

Krajské kolo 2017/18, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)**E Škvarková hvězda***(max. 25 bodů)*

Hypotetické kvarkové hvězdy složené jen z podivných kvarků (s-kvarků) se vyznačují neobvyklou stavovou rovnicí pro hustotu ρ

$$\rho = \begin{cases} \gamma T^2, & \text{pro } r \leq R \\ 0, & \text{pro } r > R \end{cases},$$

kde T je povrchová teplota hvězdy, parametr γ je roven $340 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{K}^{-2}$, r je vzdálenost od středu a R je poloměr hvězdy. Jinými slovy hustota hvězdy nezávisí na vzdálenosti od středu, je všude v nitru hvězdy konstantní. Vně hvězdy je hustota přirozeně nulová.

Ve vzdálenosti $a = 0,75 \text{ au}$ kolem této hvězdy obíhá asteroid. Uvažujte, že jeho oběh se řídí Keplerovými zákony. Jeden oběh dokončí za $P = 1300 \text{ d}$. Na povrch asteroidu dopadá zářivý tok $S = 10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

a) Vypočítejte poloměr R hvězdy. Výsledek vyjádřete nejprve obecně pomocí a, P, γ, S a vhodných fyzikálních konstant, poté číselně v km.

b) Může taková hvězda existovat, aniž by se zhroutila do černé díry? Svoji odpověď podložte náležitým výpočtem.

F Srážka dvou těles*(max. 25 bodů)*

Kolem planety o hmotnosti $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a poloměru $R = 6380 \text{ km}$ obíhají dvě tělesa. První těleso se pohybuje po kruhové dráze s periodou $T_1 = 2,81 \text{ h}$, druhé těleso se pohybuje po eliptické trajektorii s periodou $T_2 = 2,23 \text{ h}$. Roviny oběhu jsou stejné a tělesa obíhají ve stejném směru. Uvažujte, že planeta nerotuje. Pozorovatel se nachází na takovém místě na povrchu planety, že apoapsida (nejvzdálenější bod) eliptické trajektorie druhého tělesa se nachází v jeho zenitu. Najednou se tělesa srazí, přičemž úhlová výška obou těles (vzhledem k pozorovateli) při střetu je $h = 30^\circ$.

a) Určete poloměr a_1 kruhové dráhy prvního tělesa a hlavní poloosu a_2 eliptické dráhy druhého tělesa. Výsledky uveďte číselně v násobcích poloměru planety.

b) Vypočítejte vzdálenost l pozorovatele od místa srážky. Výsledek uveďte obecně pomocí R, a_1, h a číselně v násobcích poloměru planety.

c) Vypočítejte číselnou výstřednost e_2 eliptické trajektorie druhého tělesa před srážkou.

Nápověda: Rovnice elipsy v polárních souřadnicích s počátkem v ohnisku má tvar

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta},$$

kde a je hlavní poloosa, e je číselná výstřednost, r je velikost průvodiče a θ je pravá anomálie, tedy úhel sevřený průvodičem a polopřímkou vedenou z ohniska směrem k periapsidě.

Autorem příkladu E je Martin Blaschke a příklad F vytvořil Pavel Kůs.