako

$$\varrho = \gamma T^2 = \gamma \sqrt{\frac{S}{\sigma}\frac{a}{R}}\,.$$

Dosazením do 3. Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

získáme obecný vztah pro R

$$R = \left(\frac{3\pi a^2}{GP^2\gamma}\sqrt{\frac{\sigma}{S}}\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Při dosazovaní číselných hodnot je potřeba dát pozor na jednotky v definici konstanty γ. Po dosazení vychází $R \doteq 1\,\mathrm{km}$.

b) Může taková hvězda existovat, aniž by se zhroutila do černé díry? Svoji odpověď podložte náležitým výpočtem.

Šance na to, aby se hvězda nezhroutila do černé díry, je pouze tehdy, je-li její poloměr R větší než její gravitační (Schwarzshildův) poloměr R_G. Ten definujeme jako $R_\mathrm{G} = 2GM/c^2$. Pomocí zadaných veličin lze R_G použitím 3. Keplerova zákon vyjádřit jako

$$R_\mathrm{G} = \frac{8\pi^2 a^3}{P^2 c^2}\,.$$

Po dosazení dostaneme $R_\mathrm{G} \doteq 100\,\mathrm{m}$ a je tedy menší než poloměr hvězdy. Hvězda tedy může existovat.

F Srážka dvou těles

(max. 25 bodů)

Kolem planety o hmotnosti $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg a poloměru $R = 6\,380$ km obíhají dvě tělesa. První těleso se pohybuje po kruhové dráze s periodou $T_1 = 2{,}81$ h, druhé těleso se pohybuje po eliptické trajektorii s peridou $T_2 = 2{,}23$ h. Roviny oběhu jsou stejné a tělesa obíhají ve stejném směru. Uvažujte, že planeta nerotuje. Pozorovatel se nachází na takovém místě na povrchu planety, že apoapsida (nejvzdálenější bod) eliptické trajektorie druhého tělesa se nachází v jeho zenitu. Najednou se tělesa srazí, přičemž úhlová výška obou těles (vzhledem k pozorovali) při střetu je $h = 30°$.

a) Určete poloměr a_1 kruhové dráhy prvního tělesa a hlavní poloosu a_2 eliptické dráhy druhého tělesa. Výsledky uveďte číselně v násobcích poloměru planety.

Vyjdeme z 3. Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,,$$

tedy

$$a = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,.$$

Po dosazení pro obě tělesa dostáváme $a_1 \doteq 10{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{km} \doteq 1{,}59R$ a $a_2 \doteq 8{,}68 \cdot 10^3\ \mathrm{km} \doteq 1{,}36R$.

b) Vypočtěte vzdálenost l pozorovatele od místa srážky. Výsledek uveďte obecně pomocí R, a_1, h a číselně v násobcích poloměru planety.

Použijeme dvě sinové věty. Viz obr. 1 pro znázornění situace. Nejprve máme

$$\frac{a_1}{\sin(90° + h)} = \frac{R}{\sin\psi}\,,$$

a tedy

$$\sin\psi = \frac{R}{a_1}\cos h\,.$$

Dále máme (definujeme $\theta = (90° + h) + \psi$)

$$\frac{l}{\sin(180° - \theta)} = \frac{R}{\sin\psi}\,,$$

a tedy

$$l = R\,\frac{\cos(h + \psi)}{\sin\psi} = \sqrt{a_1^2 - R^2\cos^2 h} - R\sin h\,.$$

Po dosazení známých veličin dostáváme pro vzdálenost pozorovatele od střetu $l \doteq 0{,}830R$.

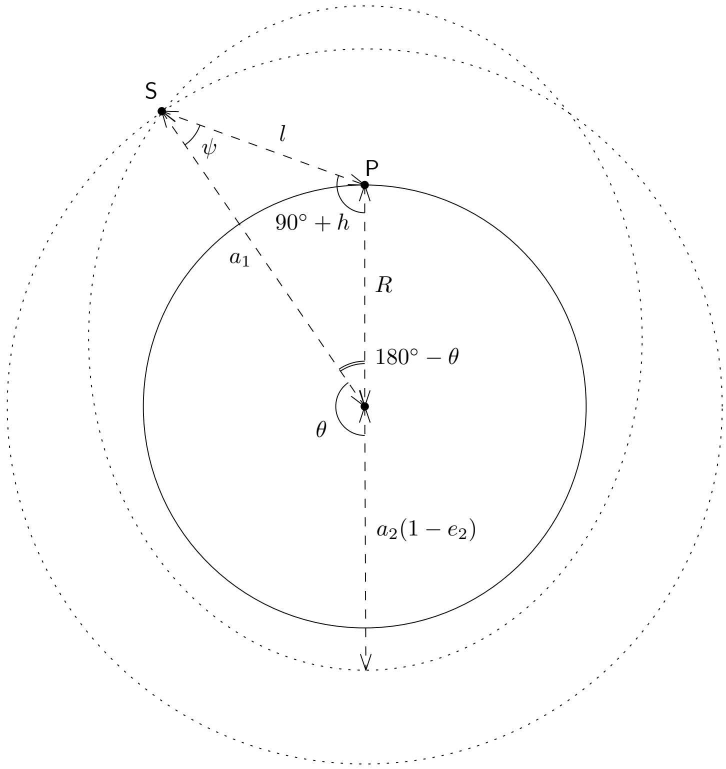
c) Vypočtěte číselnou výstřednost e_2 eliptické trajektorie druhého tělesa před srážkou.

Nápověda: Rovnice elipsy v polárních souřadnicích s počátkem v ohnisku má tvar

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta},$$

kde a je hlavní poloosa, e je číselná výstřednost, r je velikost průvodiče a θ je pravá anomálie, tedy úhel sevřený průvodičem a polopřímkou vedenou z ohniska směrem k periapsidě.

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Schéma situace v úloze F.

Po dosazení do rovnice kuželosečky dostáváme

$$a_1 = \frac{a_2(1 - e_2^2)}{1 + e_2 \cos\theta},$$

a tedy

$$a_2\, e_2^2 + a_1 \cos\theta\, e_2 + a_1 - a_2 = 0\,.$$

Smysl dává pouze jedno z dvou řešení

$$e_2 = \frac{-a_1 \cos\theta \pm \sqrt{a_1^2 \cos^2\theta - 4a_2(a_1 - a_2)}}{2a_2}$$

této kvadratické rovnice. Z obrázku vidíme, že $\theta = 90° + h + \psi = 153°$. S pomocí ostatních veličin pouhým dosazením získáme hodnotu číselné výstřednosti $e_2 \doteq 0{,}20$ (druhé řešení $e_2 \doteq 0{,}84$ nedává smysl, protože by eliptická trajektorie procházela planetou).

Autorem příkladu E je Martin Blaschke a příklad F vytvořil Pavel Kůs.