Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ

100
ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST 1917–2017

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Analýza dat

Úlohy

G Exoplanety

(max. 20 bodů)

V této praktické úloze se pokusíte zjistit co nejvíce informací o třech exoplanetách obíhajících tři různé hvězdy, a to na základě jejich světelných křivek, které vidíme na obr. 1.

a) Pro každý z grafů 1a až 1c určete co nejpřesněji měřítko časové osy, neboli určete, kolik dní připadá na 1 mm vodorovné osy.

Pro všechny 3 diagramy je možné naměřit 108 mm pro 700 dnů, tedy 6,48 dne/mm.

b) Určete co nejpřesněji periody oběhu všech tří exoplanet. Pro každou exoplanetu proveďte 10 měření periody. Do příslušné tabulky v odpovědním archu zaznamenejte vždy naměřenou délku v mm, odpovídající počet period a vypočtenou délku jedné periody ve dnech. Následně vypočtěte průměrné hodnoty oběžných period všech tří exoplanet ve dnech.

Průměrná hodnota periody pro exoplanetu 1 je 74,9 d, pro exoplanetu 2 máme 204,3 d a pro exoplanetu 3 pak 154,6 d.

Tabulka 1: Měření periody pro exoplanetu 1.

č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet period	1	2	3	4	5	6	7	3	2	5
$\frac{\text{délka}}{\text{mm}}$	11,6	23,1	34,8	46,2	57,8	69,3	81,0	34,9	23,0	57,5
$\frac{\text{perioda}}{\text{dny}}$	75,17	74,84	75,17	74,84	74,91	74,84	74,98	75,38	74,52	74,52

Tabulka 2: Měření periody pro exoplanetu 2.

č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet period	1	2	3	1	1	2	3	1	1	2
$\frac{\text{délka}}{\text{mm}}$	31,8	63,2	94,9	31,2	31,5	63,1	94,8	31,2	31,8	62,9
$\frac{\text{perioda}}{\text{dny}}$	206,06	204,77	204,98	202,18	204,12	204,44	204,77	202,18	206,06	203,80

Tabulka 3: Měření periody pro exoplanetu 3.

č. měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
počet period	1	2	3	4	1	1	1	2	2	3
$\frac{\text{délka}}{\text{mm}}$	23,8	47,6	71,8	95,6	23,8	23,9	23,7	47,8	47,7	71,8
$\frac{\text{perioda}}{\text{dny}}$	154,22	154,22	155,09	154,87	154,22	154,84	153,58	154,87	154,55	155,09

Tabulka 4: Závislost hmotnosti, poloměru a efektivní teploty hvězd hlavní posloupnosti na spektrální třídě.

Spektr. třída	A0	A5	F0	F5	G0	G5	K0	K5	M0	M5
$\frac{\text{Hmotnost}}{M_\odot}$	3,5	2,2	1,8	1,4	1,07	0,93	0,81	0,69	0,48	0,22
$\frac{\text{Poloměr}}{R_\odot}$	2,63	1,78	1,35	1,20	1,05	0,93	0,85	0,74	0,63	0,32
$\frac{\text{Teplota}}{\text{K}}$	9 700	8 100	7 200	6 500	6 000	5 400	4 700	4 000	3 300	2 600

V tabulce 4 najdete typické hodnoty hmotnosti, poloměru a efektivní teploty hvězd hlavní posloupnosti různých spektrálních tříd.

c) Za předpokladu, že všechny tři mateřské hvězdy leží na hlavní posloupnosti, využijte data z tabulky 4 k nalezení jejich pravděpodobné hmotnosti (v $M_\odot$), poloměru (v $R_\odot$) a efektivní teploty (v K).

Podle údajů pod světelnými křivkami se jedná o hvězdy typu F5, K0 a M0, tedy údaje ve 4., 7. a 9. sloupci tabulky.

d) Vypočtěte velké poloosy oběžných drah všech tří planet (v au).

K výpočtu využijeme vztah $P = 2\pi\sqrt{a^3/(GM_*)}$, který upravíme pro výpočet velikosti hlavni poloosy a do podoby

$$a = \left(\frac{GM_* P^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} ,$$

kde M_* značí hmotnost centrální hvězdy a P periodu oběhu exoplanety. Po numerickém dosazení dostaneme pro exoplanetu 1 hodnotu $5{,}82 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}39\,\mathrm{au}$, pro exoplanetu 2 hodnotu $9{,}47 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}63\,\mathrm{au}$ a pro exoplanetu 3 hodnotu $6{,}60 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}44\,\mathrm{au}$.

e) Za předpokladu, že planety se chovají jako absolutně černá tělesa, vypočtěte jejich povrchové teploty (v K). Může se na některé z nich nacházet voda v kapalném stavu?

Z podmínky záření AČT vyplývá, že nemusíme řešit albedo povrchu planety ani její emisivitu a její teplotu T můžeme vypočítat podle vztahu

$$T = \sqrt{\frac{R_*}{2a}}T_* ,$$

kde T_* je teplota centrální hvězdy. Po numerickém dosazení dostaneme pro exoplanetu 1 hodnotu 551 K, pro exoplanetu 2 hodnotu 263 K a pro exoplanetu 3 hodnotu 190 K. Vzhledem ke zjednodušujícím předpokladům výpočtu je možné uvažovat, že voda ve trojím skupenství by mohla být myslitelná pouze na exoplanetě 2.

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

H Planetka 221 235

(max. 20 bodů)

V následující úloze se budete věnovat analýze dat získaných pozorováním planetky s číselným označením 221 235. V tabulce 5 jsou uvedena naměřená data geocentrických ekliptikálních souřadnic zmíněné planetky. Tabulka též obsahuje geocentrické ekliptikální souřadnice Slunce.

a) Na základě těchto údajů vypočítejte, pro každé datum pozorování, úhel δ mezi průměty průvodičů Země–Slunce a Země–planetka do roviny ekliptiky. Úhel δ nabývá hodnot od 0° do 360°, kde 0° odpovídá konjunkci. Výsledky vepište do příslušné tabulky v odpovědním archu.

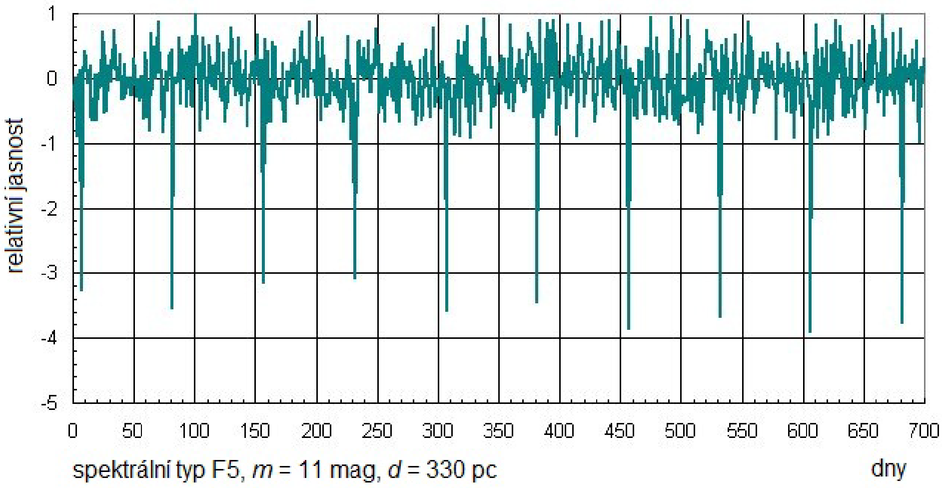
Nápověda: Ekliptikální délka se měří podél roviny ekliptiky od jarního bodu ve směru pohybu Slunce po ekliptice a nabývá hodnot od 0° do 360°. Ekliptikální šířka nabývá hodnot od −90° do +90°, kde nulovou šířku definuje rovina ekliptiky.

Tabulka 5: Naměřená data pro planetku 221 235. Úhlové souřadnice jsou uvedeny ve stupních. Ekliptikální délka, resp. šířka jsou označeny jako λ, resp. β.

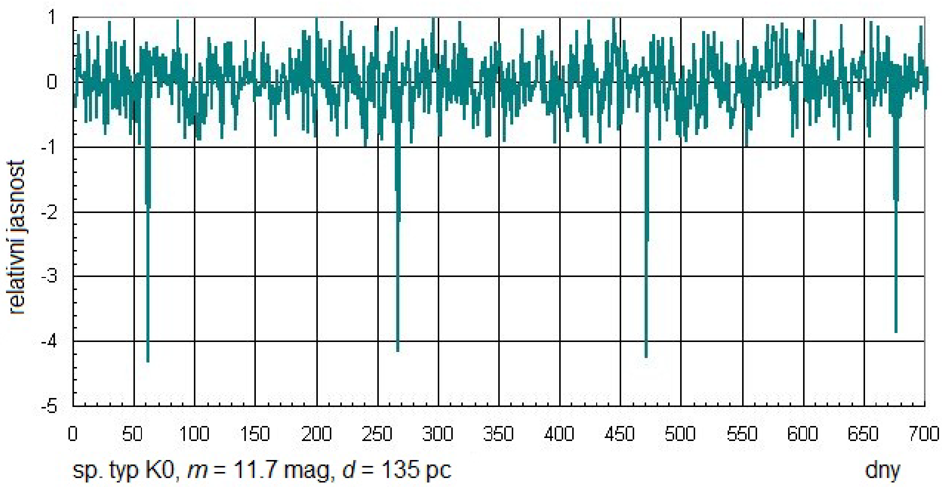
	Planetka		Slunce	
JD	λ_p	β_p	λ_s	β_s
2456743,50	357,28	0,01	6,24	0,00
2456788,50	15,90	0,02	50,24	0,00
2456833,50	32,47	0,02	93,38	0,00
2456878,50	44,73	0,03	136,35	0,00
2456923,50	48,45	0,04	179,90	0,00
2456968,50	40,97	0,05	224,49	0,00
2457013,50	34,89	0,04	270,04	0,00
2457058,50	40,45	0,04	315,84	0,00
2457103,50	53,66	0,03	1,04	0,00
2457148,50	70,23	0,02	45,16	0,00
2457193,50	87,96	0,02	88,38	0,00
2457238,50	105,60	0,02	131,33	0,00
2457283,50	121,92	0,02	174,77	0,00
2457328,50	134,80	0,02	219,24	0,00
2457373,50	140,04	0,02	264,71	0,00
2457418,50	133,73	0,01	310,52	0,00
2457463,50	126,26	0,00	355,83	0,00
2457508,50	130,00	0,00	40,08	0,00

Protože nás zajímá pouze projekce do roviny ekliptiky, stačily nám pouze údaje o ekliptikální délce. Souřadnice β je tedy pro účely tohoto úkolu uvedena navíc. Vypočítané hodnoty jsou uvedeny v tabulce 6.

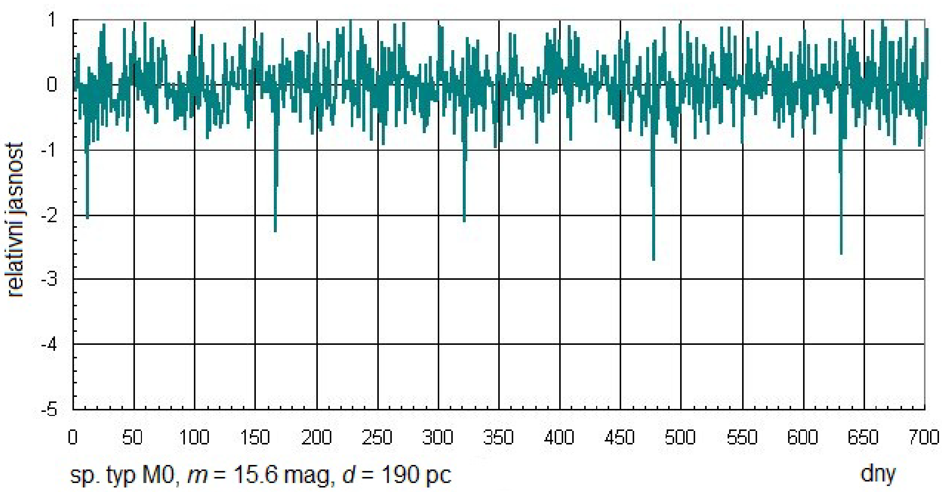
b) Do grafu vyneste závislost úhlu δ na juliánském datu. Na základě tohoto grafu a výše uvedených dat určete co nejpřesněji synodickou oběžnou periodu T_{syn} planetky (v rocích).



(a) Exoplaneta 1



(b) Exoplaneta 2



(c) Exoplaneta 3

Obrázek 1: Grafy ukazují měřenou jasnost tří odlišných hvězd. Jejich spektrální typ je vždy uveden u příslušné křivky.

Tabulka 6: Tabulka s vypočtenými hodnotami úhlu δ.

	Planetka		Slunce		
JD	λ_p	β_p	λ_s	β_s	Úhel δ
2456743,50	357,28	0,01	6,24	0,00	8,96
2456788,50	15,90	0,02	50,24	0,00	34,34
2456833,50	32,47	0,02	93,38	0,00	60,91
2456878,50	44,73	0,03	136,35	0,00	91,62
2456923,50	48,45	0,04	179,90	0,00	131,45
2456968,50	40,97	0,05	224,49	0,00	183,52
2457013,50	34,89	0,04	270,04	0,00	253,15
2457058,50	40,45	0,04	315,84	0,00	275,39
2457103,50	53,66	0,03	1,04	0,00	307,38
2457148,50	70,23	0,02	45,16	0,00	334,93
2457193,50	87,96	0,02	88,38	0,00	0,42
2457238,50	105,60	0,02	131,33	0,00	25,73
2457283,50	121,92	0,02	174,77	0,00	52,85
2457328,50	134,80	0,02	219,24	0,00	84,44
2457373,50	140,04	0,02	264,71	0,00	124,67
2457418,50	133,73	0,01	310,52	0,00	176,79
2457463,50	126,26	0,00	355,83	0,00	229,57
2457508,50	130,00	0,00	40,08	0,00	270,08

Požadovaná závislost je vynesena v grafu na obrázku 2. Z grafu vidíme, že mezi juliánskými daty 2456743,50 a 2457193,50, kdy uplynulo 450 dní, se úhel δ zvětšil o 351,46°. Tedy neproběhla celá perioda. V prvním přiblížení můžeme stanovit celou synodickou periodu pomocí trojčlenky jako

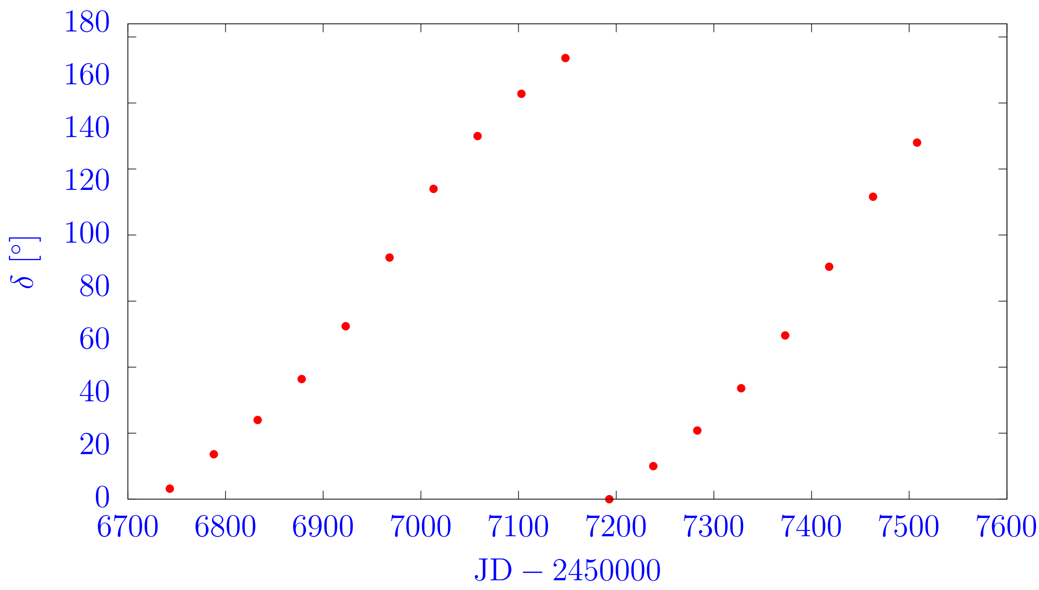
$$T_\text{syn} = \frac{360}{351{,}46} \cdot 450\,\text{dní} = 460{,}93\,\text{d} \doteq 1{,}26\,\text{let}$$

Ještě přesnější odhad bychom mohli učinit tak, že bychom vždy dvěma body např. poblíž konjunkce proložili přímku a určili bychom, kde tato přímka protíná časovou osu. Toto bychom udělali pro dvě po sobě jdoucí konjunkce a synodickou oběžnou dobu bychom pak určili jako časový rozdíl mezi těmito průsečíky. Chceme-li dvěma body v grafu proložit lineární závislost popsanou rovnicí $y = kx + q$, kde x je nezávislá proměnná, přičemž tyto body mají v kartézských souřadnicích složky $[A_x : A_y]$ a $[B_x : B_y]$, můžeme jednoduše odvodit, že pro x-ovou souřadnici průsečíku P této lineární závislosti s osu x platí

$$P_x = \frac{A_y B_x - A_x B_y}{A_y - B_y}\,.$$

Zvolíme-li si poblíž první konjunkce body [2456743,5 : 8,96] a [2456788,5 : 34,33] a poblíž druhé opozice body [2457193,5 : 0,42] a [2457238,5 : 25,73], dostaneme pro okamžiky konjunkcí časy $t_1 = 2456727{,}61$ a $t_2 = 2457192{,}75$. Tedy synodická doba v tomto případě bude

$$T_\text{syn} = 465{,}14\,\text{d} \doteq 1{,}27\,\text{let}\,.$$



Obrázek 2: Závislost úhlu δ na čase.

c) Na základě vámi vypočtené synodické periody určete siderickou oběžnou dobu T_{sid} této planetky (v letech). Též určete velkou poloosu a její dráhy (v au).

Synodická oběžná doba je větší než jeden rok, což znamená, že pro siderickou periodu bude platit

$$\frac{1}{T_{\mathrm{syn}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{z}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{sid}}} \quad \Longrightarrow \quad T_{\mathrm{sid}} = \frac{T_{\mathrm{z}} T_{\mathrm{syn}}}{T_{\mathrm{syn}} - T_{\mathrm{z}}}\,,$$

kde T_{z} je oběžná doba Země kolem Slunce, tedy jeden rok. Po dosazení dostaneme oběžnou dobu $T_{\mathrm{sid}} \doteq 4{,}8\,\mathrm{let}$ v případě, že jsme stanovili synodickou periodu jako 1,26 let a $T_{\mathrm{sid}} = 4{,}7\,\mathrm{let}$ v případě, že jsme stanovili synodickou periodu jako 1,27 let. Velkou poloosu v astronomických jednotkách dostaneme ze třetího Keplerova zákona ve tvaru

$$\frac{a}{\mathrm{au}} = \left(\frac{T_{\mathrm{sid}}}{\mathrm{y}}\right)^{\frac{2}{3}}\,,$$

kde T_{sid} dosazujeme v letech. Číselně dostaneme $a \doteq 2{,}9\,\mathrm{au}$ a $a \doteq 2{,}8\,\mathrm{au}$ pro druhý případ určení synodické oběžné doby.

Nyní až do konce úlohy uvažujte, že se planetka pohybuje přesně v rovině ekliptiky. Jedná se o oprávněný zjednodušující předpoklad, neboť souřadnice β_{p} uváděná v tabulce 5 se od nuly lišila v průběhu času jen málo.

V tabulce 7 je uvedena ekliptikální délka planetky k datu konání celostátního kola Astronomické olympiády a kartézské složky rychlosti planetky vůči Zemi. Stejně tak tabulka obsahuje kartézské složky rychlosti Země vůči Slunci, přičemž obě souřadné soustavy mají shodně orientované osy.

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 7: Údaje o planetce a Zemi odpovídající situaci 10. května 2018. Ekliptikální délka je udaná ve stupních. Složky vektorů rychlosti planetky a Země jsou uvedeny v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Datum	Planetka			Země	
	λ_p	$\frac{v_{\mathrm{p},x}}{\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$	$\frac{v_{\mathrm{p},y}}{\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$	$\frac{v_{\mathrm{z},x}}{\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$	$\frac{v_{\mathrm{z},y}}{\mathrm{km\cdot s^{-1}}}$
10. 5. 2018	336,01	−8,26	32,59	22,01	−19,65

d) Určete z těchto informací velikost v rychlosti planetky vůči Slunci (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) a okamžitou vzdálenost r planetky od Slunce v toto datum (v au).

Složky vektoru rychlosti vůči Slunci určíme jednoduše sečtením příslušných složek rychlostí planetky a Země

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{p},x} + v_{\mathrm{z},x} \\ v_{\mathrm{p},y} + v_{\mathrm{z},y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13{,}75 \\ 12{,}94 \end{pmatrix}\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Velikost vektoru poté určíme standardním způsobem jako

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{13{,}75^2 + 12{,}94^2}\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \doteq 18{,}88\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Pro velikost rychlosti v daném místě dráhy platí vztah

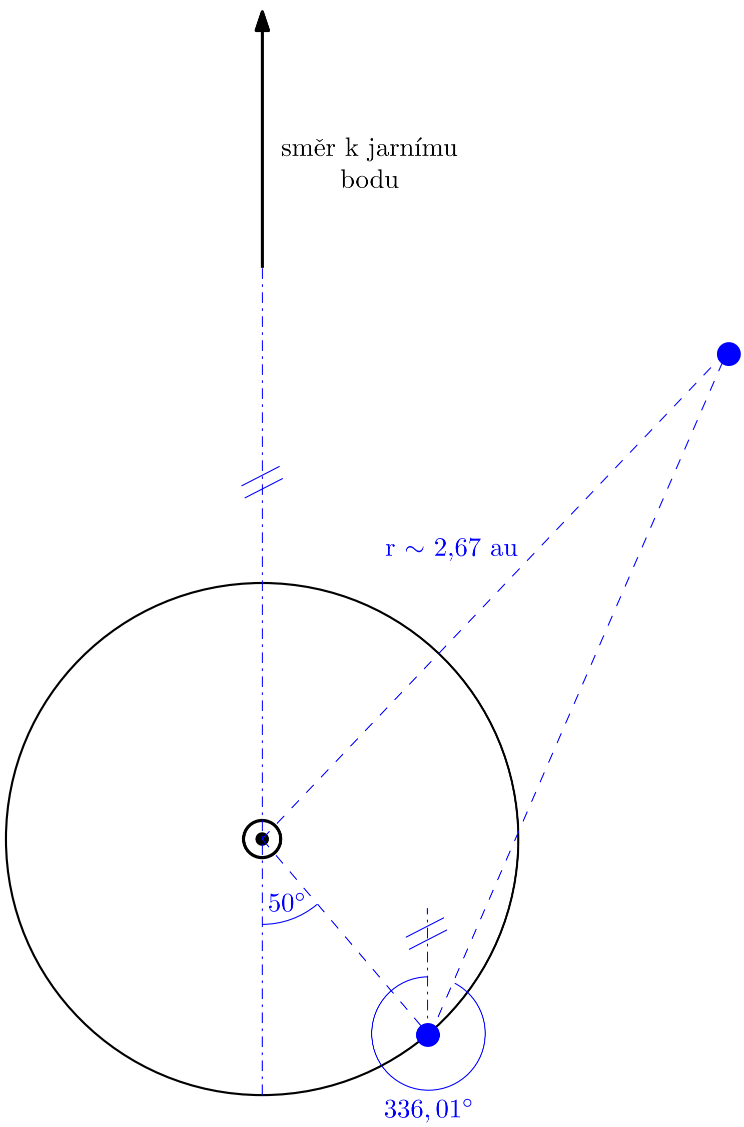
$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{2GMa}{v^2 a + GM}\,,$$

kde M značíme hmotnost Slunce. Číselně dostaneme $r \doteq 2{,}7\,\mathrm{au}$, resp. $r \doteq 2{,}6\,\mathrm{au}$ pro velkou poloosu $a = 2{,}9\,\mathrm{au}$, resp. $a = 2{,}8\,\mathrm{au}$.

e) Do příslušného nákresu v odpovědním archu, ve kterém je zakreslené Slunce, oběžná dráha Země a směr k jarnímu bodu, zakreslete co nejpřesněji polohu Země a planetky k datu 10. května 2018. Na sluneční soustavu se zde díváme od severního ekliptikálního pólu. Uvažujte, že dráha Země kolem Slunce je kruhová a že jarní rovnodennost v roce 2018 nastala 20. března.

Jelikož máme daný směr k jarnímu bodu, nemůžeme Zemi nakreslit na libovolné místo na její oběžné dráze. Jarní rovnodennost v roce 2018 nastala 20. března. V době zakreslované situace tedy uplynulo od rovnodennosti 51 dní, což za předpokladu kruhové dráhy Země odpovídá situaci, kdy Země uběhla na své dráze 50° od okamžiku jarní rovnodennosti. Víme, že ekliptikální délka λ_p planetky je 336,01°, tedy úhel, který svírá směr k jarnímu bodu a spojnice Země–planetka bude 336,01°. Poslední informaci, kterou potřebujeme využít, je známá vzdálenost planetky od Slunce v dané datum a ta činí 2,67 au. Pokud tuto vzdálenost správně naškálujeme podle poloměru zemské dráhy, který odpovídá vzdálenosti 1 au, dostaneme situaci vyobrazenou na obrázku 3.

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Řešení úkolu e).