Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ

ČESKÁ ASTRONOMICKÁ SPOLEČNOST 1917–2017

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Mizar a Alcor

(max. 10 bodů)

Alcor a Mizar jsou hvězdy v souhvězdí Velké medvědice, které tvoří dvojhvězdu viditelnou pouhým okem. Vizuální hvězdné velikosti těchto hvězd činí $m_1 = 2{,}04\,\mathrm{mag}$ a $m_2 = 3{,}99\,\mathrm{mag}$. Představte si, že bychom kvůli nízkému rozlišení našeho instrumentu viděli obě hvězdy jako jednu. Jakou vizuální hvězdnou velikost m by tato hvězda měla (číselně v mag)?

Nechť I_1 je intenzita hvězdy 1 a I_2 intenzita hvězdy 2. Celková intenzita dvojhvězdy je tedy $I = I_1 + I_2$. Z Pogsonovy rovnice

$$m_2 - m_1 = -2{,}5 \log \frac{I_2}{I_1}$$

můžeme určit vztah mezi intenzitami

$$I_2 = 10^{-(m_2 - m_1)/2{,}5} I_1 \, .$$

Celková intenzita je tedy

$$I = I_1 + I_2 = I_1 \left(1 + 10^{-(m_2 - m_1)/2{,}5}\right) \, .$$

Pro celkovou hvězdnou velikost platí

$$m - m_1 = -2{,}5 \log \left(1 + 10^{-(m_2 - m_1)/2{,}5}\right) \, ,$$

z čehož plyne, že

$$m = -2{,}5 \log \left(10^{-m_1/2{,}5} + 10^{-m_2/2{,}5}\right) \, .$$

Pro naše konkrétní hvězdy získáme $m = 1{,}87\,\mathrm{mag}$.

B Wibbly-wobbly

(max. 10 bodů)

Vypočtěte oběžnou rychlost $v_\odot$ Slunce v kruhové dráze kolem společného hmotného středu systému Slunce–Jupiter (číselně v $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$).

Označme dolními indexy $\odot$, resp. J veličiny náležící Slunci, resp. Jupiteru. Nechť M_i, a_i, resp. v_i značí hmotnosti, vzdálenosti od hmotného středu, resp. rychlosti obou těles (kde $i \in \{\odot, \mathrm{J}\}$). Rovněž označme P periodu oběhu systému. Potom platí $v_\odot = \frac{2\pi a_\odot}{P}$ a $M_\odot a_\odot = M_\mathrm{J} a_\mathrm{J}$. Z 3. Keplerova zákona pak máme

$$\frac{G(M_\odot + M_\mathrm{J})}{4\pi^2} = \frac{(a_\odot + a_\mathrm{J})^3}{P^2} = \frac{a_\odot^3 (M_\mathrm{J} + M_\odot)^3}{P^2 M_\mathrm{J}^3} \, ,$$

kde v posledním kroku jsme dosadili $a_\mathrm{J} = (M_\odot/M_\mathrm{J})a_\odot$. Odtud vyjádříme

$$a_\odot \approx M_\mathrm{J}\left(\frac{GP^2}{4\pi^2 M_\odot^2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

kde jsme zanedbali hmotnost Jupitera vzhledem k hmotnosti Slunce. Máme tedy

$$v_\odot \approx M_\mathrm{J}\left(\frac{2\pi G}{PM_\odot^2}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq 12{,}5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

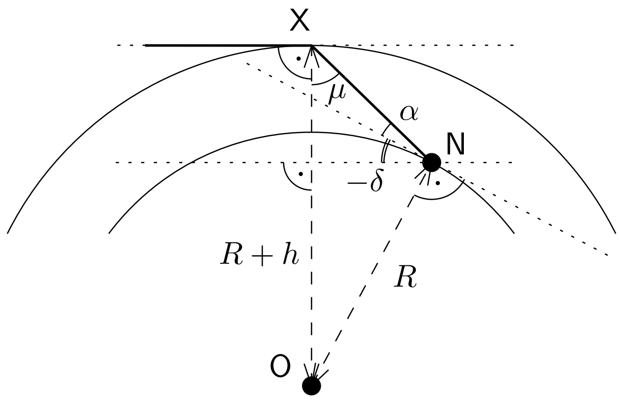
C Ze dna oceánu

(max. 10 bodů)

Uvažujme kamennou planetu o poloměru $R = 5\,000\,\mathrm{km}$ s „atmosférou“ tvořenou kapalnou vodou (index lomu světla $n = 1{,}33$), která sahá do výšky $h = 1\,500\,\mathrm{km}$, a astronoma, který stojí na severním pólu této planety na jejím pevném povrchu. V jaké nejmenší výšce α nad obzorem může astronom pozorovat hvězdu? Jakou by měla tato hvězda deklinaci δ? Absorpci světla ve vodě zanedbejte.

Nápověda: pro paprsek, který se šíří z prostředí s indexem lomu n_1 do prostředí s indexem lomu n_2 platí $n_1/n_2 = \sin\alpha_2/\sin\alpha_1$, kde α_1 je úhel dopadu a α_2 je úhel lomu (měřeno od kolmice k rozhraní).

Předpokládejme nejdříve, že viditelnost hvězd nebude omezena horizontem, ale totálním odrazem. Nákres limitní situace vidíme na obr. 1. Označme μ mezní úhel totálního odrazu.



Obrázek 1: Průchod limitního paprsku za předpokladu omezení totálním odrazem. Střed planety je označen jako O, severní pól jako N a místo, kde paprsek opouští atmosféru, jako X.

Jeho hodnota je $\mu = \arcsin(\frac{1}{n}) \doteq 48{,}8^\circ$. Nejnižší výšku α nad obzorem získáme pomocí sinové věty pro trojúhelník ONX

$$\frac{\sin\mu}{R} = \frac{\sin(\alpha+90^\circ)}{R+h} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{R+h}{nR}\,.$$

Číselně dostáváme $\alpha \doteq 12{,}2^\circ$. Jelikož jsme dostali $\alpha > 0$, je náš výchozí předpoklad správný. Ze souhlasných úhlů jde vidět, že limitní deklinace δ splňuje

$$(-\delta) + \alpha + \mu + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow -\delta = 90^\circ - \alpha - \mu\,,$$

odkud dostáváme $\delta \doteq -29°$. Hvězda s nejmenší deklinací, která by byla ještě pozorovatelná, by tedy měla deklinaci $-29°$.

D Když se hvězda mění

(max. 10 bodů)

Uvažujte hvězdu o poloměru R a teplotě T. Ukažte, že pokud se změní poloměr hvězdy o malou hodnotu ΔR a teplota hvězdy o malou hodnotu ΔT, pak pro změnu ΔL zářivého výkonu L hvězdy platí přibližný vztah

$$\frac{\Delta L}{L} \approx 2\frac{\Delta R}{R} + 4\frac{\Delta T}{T} \,.$$

Při výpočtu zanedbejte členy kvadratického a vyššího řádu v malých hodnotách.

Poznámka: i když se vám nepodaří vztah odvodit, můžete jej použít níže bez další ztráty bodů.

O kolik procent by se musela změnit teplota povrchu hvězdy, pokud by se poloměr hvězdy měl zvětšit o 1 % a přitom se nezměnil její zářivý výkon?

Vyjdeme ze Stefanova-Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$. Pokud se poloměr hvězdy změní o ΔR teplota o ΔT, dojde ke změně zářivého výkonu hvězdy o ΔL a můžeme napsat

$$L + \Delta L = 4\pi (R + \Delta R)^2 \sigma (T + \Delta T)^4 = 4\pi R^2 \left(1 + \frac{\Delta R}{R}\right)^2 \sigma T^4 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^4 \,.$$

Po roznásobení a zanedbání členů vyššího řádu v ΔR a ΔT lze psát

$$\Delta L \approx 8\pi T^4 \sigma R \Delta R + 16\pi \sigma R^2 T^3 \Delta T \,,$$

odkud po vydělení $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ dostaneme požadovaný výsledek. Z přibližného vztahu pro ΔL uvedeného v zadání je zjevné, že musí platit rovnost

$$4\frac{\Delta T}{T} \approx -2\frac{\Delta R}{R} \,,$$

a tedy

$$\frac{\Delta T}{T} \approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta R}{R} = -0{,}5\,\% \,.$$

Teplota hvězdy by se snížila na 99,5 % své původní hodnoty.

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Dloulé úlohy

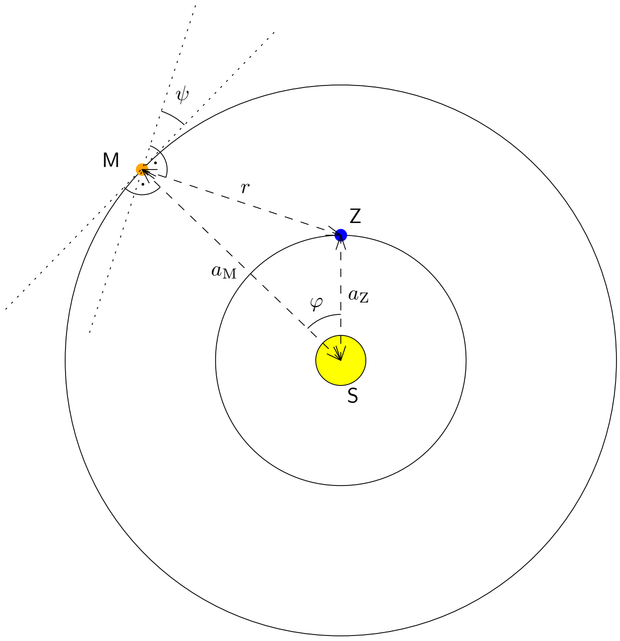
E Retrográdní pohyb

(max. 20 bodů)

Předmětem této úlohy bude prozkoumat retrográdní pohyb planety Mars. Jedná se o jev, kdy se vnější planety sluneční soustavy na pozemské obloze v určité období pohybují vůči hvězdnému pozadí zdánlivě opačným směrem, než je skutečný směr jejich oběhu kolem Slunce.

Označme T_{Z}, resp. T_{M} siderickou periodu oběhu Země, resp. Marsu kolem Slunce. Rovněž označme a_{Z}, resp. a_{M} poloměry oběžných drah Země, resp. Marsu kolem Slunce. Pro jednoduchost předpokládejme, že dráhy obou těles jsou kruhové a ignorujme rotaci obou těles kolem jejich os.

Přenesme se do heliocentrické vztažné soustavy (tj. se Sluncem v počátku), která rotuje stejnou úhlovou rychlostí $\omega_{\mathrm{Z}} = 2\pi/T_{\mathrm{Z}}$, jako Země obíhá kolem Slunce. Tuto soustavu označme H_{Z}. Ve vztažné soustavě H_{Z} tedy například platí, že spojnice Slunce–Země (průvodič Země) je v klidu.



Obrázek 2: Schematické znázornění situace. Body S, Z, resp. M vyznačují polohu Slunce, Země, resp. Marsu. Zobrazení není v měřítku.

a) Určete úhlovou rychlost ω'_{M} oběhu Marsu kolem Slunce ve vztažné soustavě H_{Z}. Výsledek vyjádřete obecně pomocí ω_{Z} a siderické úhlové rychlosti $\omega_{\mathrm{M}} = 2\pi/T_{\mathrm{M}}$ oběhu Marsu kolem Slunce.

Dostáváme

$$\omega'_{\mathrm{M}} = \omega_{\mathrm{M}} - \omega_{\mathrm{Z}}\,.$$

Označme φ úhel, který svírá průvodič Země s průvodičem Marsu. Viz obr. 2.

b) Určete vzdálenost r Země od Marsu jako funkci úhlu φ. Výsledek vyjádřete obecně pomocí a_{M}, a_{Z} a $\cos\varphi$.

Finále 2017/18, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Pomocí kosinové věty získáme

$$r(\varphi) = \sqrt{a_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{Z}^2 - 2a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}\cos\varphi}\,.$$

Označme ψ úhel, který svírá tečna k oběžné dráze Marsu vedená místem, kde se Mars zrovna nachází, s kolmicí na spojnici Země a Marsu. Viz obr. 2.

c) Určete $\cos\psi$. Výsledek vyjádřete obecně pomocí a_M, a_Z a $\cos\varphi$.

Úhel ψ rovněž svírají spojnice Země–Mars a průvodič Marsu. Platí tedy kosinová věta

$$a_\mathrm{Z}^2 = r^2 + a_\mathrm{M}^2 - 2ra_\mathrm{M}\cos\psi\,,$$

odkud vyjádříme

$$\cos\psi = \frac{a_\mathrm{Z}^2 - r^2 - a_\mathrm{M}^2}{2ra_\mathrm{M}} = \frac{a_\mathrm{M} - a_\mathrm{Z}\cos\varphi}{\sqrt{a_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{Z}^2 - 2a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}\cos\varphi}}\,.$$

d) Určete tečnou složku v_t oběžné rychlosti Marsu v soustavě H_Z pro pozorovatele na Zemi jako funkci úhlu φ. Výsledek vyjádřete obecně pomocí ω_M, ω_Z, a_M, a_Z a $\cos\varphi$.

Označme $v = \omega'_\mathrm{M}a_\mathrm{M}$ oběžnou rychlost Marsu v soustavě H_Z. Potom platí $v_\mathrm{t} = v\cos\psi$. Dostáváme tedy

$$v_\mathrm{t}(\varphi) = \frac{(\omega_\mathrm{M} - \omega_\mathrm{Z})(a_\mathrm{M}^2 - a_\mathrm{Z}a_\mathrm{M}\cos\varphi)}{\sqrt{a_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{Z}^2 - 2a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}\cos\varphi}}\,.$$

e) Určete úhlovou rychlost ω''_M pohybu Marsu na pozemské obloze vůči hvězdnému pozadí jako funkci φ. Výsledek vyjádřete obecně pomocí ω_M, ω_Z, a_M, a_Z a $\cos\varphi$.

Máme $\omega''_\mathrm{M} = \omega_\mathrm{Z} + v_\mathrm{t}/r$, po úpravě dostaneme

$$\omega''_\mathrm{M} = \frac{\omega_\mathrm{M}a_\mathrm{M}^2 + \omega_\mathrm{Z}a_\mathrm{Z}^2 - (\omega_\mathrm{M} + \omega_\mathrm{Z})a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}\cos\varphi}{a_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{Z}^2 - 2a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}\cos\varphi}\,.$$

f) Určete (číselně ve stupních) dvě hodnoty $\varphi_{1,2}$ úhlu φ, pro které je ω''_M nulová.

Dostáváme

$$\cos\varphi_{1,2} = \frac{\omega_\mathrm{M}a_\mathrm{M}^2 + \omega_\mathrm{Z}a_\mathrm{Z}^2}{(\omega_\mathrm{M} + \omega_\mathrm{Z})a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}}\,,$$

číselně tedy $\varphi_{1,2} \doteq \pm 16{,}8^\circ$.

g) Určete dobu t_ret (číselně ve dnech), po kterou se Mars v rámci jedné synodické periody pohybuje po pozemské obloze retrográdně.

Dostáváme

$$t_\mathrm{ret} = 2|\varphi_{1,2}|\frac{T_\mathrm{syn}}{2\pi} = \frac{2|\varphi_{1,2}|}{\omega_\mathrm{Z} - \omega_\mathrm{M}}\,,$$

číselně $t_\mathrm{ret} \doteq 73\,\mathrm{d}$.

F Spektrometr

(max. 20 bodů)

Na stanovišti se zeměpisnou šířkou φ bylo v době letního slunovratu pozorováno sluneční spektrum. Při východu a západu Slunce byla přesným spektrometrem změřena vlnová délka čáry se střední vlnovou délkou $\lambda \approx 656\,\mathrm{nm}$. Mezi získanými hodnotami byl zjištěn posuv o $\Delta\lambda = 0{,}6\,\mathrm{pm}$.

Zemi považujte za kouli o poloměru $R = 6\,378\,\mathrm{km}$, sklonu osy rotace $\varepsilon = 23{,}44^\circ$ vůči rovině ekliptiky a délce siderického dne $T = 86\,164\,\mathrm{s}$. Dráhu Země kolem Slunce považujte za kruhovou.

a) S využitím vhodného sférického trojúhelníku ukažte, že pro úhlovou vzdálenost A místa východu Slunce od severního bodu v době letního slunovratu platí $\cos A = \sin\varepsilon / \cos\varphi$.

Poznámka: i když se vám nepodaří vztah odvodit, můžete jej použít níže bez další ztráty bodů.

Nejprve určíme úhlovou vzdálenost místa východu Slunce od severního bodu (která je stejná jako úhlová vzdálenost místa západu Slunce od severního bodu). Využijeme k tomu sférický trojúhelník ZPS, kde Z označuje zenit, P severní nebeský pól a S polohu Slunce v okamžiku východu Slunce. Pro délku stran tohoto sférického trojúhelníku platí $|\mathsf{ZP}| = 90^\circ - \varphi$, $|\mathsf{ZS}| = 90^\circ$ a $|\mathsf{SP}| = 90^\circ - \varepsilon$, neboť deklinace Slunce v době letního slunovratu činí $\delta = \varepsilon$.

Z kosinové věty pro strany sférického trojúhelníku ZPS plyne pro (topografický) azimut A východu Slunce

$$\cos|\mathsf{SP}| = \cos|\mathsf{ZP}|\cos|\mathsf{ZS}| + \sin|\mathsf{ZP}|\sin|\mathsf{ZS}|\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\,.$$

b) Určete rozdíl Δv radiálních rychlostí pozorovatele vůči Slunci při jeho východu a západu. Výsledek vyjádřete obecně pomocí ε, φ, R a T.

Z goniometrického vzorce $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ platného pro libovolné reálné číslo α dostáváme

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\varepsilon}{\cos^2\varphi}}\,.$$

V našem případě je rozdíl rychlostí Δv roven dvojnásobku velikosti složky rychlosti rotace Země na dané zeměpisné šířce ve směru Slunce v okamžiku jeho východu/západu, tj.

$$\Delta v = 2\cdot\frac{2\pi R\cos\varphi\sin A}{T} = \frac{4\pi R\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\varepsilon}}{T}\,.$$

Přítomnost faktoru $\sin A$ lze vysvětlit tak, že povrch Země se na daném místě pohybuje rychlostí $(2\pi R/T)\cos\varphi$ přesně východním směrem a $\cos(90^\circ - A) = \sin A$ tedy určuje složku této rychlosti ve směru vycházejícího Slunce.

c) Určete zeměpisnou šířku φ stanoviště (číselně ve stupních).

Z Dopplerova jevu vyplývá

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c}\,,$$

kde λ je střední vlnová délka a Δv je rozdíl rychlostí vysílače vůči přijímači.

Dosazením výše uvedeného vztahu pro Δv a úpravou dostáváme

$$\varphi = \arccos\sqrt{\left(\frac{cT\Delta\lambda}{4\pi R\lambda}\right)^2 + \sin^2\varepsilon} \doteq 60^\circ\,.$$

Zeměpisná šířka stanoviště tak činí $\varphi \doteq \pm 60^\circ$.

Nápověda. Pro sférický trojúhelník ABC se stranami úhlových velikostí a, b, c a vnitřními úhly velikostí α, β, γ platí sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}\,,$$

kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha\,,$$

a kosinová věta pro úhly

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,.$$