Finále 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Prossima fermata

(max. 10 bodů)

Vypočtěte, kolikrát větší (nebo menší) než na Zemi je hodnota „solární" konstanty na exoplanetě Proxima Centauri b (jejíž perioda oběhu činí 11 d). Víte, že hvězda Proxima Centauri je 1,9krát chladnější, 6,5krát menší a 8,2krát méně hmotná než Slunce. Solární konstantou rozumíme výkon I dopadající na jednotku plochy kolmé na spojnici ke zdroji (v dané vzdálenosti d od zdroje).

Pro zářivý výkon platí $L \propto R^2T^4$ (kde R je poloměr hvězdy a T je její efektivní povrchová teplota), takže pro hustotu zářivého toku ve vzdálenosti d od hvězdy máme $I \propto L/d^2 \propto R^2T^4/d^2$. Konečně, ze 3. Keplerova zákona máme $d^3 \propto MP^2$, kde M je hmotnost hvězdy a P je perioda oběhu planety. Celkově tedy dostáváme

$$I \propto R^2T^4M^{-\frac{2}{3}}P^{-\frac{4}{3}}\,.$$

Číselně

$$\frac{I_{\text{Proxima Cen b}}}{I_{\text{Země}}} = (6{,}5)^{-2}(1{,}9)^{-4}(8{,}2)^{\frac{2}{3}}(365/11)^{\frac{4}{3}} \doteq 0{,}79\,.$$

Hodnota „solární" konstanty na Proximě Centauri b je tedy 1,3krát menší než na Zemi.

B Astronomie ze života

(max. 10 bodů)

Začínající opavský astronom si na zahradě postavil svůj první dalekohled Keplerovy konstrukce. Dalekohled má průměr $D = 8\,\text{cm}$ a ohniskovou vzdálenost objektivu $f = 100\,\text{cm}$. Jaký nejmenší může být fyzický průměr l (v km) kráteru na Měsíci, aby ho byl astronom schopen rozlišit? Pokud by odmontoval okulár, jaká by byla velikost s (v cm) Měsíce v obrazové rovině? Vzdálenost Měsíce od Země uvažujte $a_\text{M} = 384\,000\,\text{km}$, průměr Měsíce je $D_\text{M} = 3\,474\,\text{km}$. Vlnová délka viditelného světla je $\lambda = 500\,\text{nm}$.

K vyřešení první otázky využijeme Rayleigho kritérium $\theta = 1{,}22\lambda/D$ pro nejmenší úhlovou vzdálenost θ směrů, které dokáže dalekohled rozlišit. Pro úhlovou vzdálenost zároveň platí $\theta \approx l/a_\text{M}$, kde a_M označuje vzdálenost Měsíce od Země. Porovnáním vztahů dostáváme

$$l = 1{,}22\lambda a_\text{M}/D \doteq 2{,}9\,\text{km}\,,$$

kde jsme použili hodnoty $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$ a $a_\text{M} = 384\,000\,\text{km}$. Pro řešení druhé otázky si stačí uvědomit, že Měsíc je v podstatě v „nekonečnu", tedy že se zobrazí do ohniskové roviny a není potřeba použít zobrazovací rovnici. Dále využijeme toho, že tenká čočka, kterou modelujeme čočku objektivu, nemění směr paprsků jdoucích optickým středem. To znamená, že z pohledu optického středu čočky, je prostorový úhel Měsíce a jeho obrazu stejný. Z toho plyne

$$s = f\theta_\text{M} = fD_\text{M}/a_\text{M} = 0{,}009f \doteq 0{,}9\,\text{cm}\,.$$

C Neznámý objekt

(max. 10 bodů)

Vypočtěte siderickou oběžnou dobu T_{sid} (ve dnech) a velkou poloosu a (v au) objektu, který obíhá kolem Slunce v rovině ekliptiky a prochází opozicí jednou za 290 d.

Pokud pro objekt nastávají opozice (tedy jeho oběžná dráha leží vně zemské) a zároveň je interval mezi dvěma po sobě jdoucími opozicemi (synodická oběžná doba T_{syn}) menší než oběžná perioda Země T_{Z}, znamená to, že objekt obíhá po retrográdní dráze. V takovém případě platí

$$\frac{1}{T_{\mathrm{syn}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{sid}}} + \frac{1}{T_{\mathrm{Z}}}\,,$$

a tedy

$$T_{\mathrm{sid}} = \frac{T_{\mathrm{syn}} T_{\mathrm{Z}}}{T_{\mathrm{Z}} - T_{\mathrm{syn}}}\,.$$

Číselně dostáváme $T_{\mathrm{sid}} \doteq 1\,408\,\mathrm{d}$. Pro velkou poloosu pak máme $a/\mathrm{au} = (T_{\mathrm{sid}}/T_{\mathrm{Z}})^{2/3}$, a tedy $a \doteq 2{,}46\,\mathrm{au}$.

D Návrat vzorků

(max. 10 bodů)

Jakou rychlostí v (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) by do zemské atmosféry vstoupila schránka s materiálem vyslaná po (prográdní) Hohmannově elipse z Jupiterova měsíce Europa? Oběžné dráhy Země i Jupitera považujte za kruhové. Připomínáme, že hlavní vrcholy (apsidy) Hohmannovy elipsy jsou určeny polohami výchozího a cílového objektu.

Ze zákona zachování energie můžeme pro velikost v rychlosti vstupu schránky do atmosféry psát

$$v^2 - (v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{Z}})^2 = \frac{2GM_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}}\,,$$

kde $v_{\mathrm{Z}} = \sqrt{GM_\odot/a_{\mathrm{Z}}}$ je oběžná rychlost Země ve své dráze kolem Slunce a v_{p} je rychlost schránky v perihelu Hohmannovy elipsy, tedy (opět ze zákona zachování energie)

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_{\mathrm{p}}} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_{\mathrm{J}} + a_{\mathrm{Z}}}\frac{a_{\mathrm{J}}}{a_{\mathrm{Z}}}}\,,$$

kde jsme dosadili $r_{\mathrm{p}} = a_{\mathrm{Z}}$ a $a = (a_{\mathrm{Z}} + a_{\mathrm{J}})/2$. Celkově dostáváme

$$v^2 = \frac{2GM_{\mathrm{Z}}}{R_{\mathrm{Z}}} + \frac{GM_\odot}{a_{\mathrm{Z}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)^2,$$

kde jsme označili $x = a_{\mathrm{J}}/a_{\mathrm{Z}}$. Číselně máme $v \doteq 14{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

Finále 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Dlouhé úlohy

E Hraničně pozorovatelné hvězdy

(max. 20 bodů)

Uvažujme trojici hvězd A, B, C, která má následující vlastnosti:

1. hvězda A je z hvězdy B viditelná sotva pouhým okem,
2. hvězda B je z hvězdy C viditelná sotva pouhým okem,
3. hvězda C je z hvězdy A viditelná sotva pouhým okem.

Vzdálenost mezi hvězdami A, B označme d_1, vzdálenost mezi hvězdami B, C označme d_2, vzdálenost mezi hvězdami C, A označme d_3. Pro číselné výpočty předpokládejte hodnoty absolutních hvězdných velikostí $M_\mathsf{A} = 2\,\mathrm{mag}$ a $M_\mathsf{B} = 3\,\mathrm{mag}$. Jako hranici pozorovatelnosti hvězdy pouhým okem berte hodnotu 6 mag.

a) Vypočítejte číselně vzdálenosti d_1 a d_2 (v pc).

Z Pogsonovy rovnice pro jednotlivé vzdálenosti dostáváme $d_1 = 10^{(11-M_\mathsf{A})/5}\,\mathrm{pc} \doteq 63\,\mathrm{pc}$ a $d_2 = 10^{(11-M_\mathsf{B})/5}\,\mathrm{pc} \doteq 40\,\mathrm{pc}$.

b) Nalezněte interval (číselně v mag), ve kterém se musí nacházet absolutní hvězdná velikost M_C tak, aby taková trojice hvězd mohla existovat.

Nápověda: Použijte trojúhelníkovou nerovnost.

Aby taková trojice hvězd mohla existovat, musí pro vzdálenosti mezi nimi platit trojúhelníková nerovnost. Pro minimální, resp. maximální vzdálenost d_3 píšeme $d_{3,\min} = d_1 - d_2$, resp. $d_{3,\max} = d_1 + d_2$. Pro minimální, resp. maximální absolutní hvězdnou velikost M_C pak máme

$$M_{\mathsf{C},\min} = 11 - 5\log d_{3,\min} = 11 - 5\log\left(10^{(11-M_\mathsf{A})/5} - 10^{(11-M_\mathsf{B})/5}\right) \doteq 4{,}2\,\mathrm{mag}\,,$$

$$M_{\mathsf{C},\max} = 11 - 5\log d_{3,\max} = 11 - 5\log\left(10^{(11-M_\mathsf{A})/5} + 10^{(11-M_\mathsf{B})/5}\right) \doteq 0{,}9\,\mathrm{mag}\,.$$

c) Za předpokladu, že $M_\mathsf{C} = 4\,\mathrm{mag}$, nalezněte velikost největšího úhlu γ v tomto hvězdném trojúhelníku.

Platí $L_\mathsf{A} > L_\mathsf{B} > L_\mathsf{C}$, a tedy $d_1 > d_2 > d_3$. Největší úhel v trojhelníku tedy spočteme jako

$$\gamma = \arccos \frac{\left(10^{(11-M_\mathsf{B})/5}\right)^2 + \left(10^{(11-M_\mathsf{C})/5}\right)^2 - \left(10^{(11-M_\mathsf{A})/5}\right)^2}{2\cdot\left(10^{(22-M_\mathsf{B}-M_\mathsf{C})/5}\right)}\,.$$

Číselně $\gamma \doteq 150°$.

d) Ukažte, že pokud změníme hodnoty absolutních hvězdných velikostí hvězd A, B, C tak, že jejich rozdíly zůstanou stejné, nezmění se ani vnitřní úhly hvězdného trojúhelníku.

Pro zachování úhlů stačí ukázat, že všechny takové trojúhelníky si jsou podobné. Podobnost trojúhelníků dokážeme, pokud zachovávají stejný poměr stran. To lze vidět velice snadno, neboť

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{10^{(11-M_\mathsf{B})/5}}{10^{(11-M_\mathsf{A})/5}} = 10^{-(M_\mathsf{B}-M_\mathsf{A})/5}\,,$$

a zároveň

$$\frac{d_3}{d_2} = \frac{10^{(11-M_\mathsf{C})/5}}{10^{(11-M_\mathsf{B})/5}} = 10^{-(M_\mathsf{C}-M_\mathsf{B})/5}\,.$$

F Hvězda na cestách

(max. 20 bodů)

Hvězda τ Ceti je jedna z nejbližších hvězd, která je svými parametry velmi podobná Slunci. S velkou pravděpodobností se navíc jedná o osamocenou hvězdu. Tuto hvězdu na obloze nalezneme na souřadnicích $\delta = -15^\circ\,56'\,14{,}93''$ a $\alpha = 1^\mathrm{h}\,44^\mathrm{m}\,4{,}08^\mathrm{s}$. Pozorováním této hvězdy bylo určeno, že její paralaxa je $\pi = 0{,}274\,2''$ a její vlastní pohyb po obloze činí $\mu_\alpha = -1\,721{,}05\,\mathrm{mas\cdot y^{-1}}$ v rektascenzi a $\mu_\delta = 854{,}16\,\mathrm{mas\cdot y^{-1}}$ v deklinaci.

a) Vypočtěte vzdálenost r hvězdy od Slunce (v pc).

Pro vzdálenost hvězdy v parsecích a paralaxu platí vztah $r = \frac{\mathrm{arcsec}}{\pi}\,\mathrm{pc} \doteq 3{,}65\,\mathrm{pc}$.

b) Vypočtěte složky v_α a v_δ (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) tečné rychlosti, která odpovídá vlastnímu pohybu hvězdy.

Pro úhlové rychlosti platí vztah $v = \omega r$. Po převedení úhlových rychlostí na radiány tedy dostaneme $v_\delta = \mu_\delta r \doteq 14{,}78\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a $v_\alpha = \mu_\alpha r\cos\delta \doteq -28{,}63\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

V den konání teoretické části finále astronomické olympiády (9. května 2019) byl spektrografickým pozorováním hvězdy τ Ceti z povrchu Země zjištěn modrý posuv $z = -0{,}000\,096$.

c) Určete, s jakou rychlostí v_{rZ} (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) se hvězda v okamžiku měření přibližovala k Zemi.

Rychlost z modrého posuvu určíme pomocí vzorce $v_{\mathrm{rZ}} = cz \doteq -28{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

d) Určete ekliptikální souřadnice $\beta_\odot, \lambda_\odot$ Slunce v den pozorování.

Ekliptikální šířka Slunce je po celý rok $\beta_\odot = 0^\circ$. Pozorování se odehrává 49 dní po rovnodennosti, ekliptikální délka Slunce tedy bude $\lambda_\odot \doteq 48{,}3^\circ$.

e) Vypočtěte ekliptikální souřadnice β, λ hvězdy. Sklon rovníku k rovině ekliptiky je $\varepsilon = 23{,}5^\circ$ a severní ekliptikální pól má rektascenzi 18^h.

Nápověda: Pro sférický trojúhelník ABC se stranami úhlových velikostí a, b, c a vnitřními úhly velikostí α, β, γ platí sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}$$

a kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha\,.$$

Finále 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Vyjdeme ze sférické kosinové věty

$$\cos(90° - \beta) = \cos(90° - \delta)\cos\varepsilon + \sin(90° - \delta)\sin\varepsilon\cos(\alpha + 90°)\,.$$

Toto lze upravit na $\sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$, odkud dostaneme ekliptikální šířku hvězdy $\beta \doteq -24{,}8°$. Ze sférické sinové věty dostaneme ekliptikální délku. Máme

$$\frac{\sin(\lambda - 90°)}{\sin(90° - \delta)} = \frac{\sin(\alpha + 90°)}{\sin(90° - \beta)}\,,$$

a tedy

$$\cos\lambda = \frac{\cos\delta\cos\alpha}{\cos\beta}\,.$$

Číselně $\lambda \doteq 17{,}8°$.

f) Vypočítejte, s jakou rychlostí v_r (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) se hvězda přibližuje ke Slunci.

Od rychlosti vůči Zemi musíme vhodným způsobem odečíst pohyb Země. Pro rychlosti tedy bude platit

$$v_\mathrm{r}^2 = (v_\mathrm{rZ}\sin\beta)^2 + [v_\mathrm{rZ}\cos\beta - v_\mathrm{Z}\sin(\lambda_\odot - \lambda)]^2\,,$$

Uvažujeme-li $v_\mathrm{Z} = 29{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, dostáváme číselně $v_\mathrm{r} \doteq -16{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

g) Určete velikost v rychlosti (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$), se kterou se hvězda pohybuje vzhledem ke Slunci.

Složky rychlosti v_α, v_δ a v_r jsou navzájem kolmé, platí tedy

$$v = \sqrt{v_\alpha^2 + v_\delta^2 + v_\mathrm{r}^2} \doteq 36{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

h) Určete, na jakou nejmenší vzdálenost r_min (v pc) se τ Ceti ke Slunci přiblíží.

V nejbližším bodě bude vektor rychlosti kolmý na spojnici Slunce a τ Ceti, z pravoúhlého trojúhelníku tedy dostáváme

$$r_\mathrm{min} = \frac{r\sqrt{v_\alpha^2 + v_\delta^2}}{v} \doteq 3{,}26\,\mathrm{pc}\,.$$