

**Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)****Identifikace**

Nezapomeňte na každý list dolů napsat svoje jméno. Neoznačené listy nebudou opraveny!

**Student**

jméno: \_\_\_\_\_ příjmení: \_\_\_\_\_

email: \_\_\_\_\_

**Škola**

název: \_\_\_\_\_

město: \_\_\_\_\_

PSČ: \_\_\_\_\_

**Hodnocení****A** \_\_\_\_\_ **B** \_\_\_\_\_ **C** \_\_\_\_\_ **D** \_\_\_\_\_ **Σ** (100 b.) \_\_\_\_\_

Účast v AO se řídí organizačním řádem. Spolu s propozicemi aktuálního ročníku je k nalezení na [olympiada.astro.cz](http://olympiada.astro.cz).

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítáme vás u řešení úloh krajského kola kategorie AB 22. ročníku Astronomické olympiády!

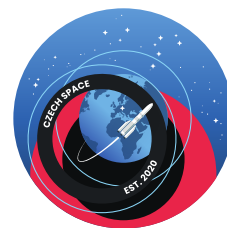
Stejně jako v minulých letech na vás čeká přehledový online test (úloha A), dvě teoretické úlohy (B a C) a jedna praktická (úloha D). Vaše řešení budete i letos odevzdávat elektronicky skrze webové rozhraní.

Neformální dění okolo olympiády můžete sledovat na naší [Facebookové stránce](#) a také na [Instagramu](#). Prostřednictvím zpráv je zde možné klást dotazy přímo Ústřední komisi.

I letos stojí za to si připomenout celou řadu astronomických událostí a pokud tak učiníte kliknutím na přiložené odkazy, jistě se něco zajímavého dozvíte! Některé se staly inspirací pro zadání úloh tohoto kola:

- letos uplynulo 100 let od publikování původních prací popisujících [Rossiterův-McLaughlinův jev](#),
- 4. dubna 2024 uplynulo 110 let od narození českého astrofyzika [Zdeňka Kopala](#), který se mj. zabýval [matematickým modelováním Rossiterova-McLaughlinova jevu](#),
- 13. května 2025 uplyne 90 let od narození amerického kosmologa [Davida Todda Wilkinsona](#), který se významnou měrou podílel na experimentálních studiích [kosmického mikrovlnného pozadí](#).

V roce 2024 byl zahájen národní projekt **Česká cesta do vesmíru**, jehož cílem je mimo jiné podnítit zájem žáků a studentů o studium technických a přírodovědných oborů. V rámci spolupráce tak najdete i v Astronomické olympiádě některé zajímavé otázky či úlohy, které se projektu týkají. Více se můžete dozvědět na webu <https://www.vzhurudovesmiru.cz/>, kde najdete řadu dalších zajímavých soutěží a výzev, do kterých se můžete zapojit!



Přejeme vám bystrou mysl a mnoho příjemných chvil při řešení všech úloh! ☺

Ústřední komise Astronomické olympiády

**Důležité kontakty:**

- Internetové stránky a e-mail Astronomické olympiády:  
<https://olympiada.astro.cz>, [olympiada@astro.cz](mailto:olympiada@astro.cz)
- Webová adresa se základními pokyny ke krajskému kolu:  
<https://olympiada.astro.cz/aktualni-rocnik/krajske-kolo>

**Termín odeslání:** 24. 1. 2025

Celkem lze v krajském kole získat maximálně **100 bodů**. Do celostátního kola postupuje 20 nejlepších řešitelů krajských kol, **kterí získali nenulový počet bodů z praktické úlohy D**.

**Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)****A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

**POKYNY:** Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz>. Přihlašovací údaje získají úspěšní řešitelé školního kola e-mailem nebo je dostanou od svého učitele. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **17. 1. 2025** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

**B Rossiterův-McLaughlinův jev***(max. 20 bodů)*

Jelikož exoplanety září pouze odraženým světlem a nachází se typicky úhlově velmi blízko svých mateřských hvězd, je velmi obtížné je pozorovat přímo – jsou hvězdami jednoduše přezářeny. Většinu dosud známých exoplanet tudíž astronomové detekovali nepřímými metodami, které jsou veskrze založené na pozorování změn záření, které k nám přichází od jejich mateřských hvězd – ať už se jedná např. o *metodu radiálních rychlostí* (změny vlnové délky) nebo o *metodu tranzitů* (změny intenzity).

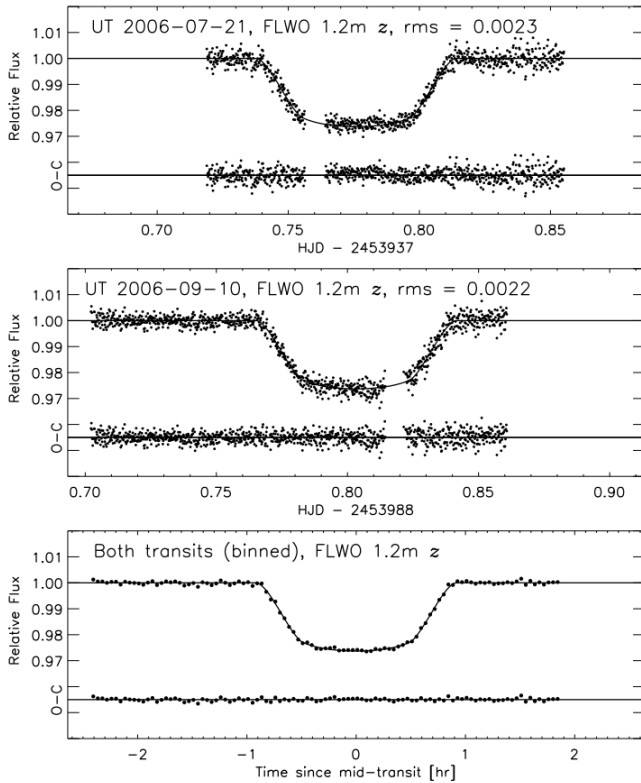
V následujících úkolech se přesvědčíme, že přítomnost exoplanety lze naopak využít k nepřímému odvození některých charakteristik hvězdy, okolo které exoplaneta obíhá. Výsledkem naší analýzy – založené na tzv. *Rossiterově-McLaughlinově jevu* – bude určení rychlosti rotace centrální hvězdy kolem její osy a rovněž určení orientace této rotační osy vůči rovině oběhu exoplanety. Obecné výsledky budeme průběžně aplikovat na případ dvou konkrétních exoplanet: HD 189733A b a WASP-15 b, které své mateřské hvězdy obíhají s periodami 53,246 h, resp. 90,050 h. V celé úloze budeme předpokládat, že exoplanety kolem hvězdy obíhají po přesně kruhových trajektoriích a budeme zanedbávat komplikace spojené s okrajovým ztemněním disku hvězdy a diferenciální rotací.

Začneme s vytěžováním světelné křivky tranzitu exoplanety, neboli změn pozorované jasnosti mateřské hvězdy, ke kterým dochází při přechodu exoplanety přes disk hvězdy. Tranzity pozorujeme, je-li orbitální inklinace  $i$  (úhel mezi rovinou oběhu exoplanety a rovinou kolmou na směr k pozorovateli) přibližně rovna  $90^\circ$ . Světelné křivky zobrazující tranzity exoplanet HD 189733A b a WASP-15 b vidíme na obrázku 1.

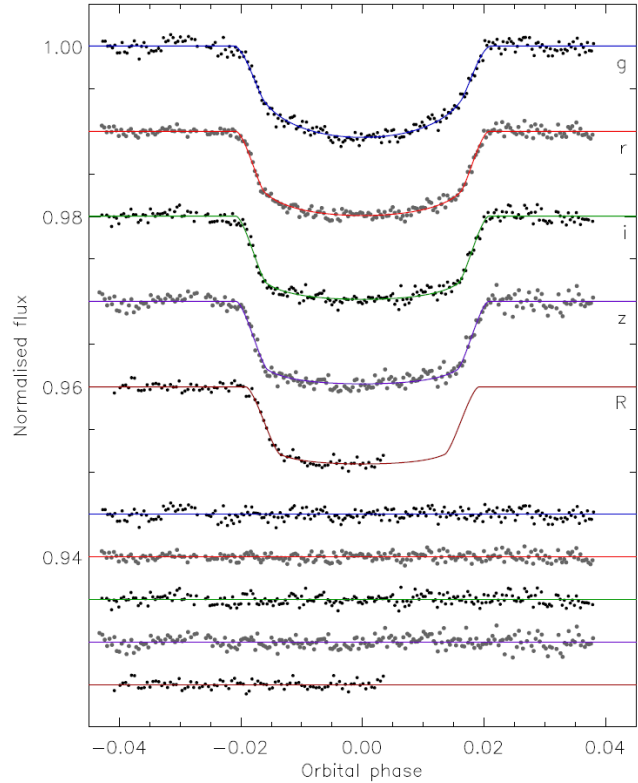
**a)** Využijte hloubku  $D$  tranzitu (relativní pokles příchozí intenzity záření v ploché části tranzitu vůči příchozí intenzitě záření od nezakryté hvězdy) k určení poměru  $R_p/R_*$  poloměru  $R_p$  exoplanety a  $R_*$  hvězdy. Hloubku  $D$  a poměr  $R_p/R_*$  vyčíslíte pro exoplanety HD 189733A b a WASP-15 b. [**3 b**]

Při obecném tranzitu nemusí trajektorie exoplanety procházet přesně přes střed disku hvězdy: jinými slovy, orbitální inklinace  $i$  exoplanety se může mírně lišit od  $90^\circ$ . Pro popis geometrie tranzitu zavádíme tzv. *impaktní parametr*  $b$ , který je definován jako promítnutá vzdálenost trajektorie exoplanety od středu disku v jednotkách  $R_*$ . Není těžké se přesvědčit, že platí vztah  $b = a_p \cos i / R_*$ , kde  $a_p$  je poloměr oběžné dráhy exoplanety. Parametr  $b$  se nyní pokusíme určit na základě měření časů  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  a  $t_3$  tzv. *kontaktů* disku exoplanety s diskem hvězdy. Definice impaktního parametru  $b$  a kontaktů jsou ilustrovány na obrázku 2.

## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

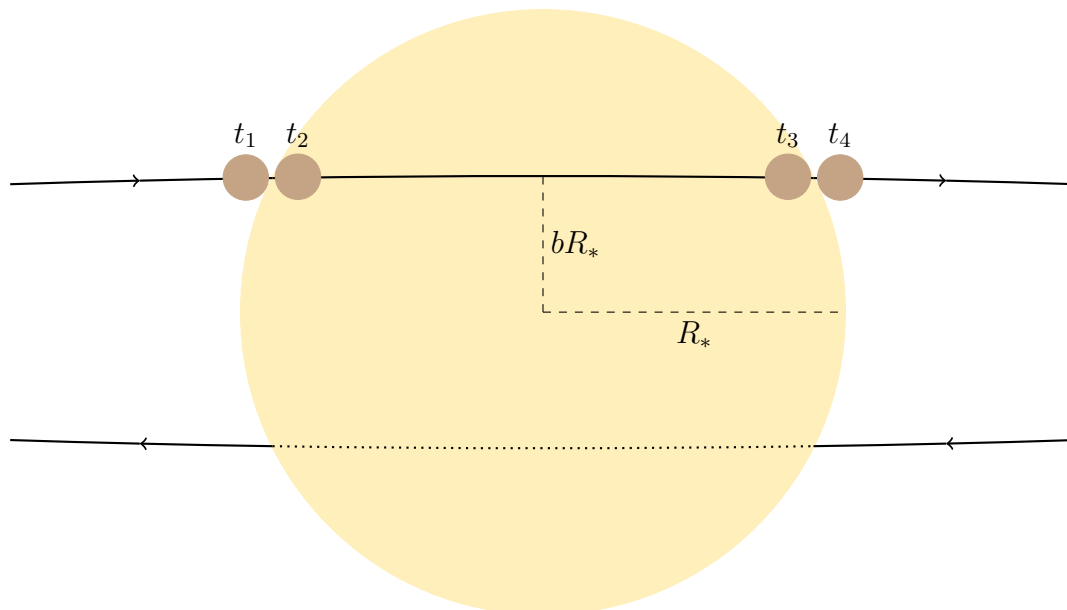


(a) HD 189733A b



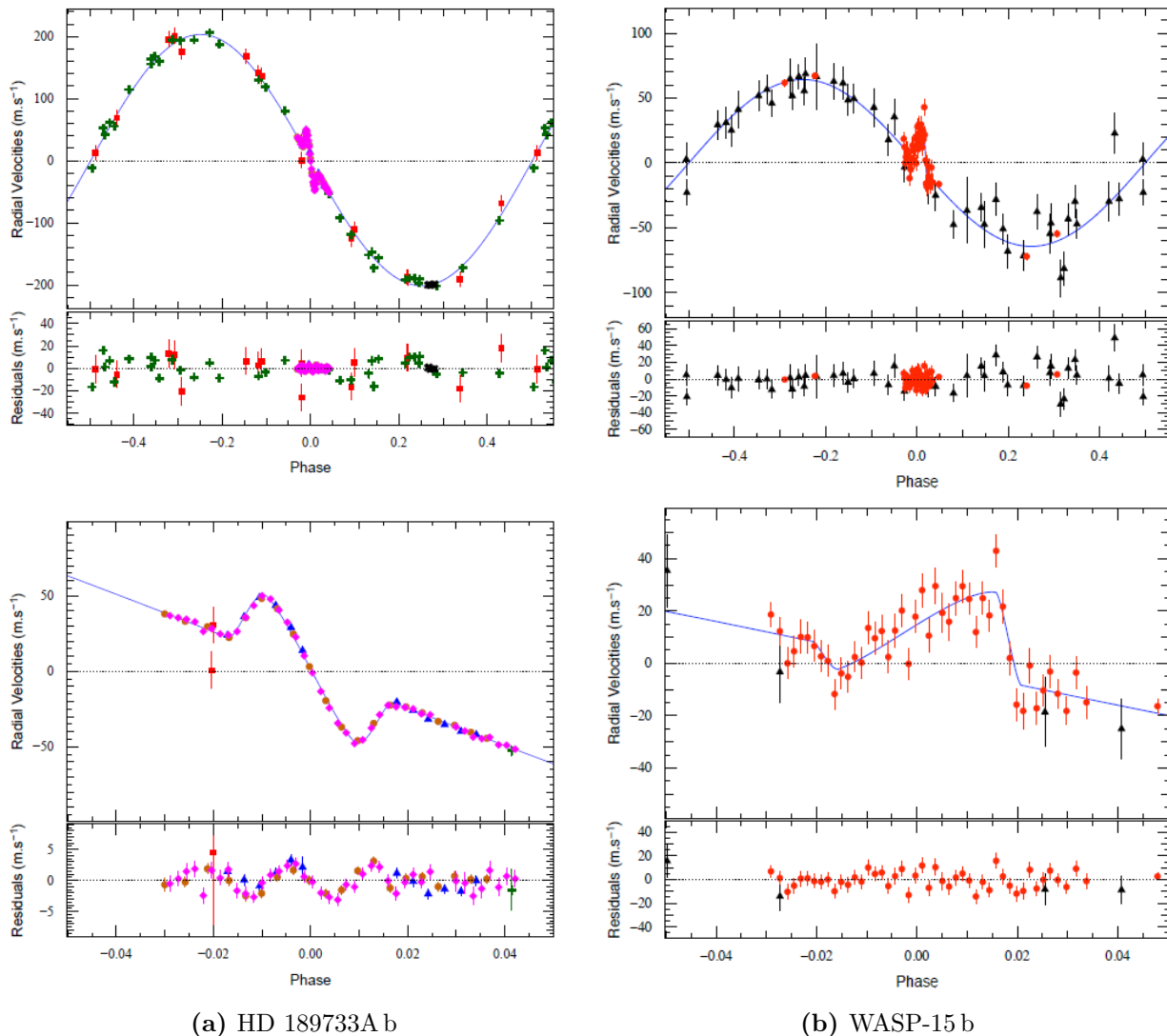
(b) WASP-15 b

**Obrázek 1:** Fotometrie tranzitů exoplanet HD 189733A b a WASP-15 b. Zdroje: Winn et al., *AJ* **133**, 1828-1835 (2007) a Southworth et al., *MNRAS*, **434**, 2 (2013).



**Obrázek 2:** Geometrie tranzitu při obecné orbitální inklinaci.

## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)



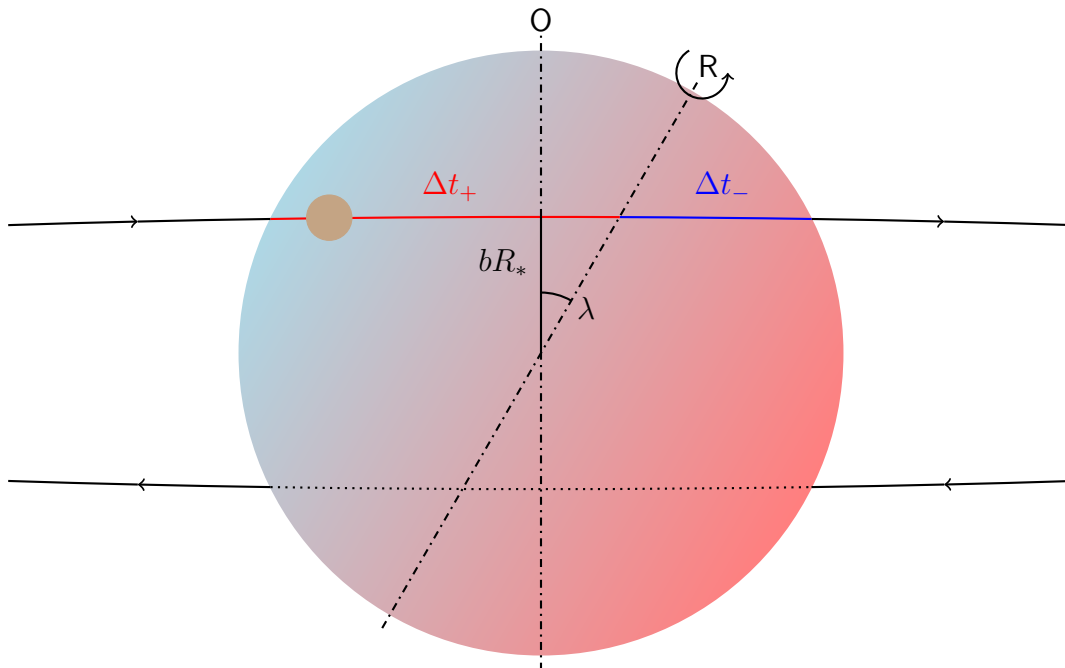
**Obrázek 3:** Křivky radiálních rychlostí hvězd HD 189733A a WASP-15. Spodní panely ukazují anomálii okolo fáze 0 (střed tranzitu) způsobenou Rossiterovým-McLaughlinovým jevem. Zdroje: [Triaud et al., A&A 506, 377-384 \(2009\)](#) a [Triaud et al., A&A 524, A25 \(2010\)](#).

b) Napište obecné vztahy pro výpočet délky  $\Delta t_{14}$  intervalu mezi prvním a čtvrtým kontaktem a délky  $\Delta t_{23}$  intervalu mezi druhým a třetím kontaktem. Můžete předpokládat, že  $R_* \ll a_p$ . Ukažte, že poměr  $\tau = \Delta t_{14}/\Delta t_{23}$  lze vyjádřit pouze pomocí parametrů  $b$  a  $D$ . Pomocí dat na obrázku 1 určete hodnoty poměru  $\tau$  a impaktního parametru  $b$  pro exoplanety HD 189733A b a WASP-15 b. [6 b]

Měření změn radiální rychlosti mateřské hvězdy pomocí Dopplerovské spektroskopie představují nezávislý zdroj informací o exoplanetárních systémech. Tyto změny reflektují orbitální pohyb hvězdy kolem společného hmotného středu binárního systému hvězda – exoplaneta. Křivky radiálních rychlostí hvězd HD 189733A a WASP-15 vidíme na obrázku 3 (pohyb hmotného středu systému vzhledem k pozorovateli byl odečten). Používáme konvence, kde kladná radiální rychlost znamená, že se hvězda od pozorovatele vzdaluje a kde fáze 0 odpovídá středu tranzitu.

Pokud by hvězda nerotovala kolem své osy, očekávali bychom, že pro fázi 0 naměříme ve spektru

## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)



**Obrázek 4:** Přejechání exoplanety přes disk rotující hvězdy. O, resp. R značí průmět osy oběhu exoplanety, resp. průmět osy rotace hvězdy do roviny kolmé na směr k pozorovateli. Části disku, které se k pozorovateli přibližují, jsou vyznačeny modře, vzdalující se části jsou zobrazeny červeně.

hvězdy přesně nulový Dopplerův posuv a že sklon křivky radiálních rychlostí (tedy radiální zrychlení) bude ve fázi 0 roven  $a_{r,0} = 2\pi K_*/P$ , kde  $K_*$  je amplituda změn radiální rychlosti hvězdy. Obecně avšak hvězdy rotují, jak je ostatně naznačeno na obrázku 4: v intervalu  $\Delta t_+$ , kdy exoplaneta přechází přes část disku hvězdy, která se k pozorovateli přibližuje, odstíní disk exoplanety část záření, které je vlivem rotace posunuto ke krátkým vlnovým délkám. V důsledku tohoto pak registrujeme excesivní červený posuv záření od hvězdy, a tedy anomální nárůst křivky radiálních rychlostí. Naopak v intervalu  $\Delta t_-$  blokuje exoplaneta záření ze vzdalující se části disku, které je posunuté k větším vlnovým délkám a my tak pozorujeme excesivní modrý posuv, který způsobí anomální propad křivky radiálních rychlostí. Tyto anomálie (tzv. *Rossiterův-McLaughlinův jev*) můžeme zřetelně pozorovat na konkrétních příkladech křivek radiálních rychlostí na obrázku 3. Měřením rozdílu sklonu křivky radiálních rychlostí ve fázi 0 od jejího sklonu mimo tranzit bychom pak získali anomální radiální zrychlení  $a_{RM}$ , pro které lze odvodit vztah

$$\frac{1}{2} a_{RM} \Delta t = \frac{D}{1-D} \sqrt{1-b^2} (V_* \sin i_*) \cos \lambda.$$

Zde  $\Delta t$  značí střední délku trvání tranzitu,  $V_* \sin i_*$  je průmět rovníkové rychlosti rotace hvězdy do směru k pozorovateli a  $\lambda$  je úhel sevřený mezi průmětem O osy oběhu exoplanety kolem hvězdy a průmětem R rotační osy hvězdy do roviny kolmé na směr k pozorovateli (viz obrázek 4). Úhel  $\lambda$  tedy udává orientaci průmětu rotační osy hvězdy vzhledem k rovině oběhu exoplanety.

c) Vyjádřete úhel  $\lambda$  pomocí  $b$  a poměru  $\sigma \equiv \Delta t_+/\Delta t_-$ . Určete hodnoty  $\sigma$  a  $\lambda$  pro systémy HD 189733A a WASP-15. Popište kvalitativní rozdíly mezi orbitami planet v těchto systémech. [7 b]

d) Určete hodnotu průmětu  $V_* \sin i_*$  rovníkové rotační rychlosti do směru k pozorovateli pro hvězdy HD 189733A a WASP-15. Proveďte s rovníkovou rotační rychlosti Slunce. [4 b]



## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

### C Epocha rekombinace

(max. 20 bodů)

Předmětem našeho zkoumání v této úloze budou rané fáze vývoje vesmíru. Konkrétně nás bude zajímat období, kdy se látka ve vesmíru ochladila natolik, aby elektrony a atomová jádra mohly rekombinovat v neutrální atomy. Přitom došlo k rapidnímu nárůstu střední volné dráhy fotonů. Ty se tak efektivně oddělily od částic hmoty a dále se mohly šířit téměř nerušeně. Tyto fotony v současné době pozorujeme jako tzv. *kosmické mikrovlnné pozadí* neboli *CMB – Cosmic Microwave Background*. Až na velmi malé fluktuace má CMB v současnosti charakteristiky izotropního záření absolutně černého tělesa o teplotě  $T_0 = 2,73$  K. V následujících úkolech se pokusíme odvodit co nejvíce informací o období, ve kterém CMB vzniklo.

Uvažujme, že současná míra rozpínání vesmíru je dána Hubbleovým-Lemaîtreovým parametrem  $H_0 = 67,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ . Z měření červených posuvů vzdálených supernov typu Ia a z dynamiky kup galaxií rovněž plyne, že náš vesmír je plochý (jeho hustota je tedy rovna tzv. *kritické hustotě*) a že 68,5 % hustoty látky v něm je tvořeno temnou energií, zatímco 31,5 % hmotou (a pouze 4,9 % známou baryonovou hmotou). Ve zbytku úlohy budeme pro jednoduchost předpokládat, že veškerá baryonová hmota ve vesmíru je uspořádána do atomů nejjednoduššího izotopu vodíku.

a) Pomocí hodnoty  $H_0$  určete průměrnou hustotu  $\rho_0$  veškeré látky ve vesmíru (číselně v  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Určete také současnou průměrnou hustotu  $n_0$  počtu atomů baryonové hmoty (číselně v  $\text{m}^{-3}$ ). [2 b]

V literatuře lze vyhledat vztah<sup>1</sup>

$$u = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

pro výpočet hustoty  $u$  energie izotropního záření absolutně černého tělesa pomocí teploty  $T$ , Stefanovy-Boltzmannovy konstanty  $\sigma$  a rychlosti světla  $c$  (v jednotkách  $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$ ).

b) Vypočtete současnou hustotu  $\rho_{\text{CMB},0}$  kosmického mikrovlnného pozadí v  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . [1 b]

Do celkové hustoty záření ve vesmíru nezanedbatelně přispívají rovněž *reliktní neutrina* neboli *CνB – Cosmic Neutrino Background*<sup>2</sup>. Jejich hustota je navázána na hustotu CMB a určíme ji jako

$$\rho_{\text{C}\nu\text{B}} = 3 \cdot \frac{7}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_{\text{CMB}}.$$

Faktor 3 odpovídá počtu vlní neutrin (elektronové, muonové a tauonové), faktor  $\frac{7}{8}$  je dán rozdílem mezi Fermiho-Diracovou statistikou neutrin a Boseho-Einsteinovou statistikou fotonů a konečně faktor  $\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}}$  plyne z dynamiky elektron-pozitronové anihilace ve velmi raném vesmíru, která dala neutrinovému pozadí za vznik.

c) Najděte podíl  $\Omega_{r,0}$ , který má záření (CMB a reliktní neutrina) na současné hustotě veškeré látky ve vesmíru. Mělo by vám vyjít velmi malé číslo. [1 b]

Rozpínání vesmíru obvykle popisujeme veličinou *škálovací faktor*, která udává poměr vzájemných vzdáleností objektů ve vesmíru v minulosti vůči jejich současným hodnotám. Značíme ji  $a$  a z definice

<sup>1</sup>Pro odvození tohoto vztahu můžete například uvažovat kulovou dutinu o poloměru  $R$ , jejíž vnitřní povrch vyzařuje jako absolutně černé těleso o teplotě  $T$ , tedy podle *Stefanova-Boltzmannova zákona* a *Lambertova zákona*.

<sup>2</sup>Reliktní neutrina řadíme do záření, neboť jejich kinetická energie v současnosti i v minulosti výrazně převyšovala jejich klidovou energii: jedná se tedy o ultrarelativistické částice, jejichž energie a hybnost splňují vztah  $E \approx pc$ .



## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

je její hodnota v současnosti rovná  $a_0 = 1$ . Nedochází-li k reakcím, při kterých se částice hmoty mění na částice záření, můžeme říct, že průměrná hustota hmoty ve vesmíru klesá s *třetí* mocninou škálovacího faktoru (zatímco např. hustota temné energie není rozpínáním ovlivněna).

Jak se vesmír rozpíná, zvětšuje se i vlnová délka záření, které se v něm šíří: byl-li foton vyzářen s vlnovou délkou  $\lambda_e$  v okamžiku, kdy měl vesmír škálovací faktor  $a$ , registrujeme jej nyní jako foton s vlnovou délkou  $\frac{1}{a}\lambda_e$ . Škálovací faktor  $a$  a kosmologický červený posuv  $z$  objektů, které pozorujeme v současnosti, tedy spolu souvisí vztahem

$$z = \frac{\frac{1}{a}\lambda_e - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a} - 1.$$

Průměrná hustota energie záření ve vesmíru pak klesá se *čtvrtou* mocninou  $a$ , neboť kromě poklesu počtu částic v jednotkovém objemu dochází vlivem rozpínání vesmíru i ke kosmologickému červenému posuvu, a tedy k poklesu energie jednotlivých kvant záření. Poměr průměrných hustot hmoty a záření ve vesmíru se tedy v čase mění.

**d)** Jaký kosmologický červený posuv  $z_*$  by odpovídal období, kdy si byly hustoty záření (CMB i reliktních neutrin) a hmoty (temné i baryonové) ve vesmíru rovný? Odpovídající hustoty vypočítejte číselně v  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Jaké bylo v tomto období zastoupení temné energie? Určete rovněž typickou energii  $k_B T$  fotonů CMB během tohoto období (číselně v eV) a porovnejte s ionizační energií atomu vodíku  $\varepsilon = 13,6 \text{ eV}$ . Za předpokladu, že baryonová hmota i fotony CMB byly v tomto období v tepelné rovnováze, se ujistěte, že typická rychlost částic baryonové hmoty v tento okamžik byla již výrazně menší než rychlost světla. [5,5 b]

Mělo by vám vyjít, že typická energie fotonů v období rovnosti hustot hmoty a záření nedostačovala k ionizaci vodíku. Mohli bychom tedy na první pohled usoudit, že kosmologický červený posuv odpovídající období rekombinace by měl být větší než  $z_*$  a tudíž, že se CMB oddělilo od hmoty ještě v době, kdy byla hustota vesmíru dominována zářením. Střední energie fotonů ovšem není jediným určujícím faktorem: připadá-li na jeden atom vodíku dostatečný počet fotonů, může být významný podíl atomů ionizován atypickými fotony s energií výrazně větší, než je jejich střední energie.

**e)** Odhadněte počet  $\eta$  fotonů CMB, které ve vesmíru připadají na jeden atom (stačí řádově). [1 b]

Pro přesnější určení červeného posuvu období rekombinace nám poslouží *Sahova ionizační rovnice*<sup>3</sup>. Ta pro vodík nabývá tvaru

$$\frac{n''n_e}{n'} = \left[ \frac{\sqrt{2\pi m_e k_B T_H}}{h} \right]^3 e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T_H}},$$

kde  $n''$  je hustota počtu ionizovaných jader vodíku (tedy hustota počtu protonů),  $n_e$  je hustota počtu elektronů,  $n'$  je hustota počtu rekombinovaných atomů vodíku,  $m_e$  je klidová hmotnost elektronu,  $T_H$  je rovnovážná teplota směsi jader vodíku, elektronů a neutrálních atomů,  $\varepsilon$  je ionizační energie vodíku a  $h$  je Planckova konstanta. Sahova rovnice platí, je-li typická rychlost částic směsi výrazně menší než rychlost světla, jsou-li elektrony nedegenerované a je-li systém v rovnovážném stavu.

**f)** Nalezněte číselnou hodnotu červeného posuvu  $z_{50}$ , která odpovídá době, kdy s elektrony zrekombinovalo 50 % všech jader vodíku. Některé rovnice budete muset řešit graficky nebo numericky. Uvažujte, že baryonová hmota byla během rekombinace v tepelné rovnováze s fotony CMB. [4,5 b]

<sup>3</sup>Jedná se o pokročilý výsledek statistické fyziky, pro odvození ze základních principů viz například <https://www.astro.princeton.edu/~gk/A403/notes.html>, kapitola 3.

## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

Zbývá nám určit červený posuv  $z_{\text{dec}}$ , který odpovídá epoše, kdy se fotony CMB oddělily od baryonové hmoty (tzv. *decoupling epoch*). Vyjde-li poměr ionizovaných atomů v okamžiku oddělení dostatečně malý, ověříme tímto zároveň platnost předpokladu o tepelné rovnováze mezi baryonovou hmotou a fotony CMB během období rekombinace. Budeme uvažovat, že v raném vesmíru interagovaly fotony pouze s volnými nabitými částicemi hmoty, a to skrze *Thomsonův rozptyl*, jehož účinný průřez vypočteme jako

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \right)^2.$$

Zde  $q$  označuje elektrický náboj částice,  $m_0$  její klidovou hmotnost a  $\epsilon_0$  je permitivita vakua. Oddělení záření CMB od baryonové hmoty nastalo v okamžiku, kdy střední volná dráha fotonů překonala poloměr  $c/H$  tzv. *Hubbleovy sféry*. Ten představuje odhad největší vzdálenosti mezi částmi vesmíru, které spolu mohly komunikovat.

**g)** Určete červený posuv  $z_{\text{dec}}$  odpovídající okamžiku oddělení fotonů CMB od baryonové hmoty (řešte opět buď graficky, nebo numericky). Kolik procent atomů bylo v tomto okamžiku stále v ionizovaném stavu? Pro výpočet Hubbleova-Lemaîtreova parametru  $H$  v obecném okamžiku vývoje vesmíru lze využít předpokladu, že průměrná hustota látky ve vesmíru byla vždy rovna kritické hustotě. [5 b]

## D Signál a šum (praktická)

(max. 30 bodů)

### Část I – Poměr signálu a šumu na CCD snímku

V první části úlohy si vyzkoušíte spočítat nejistotu při měření hvězdné velikosti pomocí CCD snímáče. Dalekohled v tomto případě nemá okulár, místo něj promítáme obraz na mřížku pixelů. Ty přemění určitou část dopadajících fotonů na elektrony. Po uplynutí expozičního času převede snímáč počty nasbíraných elektronů na číselnou hodnotu.

Výřez z jednoho takového snímku najdete na obrázku 5. V tabulce 1 jsou hodnoty všech pixelů z obrázku 5 v jednotkách ADU (Analog-Digital Units), které jsou úměrné počtu dopadajících fotonů. Expoziční čas byl  $t = 60$  s. Hodnoty jsou součtem signálu z hvězdy, signálu z oblohy a šumu. Všimněte si, že hvězda není zobrazená přesně na jeden pixel.

**a)** Vyberte reprezentativní vzorek pixelů mimo hvězdu a spočítejte jejich průměrný signál  $s_{\text{sky}}$  v ADU. Vhodnou volbou můžou být třeba pixely podél okrajů výřezu. Spočítejte také odpovídající směrodatnou odchylku  $\sigma_{\text{sky}}$ . [6 b]

**b)** Předpokládejme, že pixel, na který se zobrazila hvězda, má signál vyšší než  $s_{\text{sky}} + 3\sigma_{\text{sky}}$ . Určete součet  $S_{\text{CCD}}$  signálů ze všech pixelů s hvězdou. S pomocí výsledku předchozí úlohy od  $S_{\text{CCD}}$  odečtete signál pocházející z oblohy a uveďte výslednou hodnotu signálu z hvězdy  $S_*$  v ADU. [3 b]

Doteď jsme používali jednotky ADU. Od výrobce snímáče víme hodnotu zesílení  $G = 1,3 e^- / \text{ADU}$ . To znamená, že každé ADU odpovídá tomuto počtu nasbíraných elektronů.

Pojďme se nyní zaměřit na zdroje šumu. Od hvězdy přichází jistý průměrný počet fotonů za sekundu. To ale neznamená, že každou sekundu můžeme zachytit přesně tento počet fotonů. Jejich vyzáření je totiž náhodný jev. Pravděpodobnost, že za daný časový interval dorazí z hvězdy  $k$  fotonů za předpokladu, že v průměru dorazí za daný časový interval  $n$  fotonů, popisuje *Poissonovo rozdělení*,



## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

**Tabulka 1:** Hodnoty v ADU odpovídající pixelům na snímku hvězdy pořízeného pomocí dalekohledu a CCD snímače. Od dat byly odečteny kalibrační snímky dark frame a flat field. Data jsou ke stažení ve formátu CSV na stránce [https://olympiada.astro.cz/data/documents/2/11/1005\\_table.csv](https://olympiada.astro.cz/data/documents/2/11/1005_table.csv).

17723	17679	17744	17773	17843	17695	17735	17731	17700	17752	17856	18188	17587	17701	17812
17757	17649	17690	17722	17810	17863	18049	17888	17794	17799	17765	17964	17736	17533	17958
17873	17850	17492	17910	17931	17768	17816	17899	18019	17673	17782	17913	17749	17703	17965
17780	17799	17612	17930	17882	18024	17941	18008	18029	18018	17760	17856	17767	17735	17805
17840	18058	17920	17778	18085	18165	18419	18597	18328	18098	17960	17711	17625	17848	17687
17810	17912	17800	18040	17896	18593	19565	20905	20307	18997	18198	17977	17948	17799	17742
17709	17736	17940	18110	18271	19682	25172	36942	31303	21308	19105	18717	18141	17690	17743
17843	17817	17779	17888	18436	21100	29302	43715	40462	23169	19027	18652	17954	17884	17771
17795	17726	17863	17879	18527	19793	23437	31487	29847	20765	18464	18327	17963	17970	17756
17777	17882	17726	18173	18026	18656	20728	23322	21298	18734	18061	18026	17973	17851	17776
17789	17638	17734	18004	17981	18208	18688	19134	18523	18127	18179	17698	17860	17884	17823
17897	17677	17859	17732	17869	17883	17812	17881	18016	17931	17812	17885	18005	17645	17737
17699	17941	17759	17720	17783	17866	17877	17824	17970	17735	17742	17840	17700	17826	17858
17803	17820	17630	17790	17804	17746	17778	17802	17733	17959	17920	17829	17808	17968	17631
17793	17674	17882	17747	17699	17652	17638	17562	17779	17770	17793	17822	17767	17874	17876

jehož směrodatná odchylka je odmocninou z očekávané četnosti jevu. V našem případě to znamená, že šum signálu od hvězdy (v jednotkách počtu elektronů) je pro jeden pixel roven

$$\sigma_* = \sqrt{Gs_*},$$

kde  $s_*$  je signál z hvězdy dopadající na jeden pixel. Obloha je podobně jako hvězda zdrojem šumu

$$\sigma_s = \sqrt{Gs_{\text{sky}}}.$$

K celkovému šumu dále přispívá termální šum snímače, tzv. *temný proud* (důsledek termálního pohybu elektronů). Změřili bychom ho i se zavřeným dalekohledem. Od výrobce CCD snímače víme hodnotu  $D = 3,2e^-/s/\text{px}$ , která udává počet elektronů, které nasbírá v průměru každý pixel za sekundu vlivem temného proudu. Hodnota odpovídající průměrnému příspěvku temného proudu byla od dat na obrázku 5 a v tabulce 1 odečtena. Jelikož se ale také jedná o součet více nezávislých náhodných jevů, příspěvek k šumu temného proudu opět podléhá Poissonovu rozdělení. Platí tedy

$$\sigma_D = \sqrt{Dt}.$$

Poslední příspěvek k šumu, který budeme uvažovat, pochází z vyčítací elektroniky, která převádí počty elektronů na hodnoty v ADU. Výrobce uvádí hodnotu  $\sigma_R^2 = 28e^-/\text{px}$ . Vyčítací šum jako jediný zmíněný nezávisí na expozičním čase<sup>4</sup>. Celkový šum je odmocnina ze součtu středních kvadratických odchylek pro jednotlivé druhy šumu a pro jednotlivé pixely, tedy

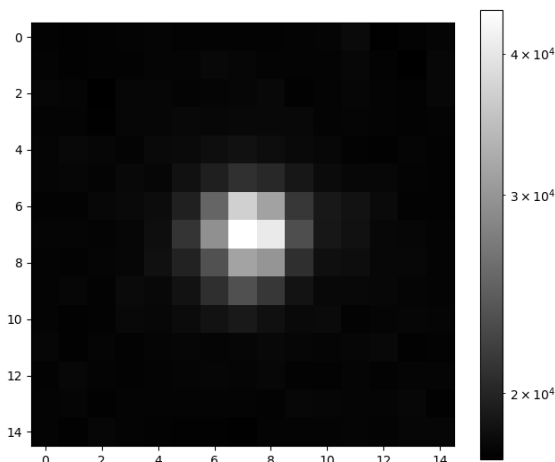
$$N = \sqrt{\sum_x \sigma_x^2}. \quad (1)$$

c) Spočítejte poměr signálu a šumu  $S/N$ , kde  $S = S_*G$  a  $N$  je definované vztahem (1). Jako zdroje šumu uvažujete  $\sigma_*$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{\text{sky}}$ ,  $\sigma_D$  a  $\sigma_R$ . Nezapomeňte, že do celkového  $N$  přispívají všechny pixely, na které se zobrazuje hvězda. [3 b]

d) Jakou nejmenší změnu hvězdné velikosti  $\Delta m$  hvězdy můžeme změřit s poměrem  $S/N$ , který jste určili v předchozí části? Předpokládejte, že nejmenší možná změna  $\Delta m$  odpovídá změně síly signálu z  $S$  na  $S + N$ . Bude možné pozorovat pokles magnitudy pozorované hvězdy o 10 mmag? [3 b]

<sup>4</sup>Nezapomeňme, že signály z hvězdy i oblohy jsou lineární funkcí expozičního času.

## Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)



**Obrázek 5:** Výřez snímku hvězdy pořízený pomocí dalekohledu a CCD snímače. Data byla opravena o kalibrační snímky dark frame a flat field.

### Část II – Binocular summation factor

V druhé části úlohy se pokusíme zjistit, kolikrát slabší objekty jsme schopni pozorovat, pokud místo jednoho optického přístroje použijeme dva nezávislé detektory, jejichž signály skládáme.

e) Za jasné bezměsíčné noci změřte hodnotu mezní hvězdné velikosti. Měření proveďte několikrát za sebou s co nejkratšími časovými odstupy, a to ve *dvou různých režimech*: při pozorování *oběma očima* a při pozorování s *jedním zakrytým okem*. Můžete postupovat například pomocí metody polygonů, jako v Úloze D [Krajského kola 21. ročníku AO kat. CD](#). Případně si můžete vytvořit i vlastní polygony, nebo navrhnout vlastní metodu, která bude lépe odpovídat potřebám úlohy. Pokuste se co nejvíce eliminovat možné zdroje kognitivního biasu: například, používáte-li metodu polygonů, tak hvězdy v daném polygonu vždy počítejte nejdříve s jedním zakrytým okem a pak teprve s odkrytými oběma očima. Pro měření jedním okem používejte střídavě levé i pravé oko. Měření provádějte v rámci úhlově co nejmenší části oblohy. Vaši metodu a podmínky při měření detailně popište. [10 b]

f) Vámi naměřený rozdíl mezních hvězdných velikostí se pokuste porovnat s hodnotou, kterou byste očekávali na základě analýzy poměru signálu a šumu. [5 b]

*Tipy:* Předpokládejte, že mozek hvězdu považuje za rozlišenou, pokud poměr  $S/N$  překročí jistou kritickou hodnotu  $\Delta$ . Signály z jednotlivých očí považujte za nezávislé.

Přehledový test A vymyslel kolektiv autorů AO, úlohu B navrhli Daniel Čtvrtečka a Jakub Vošmera, úlohu C navrhl Jakub Vošmera, úlohu D navrhli David Kománek a Radomír Mielec (Část I) a Jakub Vošmera (Část II).