

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení**A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz>. Přihlašovací údaje získají úspěšní řešitelé školního kola e-mailem nebo je dostanou od svého učitele. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **17. 1. 2025** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Rossiterův-McLaughlinův jev*(max. 20 bodů)*

Jelikož exoplanety září pouze odraženým světlem a nachází se typicky úhlově velmi blízko svých mateřských hvězd, je velmi obtížné je pozorovat přímo – jsou hvězdami jednoduše přezářeny. Většinu dosud známých exoplanet tudíž astronomové detekovali nepřímými metodami, které jsou veskrze založené na pozorování změn záření, které k nám přichází od jejich mateřských hvězd – ať už se jedná např. o *metodu radiálních rychlostí* (změny vlnové délky) nebo o *metodu tranzitů* (změny intenzity).

V následujících úkolech se přesvědčíme, že přítomnost exoplanety lze naopak využít k nepřímému odvození některých charakteristik hvězdy, okolo které exoplaneta obíhá. Výsledkem naší analýzy – založené na tzv. *Rossiterově-McLaughlinově jevu* – bude určení rychlosti rotace centrální hvězdy kolem její osy a rovněž určení orientace této rotační osy vůči rovině oběhu exoplanety. Obecné výsledky budeme průběžně aplikovat na případ dvou konkrétních exoplanet: HD 189733A b a WASP-15 b, které své mateřské hvězdy obíhají s periodami 53,246 h, resp. 90,050 h. V celé úloze budeme předpokládat, že exoplanety kolem hvězdy obíhají po přesně kruhových trajektoriích a budeme zanedbávat komplikace spojené s okrajovým ztemněním disku hvězdy a diferenciální rotací.

Začneme s vytěžováním světelné křivky tranzitu exoplanety, neboli změn pozorované jasnosti mateřské hvězdy, ke kterým dochází při přechodu exoplanety přes disk hvězdy. Tranzity pozorujeme, je-li orbitální inklinace i (úhel mezi rovinou oběhu exoplanety a rovinou kolmou na směr k pozorovateli) přibližně rovna 90° . Světelné křivky zobrazující tranzity exoplanet HD 189733A b a WASP-15 b vidíme na obrázku 1.

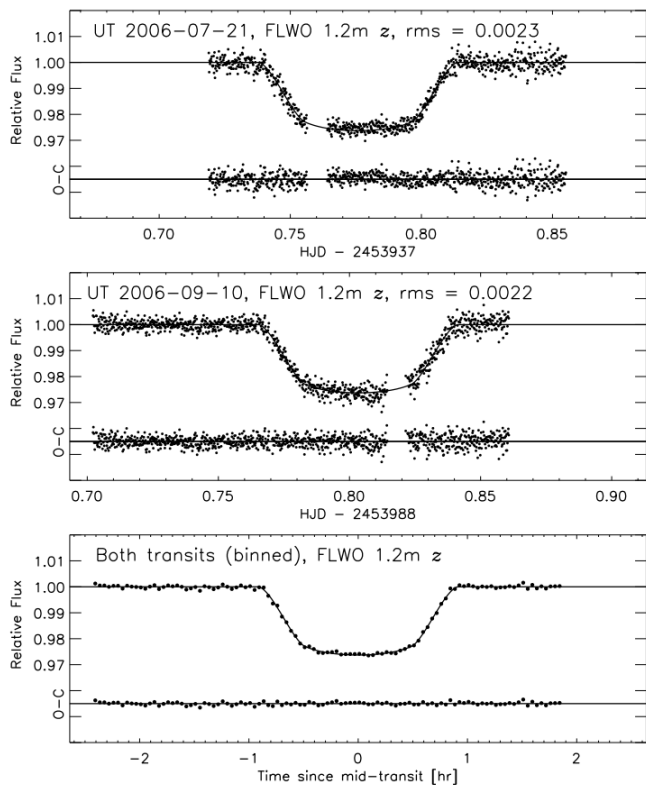
a) Využijte hloubku D tranzitu (relativní pokles příchozí intenzity záření v ploché části tranzitu vůči příchozí intenzitě záření od nezakryté hvězdy) k určení poměru R_p/R_* poloměru R_p exoplanety a R_* hvězdy. Hloubku D a poměr R_p/R_* vyčíslete pro exoplanety HD 189733A b a WASP-15 b. [3 b]

Označme jako F zářivý tok, který přichází z jednotkové plochy disku hvězdy. Potom píšeme

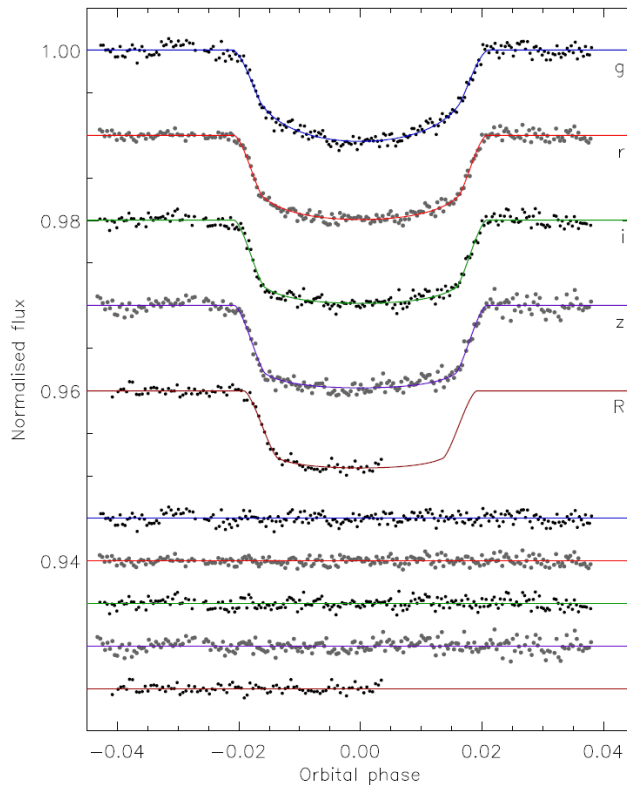
$$D = \frac{F\pi R_*^2 - F(\pi R_*^2 - \pi R_p^2)}{F\pi R_*^2} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2.$$

Ze světelných křivek na obrázku 1 můžeme odečíst hodnotu $D \doteq 0,025$ pro exoplanetu HD 189733A b (a tedy poměr poloměrů $R_p/R_* \doteq 0,16$), zatímco pro exoplanetu WASP-15 b dostáváme hodnotu $D \doteq 0,010$ (což odpovídá poměru poloměrů $R_p/R_* \doteq 0,10$).

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

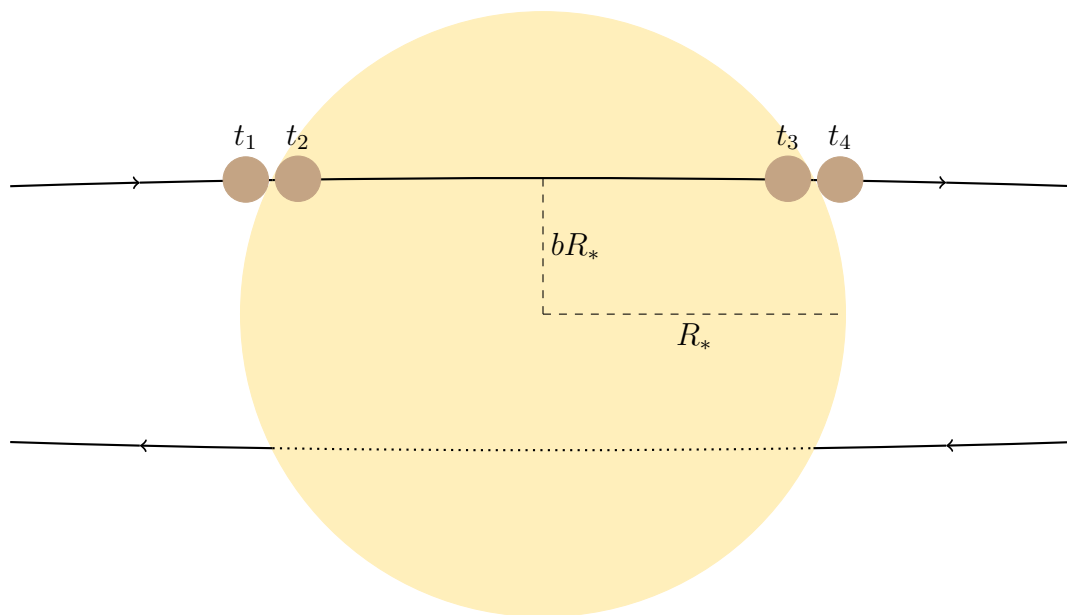


(a) HD 189733A b



(b) WASP-15 b

Obrázek 1: Fotometrie tranzitů exoplanet HD 189733A b a WASP-15 b. Zdroje: Winn et al., *AJ* **133**, 1828-1835 (2007) a Southworth et al., *MNRAS*, **434**, 2 (2013).



Obrázek 2: Geometrie tranzitu při obecné orbitální inklinaci.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Při obecném tranzitu nemusí trajektorie exoplanety procházet přesně přes střed disku hvězdy: jinými slovy, orbitální inklinace i exoplanety se může mírně lišit od 90° . Pro popis geometrie tranzitu zavádíme tzv. *impaktní parametr* b , který je definován jako promítnutá vzdálenost trajektorie exoplanety od středu disku v jednotkách R_* . Není těžké se přesvědčit, že platí vztah $b = a_p \cos i / R_*$, kde a_p je poloměr oběžné dráhy exoplanety. Parametr b se nyní pokusíme určit na základě měření časů t_1 , t_2 , t_3 a t_4 tzv. *kontaktů* disku exoplanety s diskem hvězdy. Definice impaktního parametru b a kontaktů jsou ilustrovány na obrázku 2.

b) Napište obecné vztahy pro výpočet délky Δt_{14} intervalu mezi prvním a čtvrtým kontaktem a délky Δt_{23} intervalu mezi druhým a třetím kontaktem. Můžete předpokládat, že $R_* \ll a_p$. Ukažte, že poměr $\tau = \Delta t_{14} / \Delta t_{23}$ lze vyjádřit pouze pomocí parametrů b a D . Pomocí dat na obrázku 1 určete hodnoty poměru τ a impaktního parametru b pro exoplanety HD 189733A b a WASP-15 b. [6 b]

S využitím Pythagorovy věty můžeme pro průměty Δl_{14} , resp. Δl_{23} vzdáleností (do roviny kolmé na směr k pozorovateli), které exoplaneta urazí v intervalech Δt_{14} , resp. Δt_{23} psát

$$\Delta l_{14} = 2\sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2},$$

$$\Delta l_{23} = 2\sqrt{(R_* - R_p)^2 - (bR_*)^2}.$$

Jelikož můžeme uvažovat $R_* \ll a_p$, jsou tyto průměty přibližně rovny skutečným vzdálenostem Δs_{14} , resp. Δs_{23} , které exoplaneta v daných časových úsecích ve dráze urazila. Získáváme tedy vztahy

$$\Delta t_{14} \approx \frac{P}{\pi a_p} \sqrt{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2},$$

$$\Delta t_{23} \approx \frac{P}{\pi a_p} \sqrt{(R_* - R_p)^2 - (bR_*)^2},$$

kde P označuje periodu oběhu exoplanety kolem hvězdy.

Dostáváme pak poměr

$$\tau = \sqrt{\frac{(R_* + R_p)^2 - (bR_*)^2}{(R_* - R_p)^2 - (bR_*)^2}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{D})^2 - b^2}{(1 - \sqrt{D})^2 - b^2}},$$

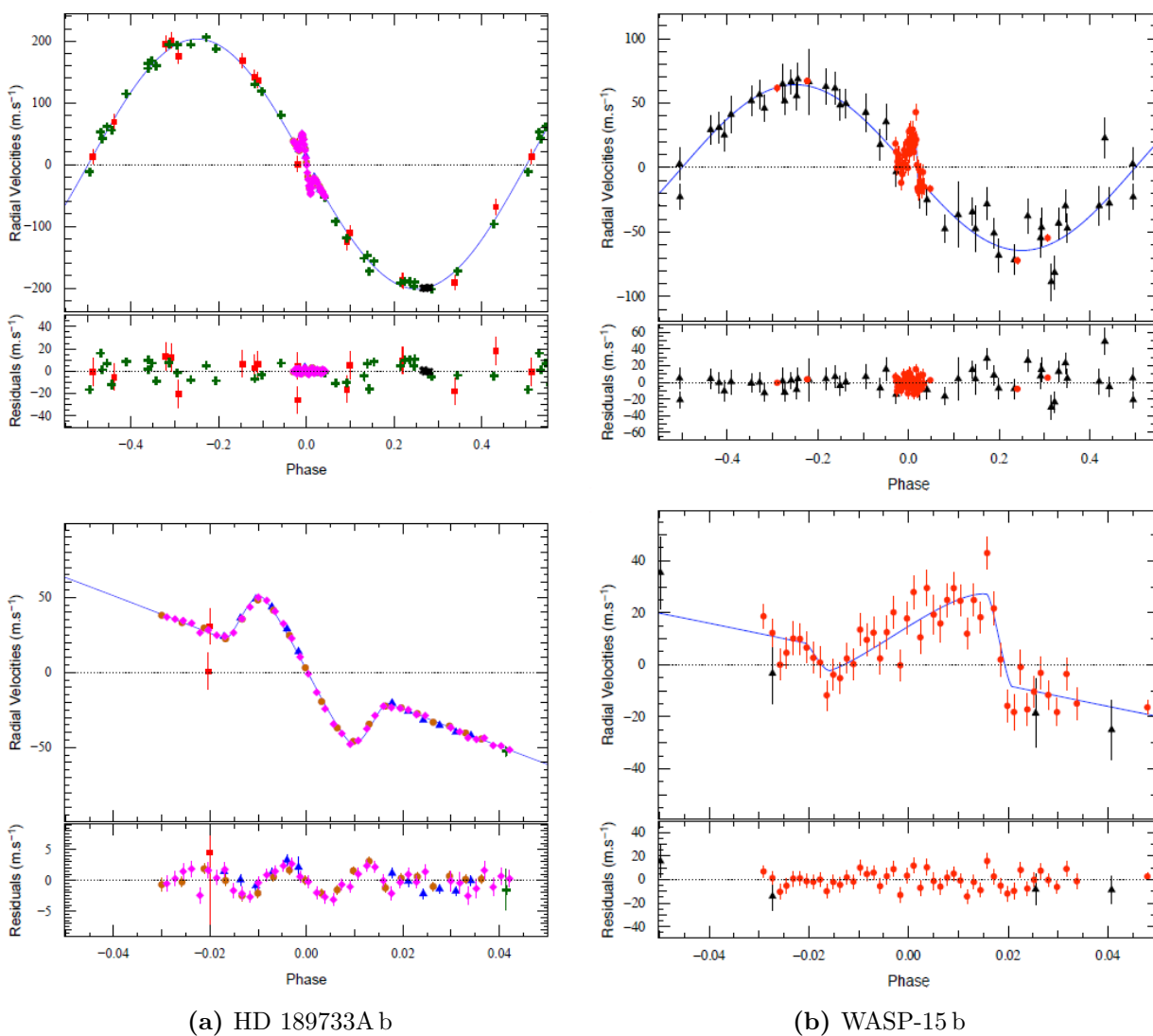
neboli

$$b = \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{D})^2 \tau^2 - (1 + \sqrt{D})^2}{\tau^2 - 1}}.$$

Pro tranzit exoplanety HD 189733A b můžeme z obrázku 1 odečíst $\tau \doteq 1,84$, zatímco pro WASP-15 b odečteme $\tau \doteq 1,34$. Dostáváme pak $b \doteq 0,67$ pro HD 189733A b a $b \doteq 0,55$ pro WASP-15 b.

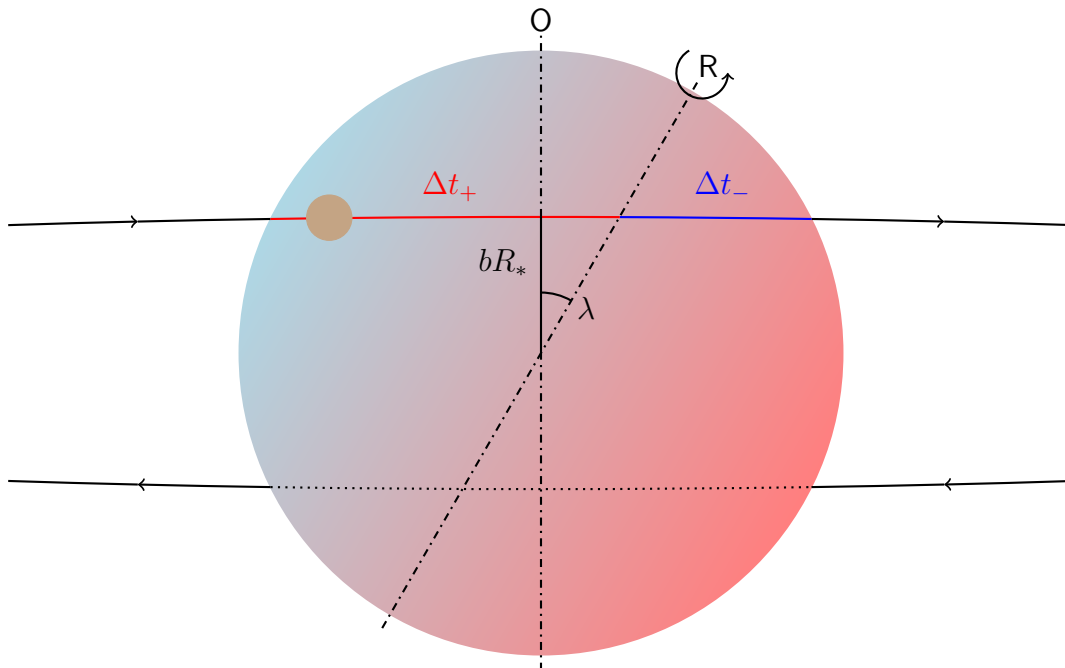
Měření změn radiální rychlosti mateřské hvězdy pomocí Dopplerovské spektroskopie představují nezávislý zdroj informací o exoplanetárních systémech. Tyto změny reflektují orbitální pohyb hvězdy kolem společného hmotného středu binárního systému hvězda – exoplaneta. Křivky radiálních rychlostí hvězd HD 189733A a WASP-15 vidíme na obrázku 3 (pohyb hmotného středu systému vzhledem

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Křivky radiálních rychlostí hvězd HD 189733A a WASP-15. Spodní panely ukazují anomálii okolo fáze 0 (střed tranzitu) způsobenou Rossiterovým-McLaughlinovým jevem. Zdroje: [Triaud et al., A&A 506, 377-384 \(2009\)](#) a [Triaud et al., A&A 524, A25 \(2010\)](#).

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Přejech exoplanety přes disk rotující hvězdy. O, resp. R značí průmět osy oběhu exoplanety, resp. průmět osy rotace hvězdy do roviny kolmé na směr k pozorovateli. Části disku, které se k pozorovateli přibližují, jsou vyznačeny modře, vzdalující se části jsou zobrazeny červeně.

k pozorovateli byl odečten). Používáme konvence, kde kladná radiální rychlost znamená, že se hvězda od pozorovatele vzdaluje a kde fáze 0 odpovídá středu tranzitu.

Pokud by hvězda nerotovala kolem své osy, očekávali bychom, že pro fázi 0 naměříme ve spektru hvězdy přesně nulový Dopplerův posuv a že sklon křivky radiálních rychlostí (tedy radiální zrychlení) bude ve fázi 0 roven $a_{r,0} = 2\pi K_*/P$, kde K_* je amplituda změn radiální rychlosti hvězdy. Obecně avšak hvězdy rotují, jak je ostatně naznačeno na obrázku 4: v intervalu Δt_+ , kdy exoplaneta přechází přes část disku hvězdy, která se k pozorovateli přibližuje, odstíní disk exoplanety část záření, které je vlivem rotace posunuto ke krátkým vlnovým délkám. V důsledku tohoto pak registrujeme excesivní červený posuv záření od hvězdy, a tedy anomální nárůst křivky radiálních rychlostí. Naopak v intervalu Δt_- blokuje exoplaneta záření ze vzdalující se části disku, které je posunuté k větším vlnovým délkám a my tak pozorujeme excesivní modrý posuv, který způsobí anomální propad křivky radiálních rychlostí. Tyto anomálie (tzv. *Rossiterův-McLaughlinův jev*) můžeme zřetelně pozorovat na konkrétních příkladech křivek radiálních rychlostí na obrázku 3. Měřením rozdílů sklonu křivky radiálních rychlostí ve fázi 0 od jejího sklonu mimo tranzit bychom pak získali anomální radiální zrychlení a_{RM} , pro které lze odvodit vztah

$$\frac{1}{2}a_{RM} \Delta t = \frac{D}{1-D} \sqrt{1-b^2} (V_* \sin i_*) \cos \lambda.$$

Zde Δt značí střední délku trvání tranzitu, $V_* \sin i_*$ je průmět rovníkové rychlosti rotace hvězdy do směru k pozorovateli a λ je úhel sevřený mezi průmětem O osy oběhu exoplanety kolem hvězdy a průmětem R rotační osy hvězdy do roviny kolmé na směr k pozorovateli (viz obrázek 4). Úhel λ tedy udává orientaci průmětu rotační osy hvězdy vzhledem k rovině oběhu exoplanety.



Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

c) Vyjádřete úhel λ pomocí b a poměru $\sigma \equiv \Delta t_+ / \Delta t_-$. Určete hodnoty σ a λ pro systémy HD 189733A a WASP-15. Popište kvalitativní rozdíly mezi orbitami planet v těchto systémech. [7 b]

Střední dobu Δt trvání zákrytu můžeme rozložit jako $\Delta t = \Delta t_+ + \Delta t_-$. Pro dráhu, kterou exoplaneta během tranzitu urazí, tedy píšeme

$$2R_* \sqrt{1 - b^2} = \frac{2\pi a_p}{P} \Delta t = \frac{2\pi a_p}{P} (\Delta t_+ + \Delta t_-). \quad (1)$$

Dráhu $(2\pi a_p / P) \Delta t_+$ můžeme navíc rozložit na dráhu $(2\pi a_p / P) (\Delta t / 2)$, která odpovídá polovině sečny disku hvězdy (od okraje disku k průsečíku dráhy s průmětem O osy oběhu) a na dráhu $bR_* \operatorname{tg} \lambda$ od průmětu O po průmět R rotační osy hvězdy. Dostáváme tedy vztah

$$bR_* \operatorname{tg} \lambda = \frac{2\pi a_p}{P} \left(\Delta t_+ - \frac{1}{2} \Delta t \right) = \frac{2\pi a_p}{P} \cdot \frac{1}{2} (\Delta t_+ - \Delta t_-). \quad (2)$$

Podělením rovnic (2) a (1) získáme

$$\frac{b \operatorname{tg} \lambda}{\sqrt{1 - b^2}} = \frac{\Delta t_+ - \Delta t_-}{\Delta t_+ + \Delta t_-} = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1},$$

a tedy

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \sqrt{\frac{1}{b^2} - 1}.$$

Odečtením ze spodních panelů na obrázku 3 získáme hodnotu $\sigma \doteq 1,0$ pro exoplanetu HD 189733A b, resp. $\sigma \doteq 0,4$ pro exoplanetu WASP-15 b. Dostáváme pak hodnoty 0° , resp. 147° úhlu λ . Můžeme si povšimnout, že exoplaneta WASP-15 b obíhá svou mateřskou hvězdu po retrográdní dráze (vzhledem ke směru rotace hvězdy).

d) Určete hodnotu průmětu $V_* \sin i_*$ rovníkové rotační rychlosti do směru k pozorovateli pro hvězdy HD 189733A a WASP-15. Proveďte s rovníkovou rotační rychlosti Slunce. [4 b]

Měřením rozdílu sklonu křivek radiálních rychlostí na obrázcích 3 a 1 uprostřed tranzitu a mimo tranzit a na základě znalosti periody oběhu obou exoplanet (na horizontálních osách v grafech na obrázcích 3 a 1 je vynesena fáze, na časovou závislost můžeme převést vynásobením orbitální periodou) můžeme určit hodnoty $a_{\text{RM}} \doteq 0,025 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\Delta t \doteq 1,39 \text{ h}$ pro exoplanetu HD 189733A b a $a_{\text{RM}} \doteq 0,0047 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\Delta t \doteq 3,31 \text{ h}$ pro WASP-15 b. Dostáváme pak promítnuté rotační rychlosti $V_* \sin i_* \doteq 3,3 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pro hvězdu HD 189733A a $V_* \sin i_* \doteq 4,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ pro hvězdu WASP-15. Rovníková rychlost rotace Slunce činí $2,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Tato hodnota je o něco menší, ale řádově srovnatelná s hodnotami, které jsme určili pro hvězdy HD 189733A a WASP-15.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
C Epocha rekombinace
(max. 20 bodů)

Předmětem našeho zkoumání v této úloze budou rané fáze vývoje vesmíru. Konkrétně nás bude zajímat období, kdy se látka ve vesmíru ochladila natolik, aby elektrony a atomová jádra mohly rekombinovat v neutrální atomy. Přitom došlo k rapidnímu nárůstu střední volné dráhy fotonů. Ty se tak efektivně oddělily od částic hmoty a dále se mohly šířit téměř nerušeně. Tyto fotony v současné době pozorujeme jako tzv. *kosmické mikrovlnné pozadí* neboli *CMB – Cosmic Microwave Background*. Až na velmi malé fluktuace má CMB v současnosti charakteristiky izotropního záření absolutně černého tělesa o teplotě $T_0 = 2,73$ K. V následujících úkolech se pokusíme odvodit co nejvíce informací o období, ve kterém CMB vzniklo.

Uvažujme, že současná míra rozpínání vesmíru je dána Hubbleovým-Lemaîtreovým parametrem $H_0 = 67,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Z měření červených posuvů vzdálených supernov typu Ia a z dynamiky kup galaxií rovněž plyne, že náš vesmír je plochý (jeho hustota je tedy rovna tzv. *kritické hustotě*) a že 68,5% hustoty látky v něm je tvořeno temnou energií, zatímco 31,5% hmotou (a pouze 4,9% známou baryonovou hmotou). Ve zbytku úlohy budeme pro jednoduchost předpokládat, že veškerá baryonová hmota ve vesmíru je uspořádána do atomů nejjednoduššího izotopu vodíku.

a) Pomocí hodnoty H_0 určete průměrnou hustotu ρ_0 veškeré látky ve vesmíru (číselně v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Určete také současnou průměrnou hustotu n_0 počtu atomů baryonové hmoty (číselně v m^{-3}). [2 b]

Jelikož je vesmír plochý, je celková hustota látky rovna kritické hustotě, tedy

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \doteq 8,53 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Odtud dostaneme hustotu známé baryonové hmoty jako $\rho_{B,0} = 0,049\rho_0 \doteq 4,18 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, a tedy

$$n_0 = \frac{\rho_{B,0}}{m_H} \doteq 0,25 \text{ m}^{-3},$$

kde $m_H = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ je hmotnost atomu vodíku.

V literatuře lze vyhledat vztah¹

$$u = \frac{4\sigma T^4}{c}$$

pro výpočet hustoty u energie izotropního záření absolutně černého tělesa pomocí teploty T , Stefanovy-Boltzmannovy konstanty σ a rychlosti světla c (v jednotkách $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$).

b) Vypočtete současnou hustotu $\rho_{\text{CMB},0}$ kosmického mikrovlnného pozadí v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. [1 b]

Máme

$$\rho_{\text{CMB},0} = \frac{u}{c^2} = \frac{4\sigma T_0^4}{c^3} \doteq 4,68 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

¹Pro odvození tohoto vztahu můžete například uvažovat kulovou dutinu o poloměru R , jejíž vnitřní povrch vyzařuje jako absolutně černé těleso o teplotě T , tedy podle *Stefanova-Boltzmannova zákona* a *Lambertova zákona*.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Do celkové hustoty záření ve vesmíru nezanedbatelně přispívají rovněž *reliktní neutrina* neboli *CνB* – *Cosmic Neutrino Background*² Jejich hustota je navázána na hustotu CMB a určíme ji jako

$$\rho_{C\nu B} = 3 \cdot \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_{\text{CMB}}.$$

Faktor 3 odpovídá počtu vůní neutrin (elektronové, muonové a tauonové), faktor $\frac{7}{8}$ je dán rozdílem mezi Fermiho-Diracovou statistikou neutrin a Boseho-Einsteinovou statistikou fotonů a konečně faktor $\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}}$ plyne z dynamiky elektron-pozitronové anihilace ve velmi raném vesmíru, která dala neutrinovému pozadí za vznik.

c) Najděte podíl $\Omega_{r,0}$, který má záření (CMB a reliktní neutrina) na současné hustotě veškeré látky ve vesmíru. Mělo by vám vyjít velmi malé číslo. [1 b]

Dostaneme

$$\Omega_{r,0} = \frac{\rho_{\text{CMB},0}}{\rho_0} \left[1 + 3 \cdot \frac{7}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \doteq 9,21 \cdot 10^{-5}.$$

Rozpínání vesmíru obvykle popisujeme veličinou *škálovací faktor*, která udává poměr vzájemných vzdáleností objektů ve vesmíru v minulosti vůči jejich současným hodnotám. Značíme ji a a z definice je její hodnota v současnosti rovná $a_0 = 1$. Nedochozí-li k reakcím, při kterých se částice hmoty mění na částice záření, můžeme říct, že průměrná hustota hmoty ve vesmíru klesá s *třetí* mocninou škálovacího faktoru (zatímco např. hustota temné energie není rozpínáním ovlivněna).

Jak se vesmír rozpíná, zvětšuje se i vlnová délka záření, které se v něm šíří: byl-li foton vyzářen s vlnovou délkou λ_e v okamžiku, kdy měl vesmír škálovací faktor a , registrujeme jej nyní jako foton s vlnovou délkou $\frac{1}{a}\lambda_e$. Škálovací faktor a a kosmologický červený posuv z objektů, které pozorujeme v současnosti, tedy spolu souvisí vztahem

$$z = \frac{\frac{1}{a}\lambda_e - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a} - 1.$$

Průměrná hustota energie záření ve vesmíru pak klesá se *čtvrtou* mocninou a , neboť kromě poklesu počtu částic v jednotkovém objemu dochází vlivem rozpínání vesmíru i ke kosmologickému červenému posuvu, a tedy k poklesu energie jednotlivých kvant záření. Poměr průměrných hustot hmoty a záření ve vesmíru se tedy v čase mění.

d) Jaký kosmologický červený posuv z_* by odpovídal období, kdy si byly hustoty záření (CMB i reliktních neutrin) a hmoty (temné i baryonové) ve vesmíru rovny? Odpovídající hustoty vypočítejte číselně v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jaké bylo v tomto období zastoupení temné energie? Určete rovněž typickou energii $k_B T$ fotonů CMB během tohoto období (číselně v eV) a porovnejte s ionizační energií atomu vodíku $\varepsilon = 13,6 \text{ eV}$. Za předpokladu, že baryonová hmota i fotony CMB byly v tomto období v tepelné rovnováze, se ujistěte, že typická rychlost částic baryonové hmoty v tento okamžik byla již výrazně menší než rychlost světla. [5,5 b]

²Reliktní neutrina řadíme do záření, neboť jejich kinetická energie v současnosti i v minulosti výrazně převyšovala jejich klidovou energii: jedná se tedy o ultrarelativistické částice, jejichž energie a hybnost splňují vztah $E \approx pc$.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Zatímco hustota hmoty v obecné fázi vývoje vesmíru splňuje vztah $\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$, pro hustotu záření musíme psát $\rho_r = \rho_{r,0}a^{-4}$. Označíme-li $\Omega_{m,0} = 0,315$ současný podíl hmoty na hustotě vesmíru, pak z podmínky $\rho_r = \rho_m$ dostáváme škálovací faktor

$$a_* = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \doteq 2,92 \cdot 10^{-4},$$

tedy červený posuv $z_* \doteq 3420$, pro který zároveň můžeme vypočítat $\rho_r = \rho_m \doteq 1,07 \cdot 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (což je např. tisícina hustoty hmoty při základně sluneční koróny). V období rovnosti hustot hmoty a záření bychom dostali podíl hustoty temné energie

$$\Omega_\Lambda = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{\Lambda,0} + \rho_{m,0}a^{-3} + \rho_{r,0}a^{-4}} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4}} \doteq 2,72 \cdot 10^{-11},$$

kde jsme použili vlastnost, že hustota temné energie je v čase konstantní. Příspěvek temné energie do složení vesmíru v období rovnosti hustot hmoty a záření tedy byl zanedbatelný. Vlnová délka maxima vyzařování absolutně černého tělesa (a tedy i teplota) podléhá kosmologickému červenému posuvu. Pro typickou energii fotonů tedy dostaneme

$$k_B T = k_B T_0 a^{-1} \doteq 0,8 \text{ eV}.$$

To je výrazně méně, než je ionizační energie ε atomů vodíku. Pokud zároveň měla baryonová hmota stejnou teplotu jako fotony CMB (dle předpokladu v zadání), vidíme, že typická kinetická energie $k_B T \doteq 0,8 \text{ eV}$ protonů i elektronů byla výrazně menší, než jejich klidové energie (511 keV a 938 MeV). Směs částic hmoty tedy byla nerelativistická.

Mělo by vám vyjít, že typická energie fotonů v období rovnosti hustot hmoty a záření nedostačovala k ionizaci vodíku. Mohli bychom tedy na první pohled usoudit, že kosmologický červený posuv odpovídající období rekombinace by měl být větší než z_* a tudíž, že se CMB oddělilo od hmoty ještě v době, kdy byla hustota vesmíru dominována zářením. Střední energie fotonů ovšem není jediným určujícím faktorem: připadá-li na jeden atom vodíku dostatečný počet fotonů, může být významný podíl atomů ionizován atypickými fotony s energií výrazně větší, než je jejich střední energie.

e) Odhadněte počet η fotonů CMB, které ve vesmíru připadají na jeden atom (stačí řádově). [1 b]

Dostáváme, že photon-to-baryon ratio je přibližně rovné poměru

$$\eta \equiv \frac{\rho_{\text{CMB},0}c^2}{n_0 k_B T_0} = \frac{4\sigma T_0^3}{n_0 k_B c} \doteq 4 \cdot 10^9.$$

Jedná se o přibližný výsledek, neboť $\rho_{\text{CMB},0}c^2/k_B T_0$ představuje pouhý odhad objemové hustoty počtu fotonů.

Poznámka: Počet fotonů i baryonů na jednotkový objem se škáluje jako a^{-3} . (V období, které následovalo po anihilaci elektronů a pozitronů, se poměr η již významně neměnil.) Na jeden atom vodíku tedy v období vzniku CMB připadal velmi velký počet fotonů. To znamená, že CMB mělo potenciál ionizovat baryonovou hmotu ve vesmíru i pro červené posuvy, pro které byla typická energie fotonů CMB výrazně menší než ε .

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Pro přesnější určení červeného posuvu období rekombinace nám poslouží *Sahova ionizační rovnice*³. Ta pro vodík nabývá tvaru

$$\frac{n''n_e}{n'} = \left[\frac{\sqrt{2\pi m_e k_B T_H}}{h} \right]^3 e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T_H}},$$

kde n'' je hustota počtu ionizovaných jader vodíku (tedy hustota počtu protonů), n_e je hustota počtu elektronů, n' je hustota počtu rekombinovaných atomů vodíku, m_e je klidová hmotnost elektronu, T_H je rovnovážná teplota směsi jader vodíku, elektronů a neutrálních atomů, ε je ionizační energie vodíku a h je Planckova konstanta. Sahova rovnice platí, je-li typická rychlost částic směsi výrazně menší než rychlost světla, jsou-li elektrony nedegenerované a je-li systém v rovnovážném stavu.

f) Naleznete číselnou hodnotu červeného posuvu z_{50} , která odpovídá době, kdy s elektrony zrekombovalo 50 % všech jader vodíku. Některé rovnice budete muset řešit graficky nebo numericky. Uvažujte, že baryonová hmota byla během rekombinace v tepelné rovnováze s fotony CMB. [4,5 b]

Označme jako $n = n' + n''$ celkovou hustotu počtu jader vodíku (zrekombinovaných i ionizovaných). Jelikož je vesmír jako celek elektricky neutrální, máme zároveň $n'' = n_e$. V termínech ionizačního poměru $x = n''/n$ tedy můžeme Sahovu rovnici zapsat jako

$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{n} \left[\frac{\sqrt{2\pi m_e k_B T_H}}{h} \right]^3 e^{-\frac{\varepsilon}{k_B T_H}}.$$

Jelikož předpokládáme tepelnou rovnováhu mezi baryonovou hmotou a fotony CMB, můžeme dosazovat $T_H = T = T_0 a^{-1}$. Máme rovněž $n = n_0 a^{-3}$. Celkem tedy dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{x^2}{1-x} = \beta a^{\frac{3}{2}} e^{-\gamma a} \equiv f(a), \quad (3)$$

kde koeficienty β, γ můžeme vyjádřit jako

$$\beta = \frac{1}{n_0} \left[\frac{\sqrt{2\pi m_e k_B T_0}}{h} \right]^3 = \frac{15}{8\pi^{\frac{7}{2}}} \left(\frac{2m_e c^2}{k_B T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \eta \doteq 4,35 \cdot 10^{22},$$

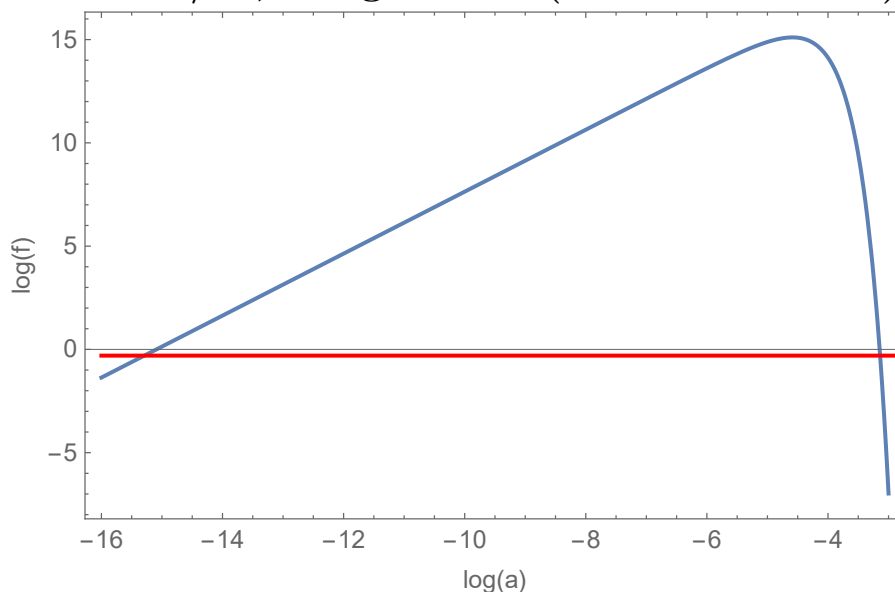
$$\gamma = \frac{\varepsilon}{k_B T_0} \doteq 5,78 \cdot 10^4.$$

(Při úpravě vztahu pro β jsme dosadili za n_0 pomocí obecného výsledku pro η z části c.) Pomocí rovnice (3) můžeme nalézt hodnotu a_{50} škálovacího faktoru, která odpovídá ionizačnímu poměru $x_{50} = 0,50$.

Abychom získali intuici pro kořeny rovnice (3), vykresleme na počítači graf funkce $f(a)$ v závislosti na a . Výsledek (v logaritmické škále) vidíme na obrázku 5, kde je zároveň červeně vynesena hodnota levé strany rovnice (3) při ionizačním poměru $x_{50} = 0,50$. Můžeme pozorovat, že pro obecnou fixní hodnotu levé strany bude mít rovnice (3) dvě řešení pro a . Pro zadanou hodnotu $x_{50} = 0,50$ ionizačního poměru je však fyzikální pouze větší z kořenů. Dle grafu by totiž menší řešení odpovídalo červenému posuvu, kdy by

³Jedná se o pokročilý výsledek statistické fyziky, pro odvození ze základních principů viz například <https://www.astro.princeton.edu/~gk/A403/notes.html>, kapitola 3.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 5: Logaritmický graf funkce $f(a)$ (modře). Červenou čarou je vyznačena hodnota $x_{50}^2/(1-x_{50}) = 0,50$ odpovídající ionizačnímu poměru $x_{50} = 0,50$.

protony i elektrony měly alespoň 10^{12} větší energii než v období rovnosti hustot hmoty a záření, a tedy by se pohybovaly ultrarelativisticky. Sahova rovnice by v takovémto období rozhodně neplatila.

Kořeny rovnice (3) můžeme nalézt například iterativně: nejdříve přepíšeme rovnici do tvaru

$$\gamma a = \frac{3}{2} \ln a + \ln \left(\beta \frac{1-x}{x^2} \right).$$

Druhý člen na pravé straně známe, do prvního členu při první iteraci dosadíme počáteční odhad a_0 škálovacího faktoru. Pravou stranu pak můžeme vyhodnotit, čímž získáme na levé straně nový odhad a_1 . Celý proces několikrát opakujeme: odhad a_{n+1} získáme jako

$$\gamma a_{n+1} = \frac{3}{2} \ln a_n + \ln \left(\beta \frac{1-x}{x^2} \right).$$

Pro $a_0 = 1$ zjistíme, že odhady konvergují k hodnotě $a_{50} \doteq 7,26 \cdot 10^{-4}$. Dostáváme tedy červený posuv $z_{50} \doteq 1380$. Vidíme, že počet fotonů připadajících na jeden atom vodíku ve vesmíru je natolik velký, že epocha rekombinace byla odsunuta hluboko do období dominance hmoty, kdy byla typická energie fotonů daleko menší, než by bylo potřeba k ionizaci vodíku.

Zbývá nám určit červený posuv z_{dec} , který odpovídá epoše, kdy se fotony CMB oddělily od baryonové hmoty (tzv. *decoupling epoch*). Vyjde-li poměr ionizovaných atomů v okamžiku oddělení dostatečně malý, ověříme tímto zároveň platnost předpokladu o tepelné rovnováze mezi baryonovou hmotou a fotony CMB během období rekombinace. Budeme uvažovat, že v raném vesmíru interagovaly fotony pouze s volnými nabitými částicemi hmoty, a to skrze *Thomsonův rozptyl*, jehož účinný průřez vypočteme jako

$$\sigma_{\text{T}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2} \right)^2.$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Zde q označuje elektrický náboj částice, m_0 její klidovou hmotnost a ϵ_0 je permitivita vakua. Oddělení záření CMB od baryonové hmoty nastalo v okamžiku, kdy střední volná dráha fotonů překonala poloměr c/H tzv. *Hubbleovy sféry*. Ten představuje odhad největší vzdálenosti mezi částmi vesmíru, které spolu mohly komunikovat.

g) Určete červený posuv z_{dec} odpovídající okamžiku oddělení fotonů CMB od baryonové hmoty (řešte opět buď graficky, nebo numericky). Kolik procent atomů bylo v tomto okamžiku stále v ionizovaném stavu? Pro výpočet Hubbleova-Lemaîtreova parametru H v obecném okamžiku vývoje vesmíru lze využít předpokladu, že průměrná hustota látky ve vesmíru byla vždy rovna kritické hustotě. [5 b]

Uvažujeme-li, že náš vesmír je plochý, byla jeho hustota ρ v okamžiku oddělení baryonové hmoty a fotonů CMB rovna kritické hustotě $3H^2/(8\pi G)$. Toho můžeme využít k vyjádření Hubbleova-Lemaîtreova parametru a tedy i poloměru Hubbleovy sféry pro červený posuv z_{dec} . Dostáváme

$$\frac{c}{H} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho}} = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{m},0}a_{\text{dec}}^{-3} + \Omega_{\text{r},0}a_{\text{dec}}^{-4}}}.$$

Zároveň vidíme, že dominantní efekt na střední volnou dráhu fotonů bude mít rozptyl fotonů na elektronech, neboť Thomsonův účinný průřez je nepřímo úměrný druhé mocnině klidové hmotnosti nabitě částice. Pro střední volnou dráhu pak dostáváme

$$l = \frac{1}{\sigma_{\text{T}}n_{\text{e}}} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_{\text{e}} c^2}{e^2} \right)^2 \frac{1}{n_0} \frac{a_{\text{dec}}^3}{x_{\text{dec}}}.$$

Společně se Sahovou rovnicí tedy dostáváme soustavu

$$\frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{\text{m},0}a_{\text{dec}}^{-3} + \Omega_{\text{r},0}a_{\text{dec}}^{-4}}} = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 m_{\text{e}} c^2}{e^2} \right)^2 \frac{1}{n_0} \frac{a_{\text{dec}}^3}{x_{\text{dec}}},$$

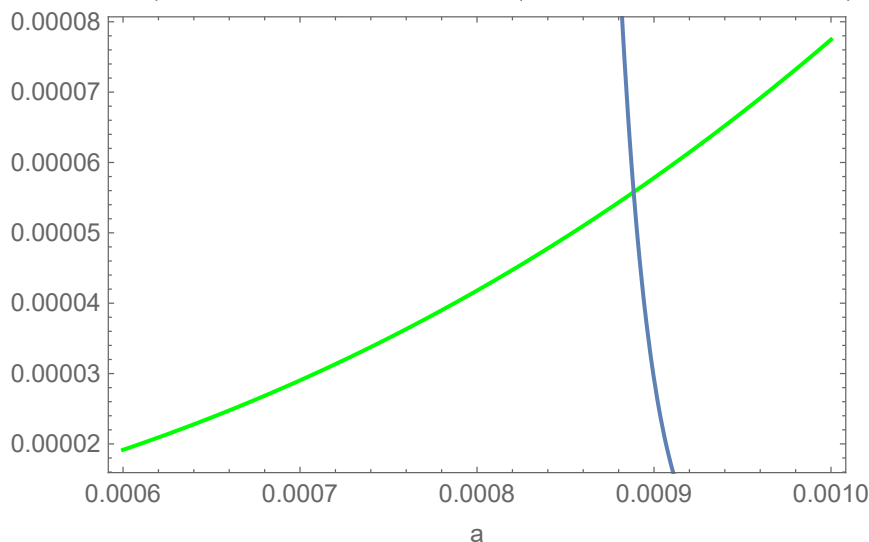
$$\frac{x_{\text{dec}}^2}{1 - x_{\text{dec}}} = \beta a_{\text{dec}}^{\frac{3}{2}} e^{-\gamma a_{\text{dec}}},$$

kterou řešíme pro x_{dec} a a_{dec} .

Ionizační poměr x_{dec} můžeme eliminovat vyjádřením z první rovnice a dosazením do Sahovy rovnice. Výslednou rovnicí pro a_{dec} můžeme řešit např. graficky jako na obrázku 6. Dostáváme kořen $a_{\text{dec}} \doteq 8,89 \cdot 10^{-4}$, a tedy $z_{\text{dec}} \doteq 1120$. Můžeme rovněž odečíst odpovídající ionizační poměr $x_{\text{dec}} \doteq 0,00744$. V okamžik oddělení baryonové hmoty a záření CMB tedy bylo ionizovaných už jen 0,7% atomů ve vesmíru. Odtud můžeme usuzovat, že předpoklad tepelné rovnováhy mezi baryonovou hmotou a zářením CMB během procesu rekombinace byl oprávněný.

Poznámka: Ve skutečnosti nastalo oddělení baryonové hmoty a záření CMB až při červeném posuvu 1090, protože ne všechny atomy vodíku rekombinovaly přímo do základního stavu. Vesmír rovněž obsahuje i těžší prvky, které rekombinovaly při vyšších červených posuvech.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 6: Grafické řešení Sahovy rovnice pro a_{dec} . Modrá křivka: pravá strana Sahovy rovnice (funkce $f(a)$). Zelená křivka: levá strana $x^2/(1-x)$ Sahovy rovnice po dosazení za x z podmínky na rovnost střední volné dráhy fotonů a poloměru Hubbleovy sféry.

D Signál a šum (praktická)

(max. 30 bodů)

Část I – Poměr signálu a šumu na CCD snímku

V první části úlohy si vyzkoušíte spočítat nejistotu při měření hvězdné velikosti pomocí CCD snímače. Dalekohled v tomto případě nemá okulár, místo něj promítáme obraz na mřížku pixelů. Ty přemění určitou část dopadajících fotonů na elektrony. Po uplynutí expozičního času převede snímač počty nasbíraných elektronů na číselnou hodnotu.

Výřez z jednoho takového snímku najdete na obrázku 7. V tabulce 1 jsou hodnoty všech pixelů z obrázku 7 v jednotkách ADU (Analog-Digital Units), které jsou úměrné počtu dopadajících fotonů. Expoziční čas byl $t = 60$ s. Hodnoty jsou součtem signálu z hvězdy, signálu z oblohy a šumu. Všimněte si, že hvězda není zobrazená přesně na jeden pixel.

a) Vyberte reprezentativní vzorek pixelů mimo hvězdu a spočítejte jejich průměrný signál s_{sky} v ADU. Vhodnou volbou můžou být třeba pixely podél okrajů výřezu. Spočítejte také odpovídající směrodatnou odchylku σ_{sky} . [6 b]

Dostaneme $n_{\text{sky}} = 56$ pixelů s celkovým signálem $S_{\text{sky}} = 995\,471$ ADU. Na jeden pixel dopadá

$$s_{\text{sky}} = \frac{S_{\text{sky}}}{n_{\text{sky}}} \doteq 17\,776 \text{ ADU}.$$

Směrodatná odchylka bude

$$\sigma_{\text{sky}} \doteq 98 \text{ ADU}.$$

b) Předpokládejme, že pixel, na který se zobrazila hvězda, má signál vyšší než $s_{\text{sky}} + 3\sigma_{\text{sky}}$. Určete součet S_{CCD} signálů ze všech pixelů s hvězdou. S pomocí výsledku předchozí úlohy od S_{CCD} odečtete signál pocházející z oblohy a uveďte výslednou hodnotu signálu z hvězdy S_* v ADU. [3 b]

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 1: Hodnoty v ADU odpovídající pixelům na snímku hvězdy pořízeného pomocí dalekohledu a CCD snímače. Od dat byly odečteny kalibrační snímky dark frame a flat field. Data jsou ke stažení ve formátu CSV na stránce https://olympiada.astro.cz/data/documents/2/11/1005_table.csv.

17723	17679	17744	17773	17843	17695	17735	17731	17700	17752	17856	18188	17587	17701	17812
17757	17649	17690	17722	17810	17863	18049	17888	17794	17799	17765	17964	17736	17533	17958
17873	17850	17492	17910	17931	17768	17816	17899	18019	17673	17782	17913	17749	17703	17965
17780	17799	17612	17930	17882	18024	17941	18008	18029	18018	17760	17856	17767	17735	17805
17840	18058	17920	17778	18085	18165	18419	18597	18328	18098	17960	17711	17625	17848	17687
17810	17912	17800	18040	17896	18593	19565	20905	20307	18997	18198	17977	17948	17799	17742
17709	17736	17940	18110	18271	19682	25172	36942	31303	21308	19105	18717	18141	17690	17743
17843	17817	17779	17888	18436	21100	29302	43715	40462	23169	19027	18652	17954	17884	17771
17795	17726	17863	17879	18527	19793	23437	31487	29847	20765	18464	18327	17963	17970	17756
17777	17882	17726	18173	18026	18656	20728	23322	21298	18734	18061	18026	17973	17851	17776
17789	17638	17734	18004	17981	18208	18688	19134	18523	18127	18179	17698	17860	17884	17823
17897	17677	17859	17732	17869	17883	17812	17881	18016	17931	17812	17885	18005	17645	17737
17699	17941	17759	17720	17783	17866	17877	17824	17970	17735	17742	17840	17700	17826	17858
17803	17820	17630	17790	17804	17746	17778	17802	17733	17959	17920	17829	17808	17968	17631
17793	17674	17882	17747	17699	17652	17638	17562	17779	17770	17793	17822	17767	17874	17876

Vybereme pixely se signálem $s_{\text{px}} > s_{\text{sky}} + 3\sigma_{\text{sky}} \doteq 18\,071$ ADU. Dostaneme $n = 51$ pixelů s celkovou hodnotou $S_{\text{CCD}} = 1\,097\,500$ ADU. Zajímá nás pouze signál z hvězdy, musíme tedy odečíst signál z oblohy

$$S_* = S_{\text{CCD}} - n s_{\text{sky}} = S_{\text{CCD}} - \frac{n}{n_{\text{sky}}} S_{\text{sky}} \doteq 190\,890 \text{ ADU}.$$

Doteď jsme používali jednotky ADU. Od výrobce snímače víme hodnotu zesílení $G = 1,3 \text{ e}^-/\text{ADU}$. To znamená, že každé ADU odpovídá tomuto počtu nasbíraných elektronů.

Pojďme se nyní zaměřit na zdroje šumu. Od hvězdy přichází jistý průměrný počet fotonů za sekundu. To ale neznamená, že každou sekundu můžeme zachytit přesně tento počet fotonů. Jejich vyzáření je totiž náhodný jev. Pravděpodobnost, že za daný časový interval dorazí z hvězdy k fotonů za předpokladu, že v průměru dorazí za daný časový interval n fotonů, popisuje *Poissonovo rozdělení*, jehož směrodatná odchylka je odmocninou z očekávané četnosti jevu. V našem případě to znamená, že šum signálu od hvězdy (v jednotkách počtu elektronů) je pro jeden pixel roven

$$\sigma_* = \sqrt{G s_*},$$

kde s_* je signál z hvězdy dopadající na jeden pixel. Obloha je podobně jako hvězda zdrojem šumu

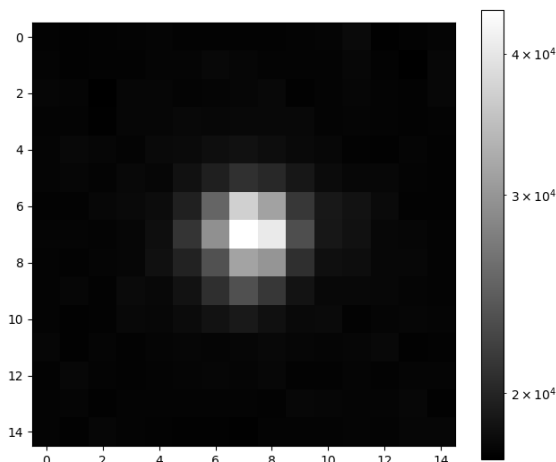
$$\sigma_s = \sqrt{G s_{\text{sky}}}.$$

K celkovému šumu dále přispívá termální šum snímače, tzv. *temný proud* (důsledek termálního pohybu elektronů). Změřili bychom ho i se zavřeným dalekohledem. Od výrobce CCD snímače víme hodnotu $D = 3,2 \text{ e}^-/\text{s/px}$, která udává počet elektronů, které nasbírá v průměru každý pixel za sekundu vlivem temného proudu. Hodnota odpovídající průměrnému příspěvku temného proudu byla od dat na obrázku 7 a v tabulce 1 odečtena. Jelikož se ale také jedná o součet více nezávislých náhodných jevů, příspěvek k šumu temného proudu opět podléhá Poissonovu rozdělení. Platí tedy

$$\sigma_D = \sqrt{Dt}.$$

Poslední příspěvek k šumu, který budeme uvažovat, pochází z vyčítací elektroniky, která převádí počty elektronů na hodnoty v ADU. Výrobce uvádí hodnotu $\sigma_R^2 = 28 \text{ e}^-/\text{px}$. Vyčítací šum jako jediný

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 7: Výřez snímku hvězdy pořízený pomocí dalekohledu a CCD snímače. Data byla opravena o kalibrační snímky dark frame a flat field.

zmíněný nezávisí na expozičním čase.⁴ Celkový šum je odmocnina ze součtu středních kvadratických odchylek pro jednotlivé druhy šumu a pro jednotlivé pixely, tedy

$$N = \sqrt{\sum_x \sigma_x^2}. \quad (4)$$

c) Spočítejte poměr signálu a šumu S/N , kde $S = S_*G$ a N je definované vztahem (4). Jako zdroje šumu uvažujete σ_* , σ_s , σ_{sky} , σ_D a σ_R . Nezapomeňte, že do celkového N přispívají všechny pixely, na které se zobrazuje hvězda. [3 b]

K šumu na CCD před odečtením signálu oblohy s_{sky} přispívají σ_* , σ_s , σ_D a σ_R . Měření s_{sky} je nezávislé na měření signálu z pixelů, kde je hvězda. Protože od pixelů s hvězdou odečítáme signál z oblohy, bude k šumu navíc přispívat i jeho statistická nejistota σ_{sky} . Tu jsme navíc spočítali v ADU a je jí nutné v sumě pro celkový šum násobit zesílením G . Je důležité rozlišit mezi σ_s a σ_{sky} . V prvním případě se jedná o šum způsobený Poissonovo statistikou přicházejících fotonů od oblohy detekovaných na pixelech s hvězdou. V druhém případě se jedná o směrodatnou odchylku signálu z oblohy mimo hvězdu. V ideálním případě by tato směrodatná odchylka měla zahrnovat všechny zdroje šumu zmíněné výše. Bereme-li signály z jednotlivých pixelů jako nezávislé, platí pro poměr signálu a šumu vztah

$$\frac{S}{N} = \frac{S_*G}{\sqrt{S_*G + ns_{\text{sky}}G + nDt + n\sigma_R^2 + n\sigma_{\text{sky}}^2}} = \frac{S_*G}{\sqrt{S_{\text{CCD}}G + nDt + n\sigma_R^2 + G^2n\sigma_{\text{sky}}^2}},$$

kde n je počet pixelů se signálem z hvězdy použitých k určení součtu S_* . Dosazením dostaneme výsledek

$$\frac{S}{N} \doteq 165.$$

⁴Nezapomeňme, že signály z hvězdy i oblohy jsou lineární funkcí expozičního času.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Jakou nejmenší změnu hvězdné velikosti Δm hvězdy můžeme změřit s poměrem S/N , který jste určili v předchozí části? Předpokládejte, že nejmenší možná změna Δm odpovídá změně síly signálu z S na $S + N$. Bude možné pozorovat pokles magnitudy pozorované hvězdy o 10 mmag? [3 b]

Použijeme Pogsonovu rovnici

$$\Delta m = 2,5 \log \frac{S + N}{S} \approx \frac{2,5}{\ln 10} \frac{N}{S} \approx 1,09 \frac{N}{S} \doteq 6,6 \text{ mmag}.$$

Pokles 10 mmag je větší než limit daný poměrem signálu a šumu, bude tedy možné ho pozorovat.

Část II – Binocular summation factor

V druhé části úlohy se pokusíme zjistit, kolikrát slabší objekty jsme schopni pozorovat, pokud místo jednoho optického přístroje použijeme dva nezávislé detektory, jejichž signály skládáme.

e) Za jasné bezměsíčné noci změřte hodnotu mezní hvězdné velikosti. Měření proveďte několikrát za sebou s co nejkratšími časovými odstupy, a to ve *dvou různých režimech*: při pozorování *oběma očima* a při pozorování *s jedním zakrytým okem*. Můžete postupovat například pomocí metody polygonů, jako v Úloze D *Krajského kola 21. ročníku AO kat. CD*. Případně si můžete vytvořit i vlastní polygony, nebo navrhnout vlastní metodu, která bude lépe odpovídat potřebám úlohy. Pokuste se co nejvíce eliminovat možné zdroje kognitivního biasu: například, používáte-li metodu polygonů, tak hvězdy v daném polygonu vždy počítejte nejdříve s jedním zakrytým okem a pak teprve s odkrytými oběma očima. Pro měření jedním okem používejte střídavě levé i pravé oko. Měření provádějte v rámci úhlově co nejmenší části oblohy. Vaši metodu a podmínky při měření detailně popište. [10 b]

f) Vámi naměřený rozdíl mezních hvězdných velikostí se pokuste porovnat s hodnotou, kterou byste očekávali na základě analýzy poměru signálu a šumu. [5 b]

Tipy: Předpokládejte, že mozek hvězdu považuje za rozlišenou, pokud poměr S/N překročí jistou kritickou hodnotu Δ . Signály z jednotlivých očí považujte za nezávislé.

Označme jako S_1 , resp. S_2 počty fotonů, které přichází od nejslabších hvězd, které jsme schopni registrovat jedním, resp. dvěma očima za jeden detekční interval t oka (budeme předpokládat obnovovací frekvenci oka $\simeq 50$ Hz, tedy $t \simeq 0,02$ s). Z podmínky mezní rozlišitelnosti pro oba případy pak plyne, že

$$\Delta = \frac{S_1}{N_1} = \frac{2S_2}{N_2}, \quad (5)$$

kde N_1 , resp. N_2 jsme označili celkové hodnoty šumu při pozorování jedním, resp. dvěma očima. O mezní hodnotě Δ poměru signálu a šumu zatím nebudeme nic předpokládat. Budeme rovněž pro jednoduchost uvažovat, že průměr pupily nezakrytého oka se nezmění, pokud druhé oko odkryjeme: v takovém případě jsou hodnoty S_1 , resp. S_2 přímo úměrně jasnostem (světelným tokům) nejslabších hvězd, které můžeme pozorovat jedním, resp. dvěma očima.

Krajské kolo 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Zdroje šumu si můžeme rozdělit na dvě části: 1. na poissonovský šum, který je spojen s náhodností okamžiků příchodu fotonů od hvězdy a 2. na šum σ , který se jednoduše škáluje s počtem nezávislých detektorů (například šum, který vzniká při nezávislé detekci v každém oku). Pro jednoduchost budeme zanedbávat všechny šum R , který je nezávislý na počtu detektorů (jako například šum, který vzniká při zpracování signálů v mozku). Můžeme pak psát

$$N_1 = \sqrt{S_1 + \sigma^2}, \quad (6a)$$

$$N_2 = \sqrt{2S_2 + 2\sigma^2}. \quad (6b)$$

Dosažením vztahů (6) do (5) pak dostaneme

$$\frac{S_1}{\sqrt{S_1 + \sigma^2}} = \frac{2S_2}{\sqrt{2S_2 + 2\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2}S_2}{\sqrt{S_2 + \sigma^2}}.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit pro S_2 v závislosti na S_1 a σ . Dostáváme výsledek

$$S_2 = \frac{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + 8\frac{\sigma^2}{S_1} + 8(\frac{\sigma^2}{S_1})^2})}{1 + \frac{\sigma^2}{S_1}} S_1 \equiv \gamma S_1. \quad (7)$$

Vidíme, že poměr γ jasností (světelných toků) nejslabších hvězd, které jsme schopni pozorovat jedním okem, resp. dvěma očima závisí na charakteru hodnoty poměru σ^2/S šumu σ detektoru a poissonovského šumu \sqrt{S} nejslabší hvězdy, kterou můžeme okem pozorovat. Máme-li $\sigma^2/S \ll 1$, potom bychom dostali

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1, \quad (\text{dominance poissonovského šumu})$$

zatímco pro $\sigma^2/S \gg 1$ bychom dostali

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} S_1. \quad (\text{dominance šumu detektoru})$$

Jsou-li oba zdroje šumu srovnatelné, bude poměr γ nabývat hodnoty z intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Pokusme se nakonec odhadnout, který z výše popsaných případů ve skutečnosti nastává. Uvažujeme-li typickou hodnotu MHV 5 mag a průměr pupily adaptovaného lidského oka 8 mm, můžeme pomocí Pogsonovy rovnice a srovnáním se Sluncem odhadnout, že za jeden detekční interval $t \simeq 0,02$ s dopadnou na sítnici oka řádově stovky fotonů vyzářených hvězdou. Zároveň vidíme, že platí

$$\Delta = \frac{S}{\sqrt{S + \sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{S}}} \sqrt{S} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta^2}{S} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma^2}{S}}. \quad (8)$$

Očekáváme-li kritickou hodnotu Δ poměru signálu a šumu v řádu jednotek, bude Δ^2 v řádu desítek a tedy $\Delta^2/S \ll 1$. Ze vztahu (8) pak můžeme dovodit, že při určování MHV pouhým okem lze očekávat dominanci šumu detektoru, a tedy hodnotu

$$\gamma \lesssim \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zároveň vidíme, že s lepšími se podmínkami (vyšší MHV) by měl poměr Δ/\sqrt{S} růst a měli bychom tedy pozorovat nižší hodnotu $\gamma \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.