Krajské kolo 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

E Vzdalující se hvězda

(max. 25 bodů)

Uvažujte hvězdu ve vzdálenosti $r_0 = 10\,\mathrm{pc}$, která se pohybuje rychlostí v po přímce směrem od pozorovatele na Zemi. Dále víte, že pozorovatel naměřil ve spektru hvězdy červený posuv $z = 0{,}1$.

a) Určete rychlost vzdalování hvězdy od pozorovatele a uvažte, zda je výsledek rozumný.

Pokusíme se vystačit s rovnicí pro nerelativistický Dopplerovský posuv

$$v = cz = 0{,}1c \doteq 3 \cdot 10^7\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Spočítaná hodnota je stále výrazně menší než je rychlost světla c, proto není nutné použít relativistickou formuli. Při použití relativistického vztahu

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$$

dostáváme

$$v = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}\,c \doteq 0{,}095c\,.$$

Při zaokrouhlení na jednu platnou číslici (v souladu se zadanou hodnotou z) tedy máme $v \doteq 0{,}1c$.

b) Ze znalosti červeného posuvu z určete poměr energií vyzářeného a detekovaného fotonu E_0/E, kde E_0 je energie vyzářeného fotonu (energie, kterou bychom naměřili v klidové soustavě hvězdy) a E je energie fotonu detekovaného pozorovatelem na Zemi. Rovněž určete poměr T/T_0 délky časového intervalu T mezi detekcí dvou fotonů na Zemi a časového intervalu T_0 mezi vyzářením stejných dvou fotonů hvězdou.

Červený posuv je definován jako

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\,.$$

Dále vyjdeme ze vztahu pro energii fotonu $E = hf = \frac{hc}{\lambda}$. Spojením vztahů dostáváme řešení

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0}}{\frac{1}{E_0}} = \frac{E_0 - E}{E} = \frac{E_0}{E} - 1\,.$$

Z toho ihned plyne $E_0/E = 1 + z$, tedy $E_0/E = 1{,}1$. Při odvození jsme vycházeli čistě z definice červeného posuvu, výsledek tedy nezávisí na tom, jestli počítáme klasicky nebo relativisticky.

Na interval mezi vysláním dvou fotonů lze nahlížet jako na „periodu“ (skutečně, pokud by nebyly vyslány pouze dva fotony, ale nekonečně mnoho fotonů za sebou ve stejných intervalech, měl by interval mezi vysláním dvou fotonů interpretaci jako perioda), takže poměr délek časových intervalů mezi detekcí dvou fotonů a mezi jejich vyzářením okamžitě plyne z dopplerovského vztahu pro periodu

$$T = T_0\left(1 + \frac{v}{c}\right) = T_0(1 + z)\,,$$

tedy $T/T_0 = 1 + z = 1{,}1$. Výsledek opět nezávisí na tom, jestli počítáme klasicky nebo relativisticky.

Odvození lze provést rovněž přímo z kinematiky situace. Ve vztažné soustavě pozorovatele máme pozorovatele ve fixní pozici a vzdalující se hvězdu ve dvou pozicích, které označíme 1 a 2, v nichž dojde k vyslání fotonů s časovým odstupem T_0. Zajímá nás, s jakým časovým odstupem tyto dva fotony zaregistruje pozorovatel. Tento časový rozdíl T bude rozdílem doby letu fotonů vyslaných v bodě 1 a 2. Pokud označíme vzdálenost hvězdy v bodě 1 k pozorovateli jako d_1, urazí foton tuto vzdálenost za čas $t_1 = d_1/c$. Pro let fotonu z bodu 2 k pozorovateli dostáváme čas $t_2 = T_0 + (d_1 + \Delta d)/c$, kde Δd je vzdálenost bodů 1 a 2, kterou vypočteme jako $\Delta d = vT_0 = czT_0$. Celkem dostáváme

$$T = t_2 - t_1 = T_0 + \frac{d_1 + \Delta d}{c} - \frac{d_1}{c} = T_0 + \frac{\Delta d}{c} = T_0 + \frac{czT_0}{c} = (1 + z)T_0\,,$$

tedy $T/T_0 = 1 + z$. V relativistickém případě postupujeme identicky s tím rozdílem, že v důsledku dilatace času musíme v soustavě pozorovatele nahradit interval T_0 intervalem γT_0, kde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Celkem tedy dostáváme

$$T = t_2 - t_1 = \gamma T_0 + \frac{d_1 + \Delta d}{c} - \frac{d_1}{c} = \gamma T_0 + \frac{v\gamma T_0}{c} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\gamma T_0 = T_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,,$$

tedy $T/T_0 = 1 + z$, kde jsme využili relativistického vztahu pro Dopplerův jev

$$\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = z + 1\,.$$

c) Určete, po jakou dobu t se bude muset hvězda vzdalovat od pozorovatele, aby se pozorovaná hvězdná velikosti hvězdy zvýšila o $\Delta m = 0{,}1\,\mathrm{mag}$.

Máme

$$\Delta m = -2{,}5\log\frac{\frac{1}{(r_0+vt)^2}}{\frac{1}{r_0^2}} = 5\log\left(1 + \frac{vt}{r_0}\right)\,,$$

a tedy

$$t = \frac{r_0}{v}\left(10^{0{,}2\Delta m} - 1\right)\,.$$

Po dosazení dostáváme $t \doteq 4{,}85 \cdot 10^8\,\mathrm{s} \doteq 15{,}4\,\mathrm{let}$.

F Zářivý výkon

(max. 25 bodů)

Ze spektroskopických pozorování hvězdy bylo zjištěno, že nejvíce energie vyzáří hvězda na vlnové délce $\lambda_{\max} = 365\,\mathrm{nm}$ a z interferometrických měření byl určen její úhlový poloměr $\alpha = 0{,}001\,7\,''$. Předpokládejte, že se hvězda nachází ve vzdálenosti $r = 10\,\mathrm{ly}$ od Země.

a) Vypočtěte zářivý výkon hvězdy v jednotkách zářivého výkonu Slunce.

Krajské kolo 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Z Wienova posunovacího zákona vypočteme teplotu hvězdy a ze vzdálenosti a úhlového rozměru její lineární poloměr. Obojí dosadíme do vztahu pro zářivý výkon (Stefanova-Boltzmannova zákona), tedy

$$L = 4\pi \cdot (\alpha \cdot r)^2 \cdot \sigma \left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^4 .$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $L \doteq 4{,}50 L_{\odot}$.

b) Vypočtěte její absolutní bolometrickou hvězdnou velikost.

Porovnáním se Sluncem v Pogsonově rovnici dostáváme

$$M = M_{\odot} - 2{,}5 \log \frac{L}{L_{\odot}} \doteq (4{,}74 - 2{,}5 \log 4{,}50)\,\mathrm{mag} \doteq 3{,}11\,\mathrm{mag}\,.$$

c) Vypočtěte její bolometrickou hvězdnou velikost pro pozorovatele na Zemi.

Použitím definice absolutní hvězdné velikosti a Pogsonovy rovnice dostáváme pro modul vzdálenosti vztah

$$m - M = -2{,}5 \log \frac{\frac{L}{4\pi r^2}}{\frac{L}{4\pi (10\,\mathrm{pc})^2}} = -5 + 5 \log \frac{r}{\mathrm{pc}}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $m \doteq 0{,}54\,\mathrm{mag}$.

Autorem příkladu E je Pavel Kůs a příklad F vytvořil Tomáš Gráf.