Krajské kolo 2017/18, prezenční, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

E Velká čínská zeď

(max. 20 bodů)

Říká se, že jediný objekt vytvořený člověkem, který je vidět z vesmíru, je Velká čínská zeď, která patří mezi novodobých sedm divů světa. Jak dobře ji lze ale doopravdy vidět? Představme si astronauta na Měsíci, který se dívá na Zemi. Pro jednoduchost předpokládejme:
- Měsíc i Země jsou kulaté (poloměr je roven rovníkovému poloměru), různou nadmořskou výšku (tj. pohoří, údolí či krátery) zanedbáváme,
- astronaut má místo, na které se dívá (např. Velkou čínskou zeď), přímo v nadhlavníku,
- astronaut má zanedbatelnou výšku, tj. vzdálenosti „k astronautovi" vztahujeme k povrchu Měsíce,
- Velká čínská zeď má též zanedbatelnou výšku, tj. vzdálenosti „ke zdi" vztahujeme k povrchu Země,
- Měsíc je k Zemi nejblíže, tj. vzdálenost středů obou těles je $r_{\mathrm{ZM}} = 362\,600\,\mathrm{km}$.

a) Jak daleko je Velká čínská zeď od astronauta? Výsledek označ písmenem h a uveď v celých km.

Od vzdálenosti středů Země a Měsíce v přízemí (362 600 km) musíme odečíst poloměr Země a poloměr Měsíce.

$$h = r_{\mathrm{ZM}} - R_{\mathrm{Z}} - R_{\mathrm{M}}$$

$$h = 362\,600\,\mathrm{km} - 6\,378\,\mathrm{km} - 1\,738\,\mathrm{km} = 354\,484\,\mathrm{km}$$

b) Velká čínská zeď má na délku $l = 3\,500\,\mathrm{km}$ a se všemi odbočkami až $l' = 8\,850\,\mathrm{km}$. Pod jakým úhlem by její nejdelší rozměr astronaut viděl? Tento úhel označ α a uveď ho v radiánech i ve stupních *(k převodu lze použít tabulky)*. Výsledky zaokrouhli na 3 platné číslice. Neuvažuj zakřivení Země. *Nápověda: Namísto goniometrické funkce lze pro malé úhly použít* $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$, *pokud je* α *v radiánech.*

Nejdelší rozměr zdi je $l = 3\,500\,\mathrm{km}$, nikoliv $l' = 8\,850\,\mathrm{km}$.

Protože je α malý úhel, můžeme psát

$$\alpha \approx \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{l}{h}$$

$$\alpha \approx \frac{3\,500\,\mathrm{km}}{354\,484\,\mathrm{km}} \approx 0{,}009\,87\,\mathrm{rad} = 9{,}87 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad}$$

$$\alpha \approx \frac{0{,}009\,87 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 0{,}566^\circ$$

c) Porovnej úhlový rozměr Velké čínské zdi pozorované z Měsíce s úhlovou velikostí nějakého známého nebeského tělesa, které vidíme ze Země. Následně učiň závěr, jestli je možné zeď vidět z Měsíce.

Velká čínská zeď se jeví astronautovi (přibližně) stejně velká jako se nám na zemi jeví např. Měsíc nebo Slunce. K tomuto dokonce není ani úhlová velikost třeba, uvědomíme-li si, že průměr Měsíce je 3 476 km, tudíž téměř stejný jako nejdelší rozměr zdi. Měsíc přitom pozorujeme ze Země a zeď z Měsíce.

Ne, z Měsíce bychom však Velkou čínskou zeď neviděli , protože je příliš úzká.

(Popř.: Ano, z Měsíce bychom Velkou čínskou zeď viděli , kdyby byla širší.)

Krajské kolo 2017/18, prezenční, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

d) Archeologové zjistili, že se všemi odbočkami měla kdysi zeď 21 200 km a dokonce až 25 tisíc věží. Předpokládej, že jsou věže od sebe rozestoupeny rovnoměrně. Jaká je délka jednoho **mezivěžního úseku**? Tento rozměr označ L a uveď ho v km s přesností na desetiny km.

Jednoduchým dělením celkové délky počtem věží dostaneme

$$L = \frac{21\,200\,\mathrm{km}}{25\,000} \approx 0{,}8\,\mathrm{km}$$

e) Ve výbavě našeho astronauta na Měsíci je i 200mm Newtonův dalekohled. Spočítej jeho rozlišovací schopnost ve viditelné oblasti spektra, tj. s vlnovou délkou $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$. Výsledek označ θ a uveď v radiánech s přesností na 3 platné číslice.

Průměr primárního zrcadla (a tedy i vstupního otvoru) označíme $D = 200\,\mathrm{mm}$. Vzorec pro rozlišovací schopnost je např. v tabulkách.

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22\,\frac{550 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{200 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$\theta \approx 0{,}000\,003\,36\,\mathrm{rad} = 3{,}36 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad}$$

f) Převeď úhlovou rozlišovací schopnost dalekohledu na skutečnou délku na povrchu Země v okolí astronautova nadhlavníku. Tuto nejmenší dalekohledem rozlišitelnou délku označ k, uveď ji v km a zaokrouhli na desetiny km.
Nápověda: Opět lze použít vztah $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, pokud je úhel θ malý a v radiánech.

Využijeme toho, že θ je malý úhel, a píšeme

$$\theta \approx \operatorname{tg}\theta = \frac{k}{h} \quad \text{, tedy} \quad k = \theta\, h \quad \text{(pokud je } \theta \text{ v radiánech)}$$

$$k = 3{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 354\,484\,\mathrm{km} \approx 1{,}2\,\mathrm{km}$$

g) Jaký nejmenší počet **mezivěžních úseků** by náš astronaut dokázal rozlišit svým dalekohledem? Výsledek uveď jako celé číslo.

Nejmenší počet mezivěžních úseků, který překročí L, jsou **dva**.

h) Nejmenší vzdálenost, kterou by astronaut viděl pouhýma očima, by obsahovala větší nebo menší počet mezivěžních úseků než vzdálenost, kterou rozliší dalekohledem? Odpověď řádně zdůvodni bez dalších výpočtů.

Oko bez dalekohledu má menší rozlišovací schopnost než s dalekohledem, jak je vidět ve výpočtech výše. Vzdálenost, kterou by astronaut bez dalekohledu dokázal rozlišit, tedy musí obsahovat **větší** počet mezivěžních úseků, nicméně astronaut by je bez dalekohledu stejně nerozlišil, protože jsou již pod rozlišovací schopností jeho očí.