



Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ)

**E Kocourkovská vesmírná agentura**

(max. 25 bodů)

Obyvatelé Kocourkova se rozhodli vypustit svou meziplanetární sondu na cestu k Marsu. V první fázi sondu vynesli na kruhovou oběžnou dráhu okolo Země ve výšce  $h = 10\,000$  km, kde čekala na vhodný okamžik k odletu. Ten nastane v okamžiku, kdy bude mít sonda nejvyšší možnou heliocentrickou rychlost. Předpokládejte, že Země obíhá Slunce po kružnici.

a) Vypočítejte velikost  $v_G$  (v  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) geocentrické kruhové oběžné rychlosti sondy.

b) Jaké nejvyšší heliocentrické rychlosti  $v_H$  (v  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ ) může sonda dosáhnout?

V okamžiku, kdy dosáhla své nejvyšší heliocentrické rychlosti, zažehla sonda své motory, aby zvýšila svou rychlost, a odletěla ke vzdáleným planetám. Protože však kocourkovští technici tento manévř špatně vypočítali, bylo v okamžiku manévru sondě k dispozici pouze  $\mu = 77$  kg paliva. Rychlost výtoku zplodin je  $v_e = 5\,000$   $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

c) O jakou maximální hodnotu  $\Delta v$  (v  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) se změní velikost rychlosti sondy po provedení manévru? Změnu hmotnosti sondy zanedbejte: po celou dobu manévru počítejte s hmotností  $m = 2\,500$  kg.

Téměř ihned po provedení manévru navíc došlo k neočekávané chybě, která měla za následek snížení rychlosti sondy na  $v = 3$   $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$  vzhledem k Zemi, aniž by se změnil její směr. V důsledku toho se začala sonda pohybovat po eliptické dráze okolo středu Země.

d) Jakého největšího přiblížení  $r_{\min}$  (v km) ke středu Země by sonda na této dráze teoreticky mohla dosáhnout?

*Nápověda:* Celková mechanická energie tělesa o hmotnosti  $m$  obíhajícího v centrálním gravitačním poli gravitujícího tělesa o hmotnosti  $M$  je  $E = -\frac{GMm}{2a}$ , kde  $a$  je velká poloosa oběžné dráhy.

Z výsledku podúlohy d) plyne, že sonda při pohybu na této dráze narazí do Země.

e) Pod jakým úhlem  $\alpha$  dopadla sonda na zemský povrch? Efekty atmosféry zanedbejte. Úhel  $\alpha$  měříme od roviny tečné k povrchu Země.



**Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ)**

**F Studium hvězdokupy**

*(max. 25 bodů)*

Uvažujme kulovou hvězdokupu NGC 6397 (souhvězdí Oltáře) o pozorované vizuální hvězdné velikosti  $m_H = 5,17$  mag a úhlovém průměru  $\theta = 4,7'$ . V roce 2018 se týmu vědců ze STScI (Space Telescope Science Institute) podařilo změřit její paralaxu  $\pi = 0,42$  mas ( $1 \text{ mas} = 10^{-3}$  úhl. vteřiny). Předpokládejte, že hvězdy v hvězdokupě jsou všechny v průměru podobné Slunci.

- Určete vzdálenost  $r$  hvězdokupy NGC 6397 v pc.
- Určete přibližně, kolik hvězd  $N$  tvoří tuto hvězdokupu.
- Určete přibližně únikovou rychlost  $v_{\text{esc}}$  z hvězdokupy (v  $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

Předpokládejte nyní, že hvězdy v hvězdokupě jsou rovnoměrně rozprostřeny uvnitř kruhové oblasti o úhlovém průměru  $\theta$ .

- Jaký nejmenší průměr  $D$  (v cm) musí mít dalekohled, který by (teoreticky) rozlišil jednotlivé hvězdy v hvězdokupě? Uvažujte, že pozorujeme na vlnové délce  $\lambda = 550$  nm.
- Vypočtěte, jakou hvězdnou velikost  $\mu$  má oblast hvězdokupy o ploše  $1 \text{ arcsec}^2$ . Můžeme tuto hvězdokupu pozorovat z centra Melbourne, kde jas oblohy dosahuje  $18 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-2}$ ?