Krajské kolo 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem, nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou.

B Plující město

(max. 20 bodů)

Jules Verne je považován za jednoho ze zakladatelů žánru sci-fi literatury a letos by oslavil své 190. narozeniny. Jedno z jeho děl se jmenuje Plující město, ve kterém vypráví o plavbě na největším parníku tehdejší doby. V následující úloze jsme se myšlenkou plovoucího města volně inspirovali.

Představte si, že existuje planeta Nereus, která je pokrytá převážně oceány a obíhá kolem své jediné mateřské hvězdy Alcyone po kruhové dráze. Na této planetě existují plovoucí města, která se po oceánu pohybují tak, že nikdy nemění svoji nereografickou šířku (analogie zeměpisné šířky na Zemi), tedy se pohybují každé pouze po příslušné rovnoběžce. V jednom z takových měst žije i mladý astronom, který nikdy neměl možnost své malé plovoucí město opustit. Přesto by ale rád zjistil co nejvíce informací o planetě, na které žije. Proto začal bádat, měřit a lépe si všímat věcí kolem sebe. První zásadní věc, kterou zaznamenal, byl fakt, že se na daném místě planety nemění během roku délka bílého dne.

a) Dále se pokusil určit, na jaké nereografické šířce žije. Zapíchl tedy kolmo do země tyč tak, že nad zemí čněla délka $l_\mathrm{t} = 0{,}50\,\mathrm{m}$, a v pravé poledne určil délku jejího stínu. Naměřil hodnotu $l_\mathrm{s} = 1{,}38\,\mathrm{m}$. Určete, na jaké nereografické šířce se astronomovo město nachází.

Nejdříve je důležité si uvědomit, co nám přesně říká informace, že se délka bílého dne na planetě během roku nemění. Znamená to, že rotační osa planety je kolmá k rovině jejího oběhu kolem mateřské hvězdy Alcyone. To má mimo jiné za důsledek to, že se deklinace Alcyone, pozorované z planety, nemění a je rovna 0°. Tedy Alcyone se promítá na nebeský rovník Nerea. Nyní už můžeme jednoduše psát vztah pro nereografickou šířku. Dostáváme

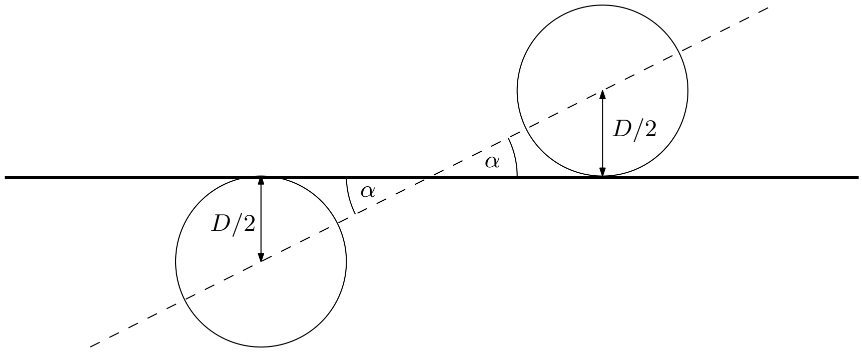
$$\mathrm{tg}\,(90° - \varphi) = \frac{l_\mathrm{t}}{l_\mathrm{s}}\,,$$

tedy

$$\varphi = 90° - \mathrm{arctg}\left(\frac{l_\mathrm{t}}{l_\mathrm{s}}\right).$$

Číselně vychází $\varphi \doteq 70°$.

b) Jednoho dne, když se plovoucí město nepohybovalo po hladině oceánu, astronom pozoroval západ Alcyone. Určete, jak dlouho západ Alcyone trval, pokud víte, že bílý den na Nereu trvá 8 hodin a Alcyone má při pozorování z Nerea úhlový průměr $D = 0{,}5°$. Dobou západu se myslí časový interval od prvního kontaktu Alcyone s ideálním horizontem až po úplné zmizení hvězdy pod horizontem.



Obrázek 1: Nákres situace popsané v úloze.

Nejprve si celou situaci nakreslíme, viz obrázek 1. Jelikož pozorujeme malou část oblohy, můžeme místo sférické geometrie používat klasickou eukleidovskou geometrii. Úhel α je úhel, pod kterým nebeský rovník protíná rovinu horizontu. Zřejmě $\alpha = 90° - \varphi$. Z nákresu je vidět, že doba trvání západu bude:

$$t_0 = \frac{2 \cdot (D/2)}{\sin(90° - \varphi)} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{2 \cdot (D/2)}{\sin(90° - \varphi)} \cdot \frac{T}{2\pi}\,,$$

kde jsme úhlovou rychlost rotace planety kolem své osy označili ω_0 a dobu rotace planety kolem osy T (to je dvakrát délka bílého dne, neboť rotační osa Nerea je kolmá na rovinu oběhu kolem Alcyone). Po číselném dosazení, kde si musíme dát pozor na to, že průměr kotoučku je zadaný ve stupních a ne v radiánech, dostaneme $t_0 \doteq 234\,\mathrm{s}$.

c) Jiný den pozoroval astronom opět západ Alcyone, nicméně tentokrát se město po hladině oceánu pohybovalo, a to tak, že neměnilo svou nereografickou šířku.[1] Rychlost pohybu plovoucího města byla $v = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Astronom změřil dobu trvání západu Alcyone jako $t_1 = 110\,\mathrm{s}$ a vypočítal rovníkový poloměr planety. Jaká hodnota mu vyšla, víme-li, že počítal správně?

Všimněme si toho, že se pozorovaná doba západu zkrátila. To znamená, že se město muselo pohybovat po rovnoběžce ve směru rotace planety. Pro úhlovou rychlost ω_m pohybu plovoucího města po hladině oceánu platí

$$\omega_\mathrm{m} = \frac{v}{R_\varphi}\,,$$

kde jsme R_φ označili poloměr průřezu planety kolmo k rotační ose na 70° nereografické šířky. Analogicky s úlohou b) sestavíme rovnici pro dobu trvání západu Alcyone jen s tím rozdílem, že tentokrát se Alcyone zřejmě po obloze pohybovala s úhlovou rychlostí

$$\omega = \omega_0 + \omega_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T} + \frac{v}{R_\varphi}\,.$$

Pro dobu t_1 trvání západu tedy platí

$$t_1 = \frac{2 \cdot (D/2)}{\sin(90° - \varphi)} \cdot \frac{1}{\omega} = \frac{2 \cdot (D/2)}{\sin(90° - \varphi)} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{T} + \frac{v}{R_\varphi}}\,.$$

[1] Jelikož město svou nereografickou šířku nikdy nemění, pozoroval astronom ze stejné šířky jako v úloze b).

Odtud dostáváme

$$R_\varphi = \frac{vt_1 T \sin(90^\circ - \varphi)}{DT - 2\pi t_1 \sin(90^\circ - \varphi)}\,.$$

Nyní poloměr Nerea vypočteme jako

$$R = \frac{R_\varphi}{\cos(\varphi)}$$

což potom číselně vychází $R \doteq 463\,\mathrm{km}$.

C Slapové síly

(max. 20 bodů)

Po úspěšné formulaci gravitačního zákona to byl právě Isaac Newton, který jako první rozpracoval teorii slapového působení mezi tělesy, tedy důsledek nenulových rozměrů fyzikálních těles, která se nacházejí v centrálním gravitačním poli.

a) Vypočtěte poloměr a oběžné dráhy měsíce Io okolo Jupiteru. Jaký je rozdíl mezi gravitačním působením Jupiteru na testovací těleso o hmotnosti $m_{\mathrm{test}} = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ umístěné na přivrácené a odvrácené straně měsíce Io? Pro účely výpočtu předpokládejte, že Io má poloměr $R_{\mathrm{Io}} = 1\,822\,\mathrm{km}$, že jeho perioda otáčení kolem vlastní osy je $T = 42{,}5\,\mathrm{h}$ a že vzdálenost Io od Jupitera se v čase nemění. Uvažujte vázanou rotaci měsíce Io. Komentujte podrobně kroky svého řešení.

Vzdálenost měsíce Io od Jupiteru vypočteme podle 3. Keplerova zákona $T^2 = 4\pi^2 a^3/(GM_{\mathrm{J}})$ a po dosazení vyjde $a = 422\,000\,\mathrm{km}$. Rozdíl gravitačního působení Jupiteru na přivrácenou a odvrácenou stranu měsíce Io bude

$$F_1 - F_2 = G\frac{m_{\mathrm{test}} M_{\mathrm{J}}}{r_1^2} - G\frac{m_{\mathrm{test}} M_{\mathrm{J}}}{r_2^2}\,,$$

kde $r_{1,2} = a \mp R_{\mathrm{Io}}$. Obecně tedy máme

$$F_1 - F_2 = \frac{4G m_{\mathrm{test}} M_{\mathrm{J}} a R_{\mathrm{Io}}}{(a^2 - R_{\mathrm{Io}}^2)^2}\,.$$

Po dosazení dostaneme $F_1 - F_2 \doteq 0{,}012\,\mathrm{N}$.

b) Numericky porovnejte tuto hodnotu s hodnotou vypočtenou pro Zemi a Měsíc. Uvažujte, že oběžná dráha Měsíce kolem Země je kruhová s poloměrem rovným střední vzdálenosti Měsíce od Země.

Dosadíme hodnoty pro Zemi a Měsíc. Máme $F_1 \doteq 2{,}73\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$ a $F_2 \doteq 2{,}38\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$, takže $F_1 - F_2 \doteq 0{,}05\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}$. Slapové působení Země na Měsíc je tedy asi 250krát slabší než slapové působení Jupiteru na měsíc Io.

Krajské kolo 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

c) Předpokládejte, že se Slunce zhroutí do černé díry o poloměru 3 km. Bylo by možné, aby tuto černou díru zkoumal astronaut vysoký 190 cm ze vzdálenosti 300 km od singularity, aniž by byl ohrožen jeho život? S jakým zrychlením (v násobcích tíhového zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) se astronaut natahuje?

Rozdíl zrychlení na nejbližší a nejvzdálenější část astronauta o délce d ve vzdálenosti r od gravitujícího tělesa o hmotnosti M v obecném případě spočteme jako

$$a = \frac{GM}{(r-d/2)^2} - \frac{GM}{(r+d/2)^2} = \frac{GM}{r^2}\left[\left(1-\frac{d}{2r}\right)^{-2} - \left(1+\frac{d}{2r}\right)^{-2}\right] \approx \frac{2GMd}{r^3}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot pro náš konkrétní případ dostáváme $a \doteq 1{,}9 \cdot 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, a tedy $a \doteq 1\,900\,g$.

d) Vraťme se zpět k Jupiteru (poloměr R_J, střední hustota ρ_J) a představme si, že na plynného obra padá po přímce homogenní těleso tvaru koule o poloměru R a hustotě ρ držené pouze vlastní gravitací. Odvoďte vztah pro kritickou (maximální) vzdálenost r_crit, při jejímž dosažení se těleso v důsledku slapových sil rozpadne. Výsledek vyjádřete obecně pomocí R_J, ρ_J a ρ. Rozpad přitom nastává v okamžiku, kdy slapová síla mezi středem a bližším koncem tělesa převládne nad vlastní gravitací tělesa. Do okamžiku rozpadu tělesa uvažujte jeho dokonale sférický tvar. Rotaci tělesa neuvažujte.

Aplikujeme aproximativní vzorec pro rozdíl zrychlení odvozený v předchozí úloze pro případ $d = R$, $r = r_\mathrm{crit}$ a porovnáme s intenzitou gravitační síly na povrchu tělesa padajícího na Jupiter. Máme tedy

$$\frac{2GM_\mathrm{J}R}{r_\mathrm{crit}^3} = \frac{GM}{R^2}\,,$$

tedy

$$r_\mathrm{crit} = R\sqrt[3]{\frac{2M_\mathrm{J}}{M}} = R_\mathrm{J}\sqrt[3]{\frac{2\rho_\mathrm{J}}{\rho}}\,.$$

Tuto vzdálenost obecně nazýváme Rocheova mez.

e) Jak by se musela změnit vzdálenost Země–Měsíc, aby se Měsíc rozpadl? Nezapomeňte, že Měsíc rotuje kolem vlastní osy.

V případě systému Země–Měsíc je třeba odvození výše modifikovat započtením efektu rotace Měsíce kolem jeho osy. Jelikož Měsíc vykazuje vázanou rotaci, rotuje s úhlovou frekvencí $\omega_\mathrm{M} = \sqrt{GM_\mathrm{Z}/r_\mathrm{M}^3}$. K intenzitě slapové síly je tedy potřeba přičíst odstředivé zrychlení $\omega_\mathrm{M}^2 R_\mathrm{M} = (GM_\mathrm{Z}R_\mathrm{M})/r_\mathrm{M}^3$. Pro kritickou (Rocheovu) vzdálenost $r_\mathrm{M,crit}$ Měsíce od Země tedy dostáváme

$$\frac{GM_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2} = \frac{2GM_\mathrm{Z}R_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M,crit}^3} + \frac{GM_\mathrm{Z}R_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M,crit}^3} = \frac{3GM_\mathrm{Z}R_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M,crit}^3}\,,$$

takže

$$r_\mathrm{M,crit} = R_\mathrm{Z}\sqrt[3]{\frac{3\rho_\mathrm{Z}}{\rho_\mathrm{M}}}\,.$$

Číselně $r_\mathrm{M,crit} \doteq 1{,}7 R_\mathrm{Z}$.

Nápověda: Může se vám hodit vzorec $(1+x)^n = 1 + nx$, pokud je $x \ll 1$.

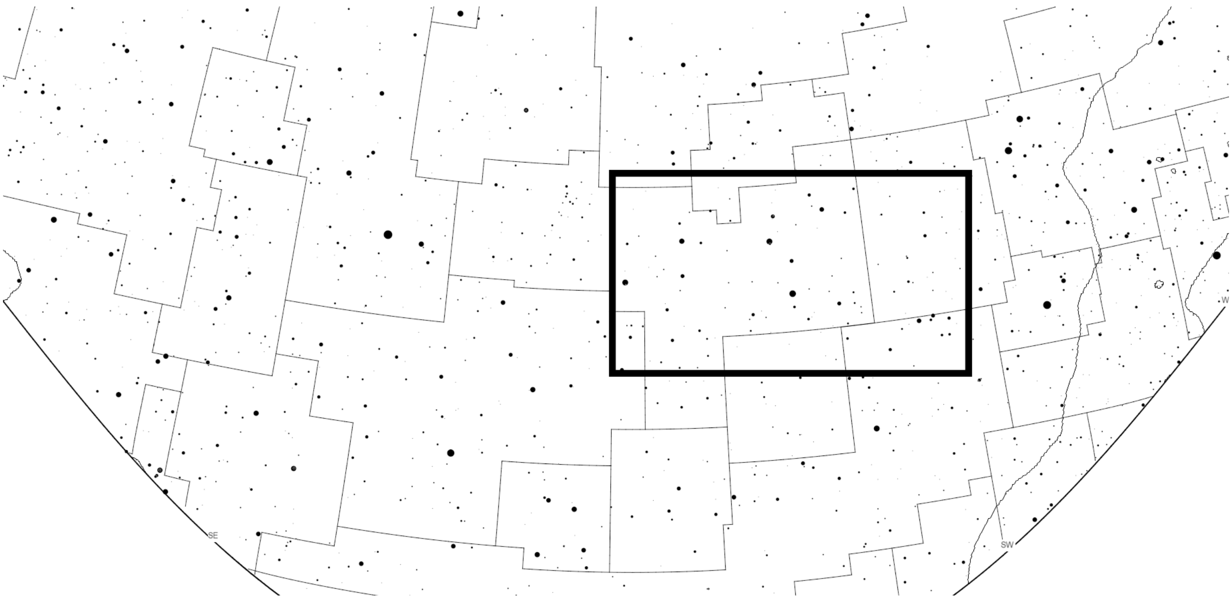
Krajské kolo 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Praktická

(max. 30 bodů)

Za vhodného počasí vyfotografujte ze stativu část oblohy vyznačenou obdélníkem na mapce. Snímky je možné i skládat. Na svém snímku označte příslušným číslem objekty uvedené v tabulce. Do tabulky pak doplňte požadované údaje (hvězdnou velikost ve filtru V a jméno) o vybraných objektech, jak je naleznete v databázi SIMBAD[2]

Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno	Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno
1	HIP 48455	3,88	Rasalas	6	GC 16189	2,13	Denebola
2	HD 74442	3,94	Asellus Australis	7	HR 3572	4,25	Acubens
3	HR 3852	3,52	Subra	8	UBV 9555	2,37	Algieba
4	YPAC 43	1,40	Regulus	9	FK5 423	3,35	Chertan
5	BD+21 2298	2,53	Zosma	10	SAO 80378	4,65	Asellus Borealis



Autorem přehledového testu A, příkladu C a praktické úlohy D je Tomáš Gráf. Příklad B vytvořil Ondřej Theiner.

[2] http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/