



**Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Analýza dat**

Úlohy

G 51 Pegasi b

(max. 20 bodů)

Spektroskopická měření hvězdy 51 Pegasi vedla k objevení vůbec první exoplanety. V tabulce 1 naleznete data (radiální rychlosti v_r a jejich nejistoty), která tento objev potvrdila. Hmotnost hvězdy je $M_* = 1,12 M_\odot$, poloměr $R_* = 1,2 R_\odot$ a efektivní teplota $T_* = 5\,800\text{ K}$.

Tabulka 1: Data získaná ze spektrografického pozorování hvězdy 51 Peg (Butler *et al.* 2006).

HJD	$\frac{v_r}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	nejistota $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	HJD	$\frac{v_r}{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$	nejistota $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
2450011,631285	-55,7	6,8	2450016,860336	13,1	9,1
2450011,826574	-45,6	7,0	2450017,746840	55,4	6,4
2450012,624850	21,7	7,2	2450017,858681	52,3	9,6
2450012,880313	26,0	10,0	2450018,602975	14,3	8,1
2450013,612662	52,3	6,4	2450018,754653	2,5	7,7
2450013,842350	33,0	11,0	2450018,845972	-27,0	8,1
2450014,632407	-8,8	7,4	2450019,611632	-47,6	6,5
2450014,734514	-15,6	7,4	2450019,838044	-62,2	6,0
2450014,896100	-37,6	8,8	2450020,602187	-25,3	5,6
2450015,613912	-52,5	7,2	2450020,842303	-6,0	7,5
2450015,876921	-53,8	7,8	2450020,864352	4,9	7,0
2450016,630394	-5,8	6,6	2450021,627025	60,2	6,0
2450016,750521	4,9	6,5	2450021,698472	48,9	7,6

a) Vyneste data z tabulky do grafu na příslušné milimetrové pole v odpovědním archu.

Graf vidíme na obrázku 1.

b) Z grafu určete amplitudu v_A radiální rychlosti hvězdy ($\text{v m}\cdot\text{s}^{-1}$) a periodu oběhu P (ve dnech) včetně nejistot.

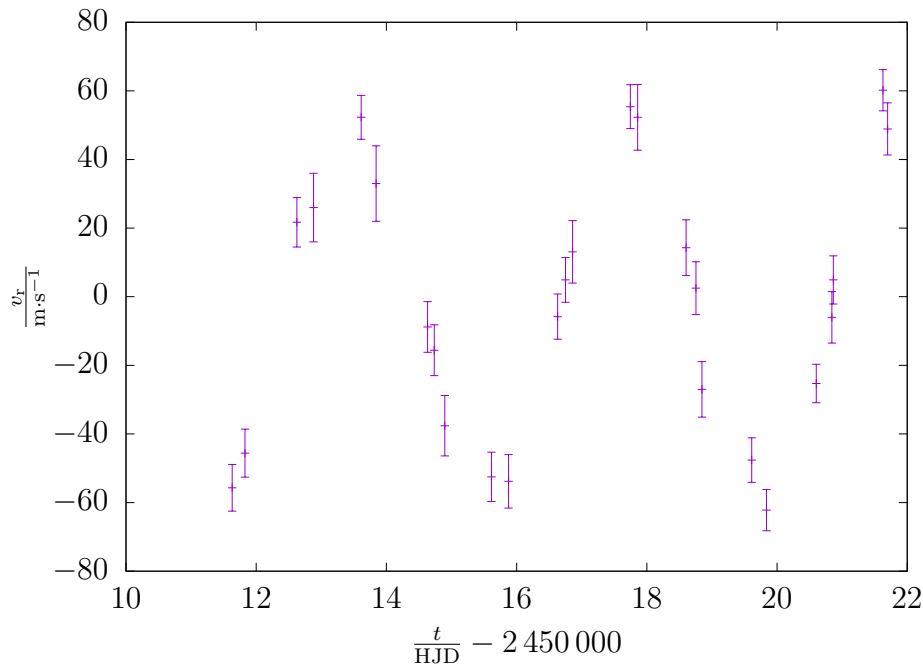
Z grafu vyčteme hodnoty

$$v_A \doteq (120 \pm 10) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1},$$

$$P \doteq (4,2 \pm 0,2) \text{ d}.$$

c) Vypočtete vzdálenost a exoplanety od mateřské hvězdy (v au) a odhadněte, jakou nejmenší hmotnost M_P (v jednotkách hmotnosti Jupitera) musí exoplaneta mít. Nezapomeňte na nejistoty. Hmotnost Jupitera je $M_J = 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$.

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Průběh radiálních rychlostí v čase včetně nejistot.

Ze 3. Keplerova zákona víme, že $a^3 = GM_* P^2 / (4\pi^2)$, odkud plyne

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_* P^2}{4\pi^2}} \doteq (0,053 \pm 0,002) \text{ au} .$$

Pro hmotnosti složek systému platí $v_* M_* = v_P M_P$. Protože ale neznáme inklinaci, o rychlosti hvězdy víme jen, že $(1/2)v_A = v_* \sin i$. Po dosazení dostáváme

$$M_P = \frac{v_A}{2 \sin i} \sqrt{\frac{a M_*}{G}} .$$

Ze vzorce je patrné, že nejnižší hmotnost dostaneme v případě, kdy $\sin i = 1$, numericky $M_P = (0,52 \pm 0,06) M_J$.

d) Odhadněte povrchovou teplotu T exoplanety. Hodnotu albeda berte $\alpha = 0,5$.

Ze Stefanova-Boltzmannova zákona dostaneme

$$T = T_* \sqrt[4]{\frac{1 - \alpha}{4} \frac{R_*^2}{a^2}} \approx 1\,000 \text{ K} .$$

Vzhledem k tomu, že se zjevně jedná o plynného obra, je výsledná vzdálenost od hvězdy a teplota přinejmenším neintuitivní. Jedno z logických vysvětlení by bylo, že se nejedná o hvězdu s exoplanetou, ale o dvojhvězdu, jejíž druhá složka je hnědý trpaslík. Víme, že těleso o hmotnosti $13 M_J$ začíná slučovat deuterium a je tedy klasifikováno jako hnědý trpaslík.

e) Odhadněte, s jakou pravděpodobností p se jedná o hnědého trpaslíka. Při výpočtu předpokládejte, že inklinace u všech oběžných soustav jsou náhodně rozdělené a zanedbejte nejistoty veličin.



Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Ze vzorce pro hmotnost planety $M_P = (v_A/2 \sin i) \sqrt{aM_*/G}$ dostáváme $M_P \geq 13 M_J$, pokud $\sin i \leq 0,040$, což nastane právě tehdy, když $i \leq \arcsin 0,040$. Protože předpokládáme, že všechny hodnoty inklinace jsou stejně pravděpodobné, dostaneme hledanou pravděpodobnost jako $p = 2,34/90 \approx 2,6\%$.

H Temný vesmír

(max. 20 bodů)

V této úloze využijeme data z pozorování supernov typu Ia (přehledky CfA3, CfA4 a Pan-STARRS) k určení poměru zastoupení hmoty a temné energie v současném vesmíru.

Uvažujme, že náš vesmír je plochý a obsahuje pouze hmotu a temnou energii (celková hustota $\rho = \rho_m + \rho_\Lambda$ látky je tedy rovna kritické hustotě $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$). Označme $\Omega_{m,0} = \rho_{m,0}/\rho_{c,0}$, $\Omega_{\Lambda,0} = \rho_{\Lambda,0}/\rho_{c,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ současné podíly hustoty hmoty, resp. temné energie na kritické hustotě a H_0 současnou hodnotu Hubbleova parametru. Pro hvězdnou velikost m (opravenou o extinkci) zdroje s kosmologickým červeným posuvem z a absolutní hvězdnou velikostí M potom platí

$$m - \mathcal{M} = 5 \log \frac{\mathcal{D}_L(z)}{\text{km} \cdot \text{s}^{-1}},$$

kde $\mathcal{M} = M - 5 \log \frac{H_0}{\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}} + 25$ a pro malá z platí

$$\mathcal{D}_L(z) \approx cz \left[1 + \left(1 - \frac{3}{4} \Omega_{m,0} \right) z \right].$$

V tabulce 2 vidíme data z pozorování vybraných supernov typu Ia (kosmologický červený posuv z a kalibrovaná¹ hvězdná velikost m_B maxima světelné křivky ve filtru B).

a) Pro každou supernovu vypočítejte hodnotu $10^{0,2m_B}/(cz/\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$. Výsledky zanepte do příslušné tabulky v odpovědním archu.

Viz tabulka 3.

b) Vyneste hodnoty $10^{0,2m_B}/(cz/\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$ do grafu v závislosti na z . Využijte k tomu předpřipravené milimetrové pole v odpovědním archu.

Graf vidíme na obrázku 2.

V následujících úkolech předpokládejte, že všechny supernovy typu Ia mají stejnou absolutní hvězdnou velikost.

c) Určete graficky hodnoty parametrů \mathcal{M} , $\Omega_{m,0}$ a $\Omega_{\Lambda,0}$. Odhadněte jejich nejistoty.

Ze zadaných vztahů máme

$$\frac{10^{0,2m}}{cz} = \frac{10^{0,2\mathcal{M}}}{\text{km} \cdot \text{s}^{-1}} \left[1 + \left(1 - \frac{3}{4} \Omega_{m,0} \right) z \right].$$

¹Kalibrační proces zahrnuje mj. opravu o galaktickou extinkci a (pro supernovy s velkým z) převod do filtru B z instrumentálního filtru (typicky R, I).



Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

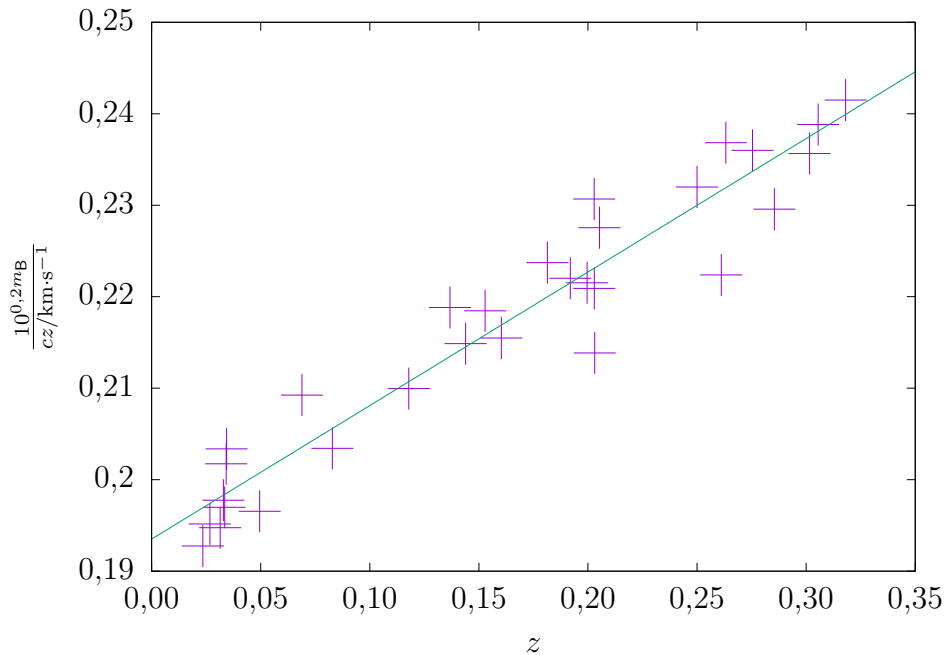
Tabulka 2: Data z pozorování vybraných supernov typu Ia (Scolnic *et al.* 2018).

SN	z	$\frac{m_B}{\text{mag}}$	SN	z	$\frac{m_B}{\text{mag}}$
2422	0,26318	21,35760	80646	0,31811	21,81160
8921	0,14393	19,83575	110460	0,19958	20,61175
12898	0,08286	18,51790	370595	0,18141	20,42600
13689	0,24999	21,20115	440005	0,30549	21,69950
14212	0,20284	20,73490	440050	0,28546	21,46645
15132	0,15286	20,00240	2008bw	0,03348	16,48020
15203	0,20291	20,64165	1999cc	0,03144	16,31895
15440	0,26110	21,20360	2000cn	0,02348	15,66265
16259	0,11787	19,35185	2003cq	0,03416	16,57565
16276	0,19190	20,53150	2006cq	0,04949	17,32405
17825	0,16031	20,07605	6D4dh	0,30158	21,64245
18602	0,13679	19,76485	1997dg	0,03438	16,60710
19913	0,20532	20,73155	2001gb	0,02673	15,97105
20227	0,27540	21,44850	2006on	0,06888	18,17780
20581	0,20311	20,57340	2006te	0,03292	16,45200

Tabulka 3: Vypočtené hodnoty $10^{0,2m_B}/(cz/\text{km} \cdot \text{s}^{-1})$ pro jednotlivé supernovy.

SN	z	$\frac{m_B}{\text{mag}}$	$\frac{10^{0,2m_B}}{cz/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$	SN	z	$\frac{m_B}{\text{mag}}$	$\frac{10^{0,2m_B}}{cz/\text{km} \cdot \text{s}^{-1}}$
2422	0,26318	21,35760	0,23684	80646	0,31811	21,81160	0,24150
8921	0,14393	19,83575	0,21487	110460	0,19958	20,61175	0,22152
12898	0,08286	18,51790	0,20343	370595	0,18141	20,42600	0,22373
13689	0,24999	21,20115	0,23200	440005	0,30549	21,69950	0,23883
14212	0,20284	20,73490	0,23068	440050	0,28546	21,46645	0,22957
15132	0,15286	20,00240	0,21846	2008bw	0,03348	16,48020	0,19699
15203	0,20291	20,64165	0,22091	1999cc	0,03144	16,31895	0,19475
15440	0,26110	21,20360	0,22238	2000cn	0,02348	15,66265	0,19276
16259	0,11787	19,35185	0,20996	2003cq	0,03416	16,57565	0,20174
16276	0,19190	20,53150	0,22203	2006cq	0,04949	17,32405	0,19655
17825	0,16031	20,07605	0,21549	6D4dh	0,30158	21,64245	0,23565
18602	0,13679	19,76485	0,21882	1997dg	0,03438	16,60710	0,20337
19913	0,20532	20,73155	0,22754	2001gb	0,02673	15,97105	0,19516
20227	0,27540	21,44850	0,23600	2006on	0,06888	18,17780	0,20924
20581	0,20311	20,57340	0,21386	2006te	0,03292	16,45200	0,19775

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 2: Závislost hodnot $10^{0,2m_B} / (cz / \text{km} \cdot \text{s}^{-1})$ na z pro jednotlivé supernovy.

Pokud tedy grafem z předchozí podúlohy proložíme přímkou $\alpha + \beta z$, můžeme hodnotu parametru $10^{0,2\mathcal{M}}$ odečíst jako průsečík α této přímky s vertikální osou, zatímco hodnotu parametru $10^{0,2\mathcal{M}} \left(1 - \frac{3}{4}\Omega_{m,0}\right)$ odečteme jako směrnici β . Číselně dostaneme $\mathcal{M} \doteq (-3,57 \pm 0,02)$ mag, $\Omega_{m,0} \doteq 0,33 \pm 0,06$ a $\Omega_{\Lambda,0} \doteq 0,67 \pm 0,06$.

d) Za předpokladu, že absolutní hvězdná velikost ve filtru B supernov typu Ia v maximu činí $M_B = -19,44$ mag, určete hodnotu H_0 . Odhadněte její nejistotu.

Máme $H_0 = 10^{-0,2(\mathcal{M}-M_B-25)} \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} \doteq (67 \pm 1) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.