



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz>. Přihlašovací údaje získají úspěšní řešitelé školního kola e-mailem nebo je dostanou od svého učitele. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **19. 1. 2024** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Gravitační kontrakce

(max. 20 bodů)

Jedním ze základních předpokladů výpočtu povrchové teploty planet ve Sluneční soustavě je přesná rovnováha mezi zářivým výkonem, který planeta přijímá od Slunce a zářivým výkonem, který odevzdává do okolí (ať už formou termálního záření, nebo skrze záření odražené od povrchu planety). Provedeme-li ovšem explicitní porovnání přijatého a odevzdaného zářivého výkonu pro planetu Jupiter, dojdeme k poněkud překvapivému závěru.

V následujících úlohách budeme Jupiter pro jednoduchost považovat za ideální homogenní kouli plynu o hmotnosti $M_J = 1,898 \cdot 10^{27}$ kg a poloměru $R_J = 69\,911$ km, která obíhá kolem Slunce po kruhové oběžné dráze ve vzdálenosti $a_J = 5,204$ au.

a) Vypočtete číselně specifický zářivý výkon $l_J = I_J / (4\pi R_J^2)$ přicházející od Slunce, zachycený průřezem planety Jupiter (kde I_J je celkový zachycený zářivý výkon). Získanou hodnotu porovnejte se specifickým zářivým výkonem $l'_J = 21 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ odevzdaným (odraženým nebo vyzářeným) Jupiterem do okolí, který naměřila sonda Cassini při svém průletu kolem planety v roce 2000.

Pro specifický zářivý výkon zachycený průřezem planety píšeme

$$l_J = \frac{I_J}{4\pi R_J^2} = \frac{L_\odot}{4\pi a_J^2} \frac{\pi R_J^2}{4\pi R_J^2} = \frac{1}{4} \frac{L_\odot}{4\pi a_J^2},$$

kde L_\odot značí zářivý výkon Slunce. Číselně vychází $l_J \doteq 13 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Máme tedy $l'_J > l_J$.

Měli byste najít, že $l'_J > l_J$, neboli, že planeta Jupiter do svého okolí vyzařuje více termální energie, než absorbuje od Slunce. Zároveň je známo, že Jupiter není dostatečně hmotný na to, aby mohly v jeho nitru probíhat termonukleární reakce. Jedním z možných vysvětlení je, že přebytečný výkon se uvolňuje v důsledku gravitačního smršťování planety. Tímto jevem se poprvé zabývali v druhé polovině 19. století Helmholtz a Kelvin, kteří se takto snažili identifikovat zdroj energie, který pohání Slunce a ostatní hvězdy. Ve zbylých částech úlohy se pokusíme určit míru smršťování Jupiteru potřebnou k vysvětlení detekovaného přebytečného zářivého výkonu a také vypočítat jeho skutečnou efektivní povrchovou teplotu.

Celkovou energii jakéhokoliv gravitačně vázaného systému lze rozdělit na potenciální složku E_p a na kinetickou složku E_k . Zatímco potenciální energii systému jsme často schopni kvalifikovaně odhadnout na základě znalosti rozložení hmoty v systému, přímý výpočet kinetické složky nemusí být vůbec přímočarý. Naštěstí můžeme s výhodou využít platnosti tzv. *virialové věty*¹, která říká, že střední

¹Virialovou větu poprvé formuloval v roce 1870 německý fyzik a matematik Rudolf Clausius.

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

hodnota kinetické energie jakéhokoliv stabilního gravitačně vázaného systému je rovna minus jedné polovině jeho celkové gravitační potenciální energie, neboli

$$\langle E_k \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle.$$

Dříve než se pustíme do aplikace viriálové věty na analýzu gravitační kontrakce Jupiteru, ověříme platnost tohoto tvrzení na jednoduchém příkladu problému dvou těles.

b) Odvodte vztahy pro celkovou kinetickou energii E_k a potenciální energii E_p systému dvou těles o hmotnostech m_1 a m_2 , které obíhají po kruhových drahách kolem společného hmotného středu ve vzájemné vzdálenosti a . Výsledky vyjádřete obecně pomocí G, m_1, m_2, a . Zkontrolujte platnost viriálové věty.

Nejdříve jednoduše vyjádříme

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{a}.$$

Pro celkovou kinetickou energii píšeme

$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2,$$

kde v_1 a v_2 jsou oběžné rychlosti složek. Např. pro v_1 můžeme psát (označme a_1 a a_2 vzdálenosti obou složek od hmotného středu a ω úhlovou rychlost oběhu složek, platí přitom $a = a_1 + a_2$)

$$v_1^2 = \omega^2 a_1^2 = \omega^2 a^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a} \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{Gm_2}{a} \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

kde v prvním kroku jsme vyjádřili a_1 pomocí a uvážením podmínky $m_1 a_1 = m_2 a_2$ pro polohu hmotného středu a v druhém kroku jsme dosadili ze 3. Keplerova zákona

$$\omega^2 a^3 = G(m_1 + m_2).$$

Celkem tedy máme

$$E_k = \frac{1}{2}m_1 \frac{Gm_2}{a} \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \frac{1}{2}m_2 \frac{Gm_1}{a} \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{Gm_1m_2}{2a} = -\frac{1}{2}E_p,$$

v souladu s viriálovou větou.

c) Určete celkovou energii U_J Jupiteru, za předpokladu, že se jedná o gravitačně vázaný systém mnoha částic v rovnováze.² Výsledek vyjádřete obecně pomocí G, M_J a R_J .

Nápověda: grav. potenciální energii homogenní koule o hmotnosti M a poloměru R spočteme jako

$$E_{p,koule} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

²Předpokládejte, že proces gravitačního smršťování lze v této situaci považovat za souslednost rovnovážných stavů.



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Pro celkovou energii pomocí viriálové věty píšeme

$$U_J = \langle E_{k,J} \rangle + \langle E_{p,J} \rangle = \frac{1}{2} \langle E_{p,J} \rangle = -\frac{3}{10} \frac{GM_J^2}{R_J}.$$

d) Určete rychlost změny poloměru Jupiteru (číselně v mm za rok), která je potřebná k vysvětlení pozorovaného přebytku termálního zářivého výkonu planety. Můžete předpokládat, že velikost změny poloměru $|\Delta R_J|$ za čas $\Delta t = 1$ rok je velmi malá v porovnání s poloměrem R_J Jupiteru.

Označme ΔU_J změnu celkové energie Jupiteru v důsledku změny ΔR_J jeho poloměru. Konkrétně budeme uvažovat kontrakci planety, tedy $\Delta R_J < 0$ a budeme tedy očekávat $\Delta U_J < 0$. Budeme předpokládat, že $|\Delta U_J| \ll |U_J|$ a $|\Delta R_J| \ll R_J$. Máme

$$\Delta U_J = -\frac{3}{10} GM_J^2 \left(\frac{1}{R_J + \Delta R_J} - \frac{1}{R_J} \right) = -\frac{3}{10} \frac{GM_J^2}{R_J} \left[\left(1 + \frac{\Delta R_J}{R_J} \right)^{-1} - 1 \right].$$

Jelikož uvažujeme $|\Delta R_J|/R_J \ll 1$, můžeme použít binomickou aproximaci, abychom dostali

$$\Delta U_J \approx -\frac{3}{10} \frac{GM_J^2}{R_J} \left[\left(1 - \frac{\Delta R_J}{R_J} \right) - 1 \right] = \frac{3}{10} \frac{GM_J^2}{R_J^2} \Delta R_J.$$

Pokles energie $|\Delta U_J|$ při kontrakci poloměru ΔR_J musíme vyvážit přebytkem termální energií $4\pi R_J^2 (l'_J - l_J) \Delta t$ vyzářenou v odpovídajícím časovém intervalu Δt . Celkem tedy

$$\Delta R_J = -\frac{40\pi}{3} \frac{R_J^4}{GM_J^2} (l'_J - l_J) \Delta t.$$

Pro $\Delta t = 1$ rok dostaneme číselně $\Delta R_J \doteq -1$ mm.

Na základě dat nasbíraných při průletu sondy Cassini byla rovněž určena hodnota Bondova albeda Jupiteru jako $A_J = 0,503$.

e) Určete efektivní povrchovou teplotu T_J Jupiteru (číselně v K). Jak by se výsledek změnil v případě, kdy bychom nezapočítali energii čerpanou z gravitační kontrakce?

Specifický výkon $l_{J,\text{ref}}$ odražený od povrchu Jupiteru spočteme pomocí Bondova albeda $l_{J,\text{ref}} = A_J l_J$. Můžeme pak psát Stefanův-Boltzmannův zákon ve tvaru

$$l'_J - l_{J,\text{ref}} = \sigma T_J^4,$$

odkud

$$T_J = \sqrt[4]{\frac{l'_J - A_J l_J}{\sigma}} \doteq 126 \text{ K}.$$

Pokud bychom ignorovali energii čerpanou z gravitační kontrakce, dostali bychom efektivní teplotu $\sqrt[4]{(1 - A_J)(l_J/\sigma)} \doteq 103$ K.

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Prozkoumejme i možnost, že by gravitační smršťování mohlo představovat zdroj energie pro Slunce, jako navrhovali Helmholtz a Kelvin. Pro jednoduchost předpokládejte, že Slunce je homogenní koule o hmotnosti $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg, poloměru $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5$ km a zářivém výkonu $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$ W.

f) Vypočtete (číselně v letech), za jak dlouho by se poloměr Slunce zmenšil na polovinu jeho současné hodnoty, pokud by gravitační kontrakce obstarávala konstantní zářivý výkon L_{\odot} . Je gravitační kontrakce dobrým vysvětlením pro pozorovaný zářivý výkon Slunce?

Pro hledanou dobu τ platí

$$L_{\odot}\tau = \frac{3}{10}GM_{\odot}^2 \left(\frac{2}{R_{\odot}} - \frac{1}{R_{\odot}} \right) = \frac{3}{10} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}},$$

tedy

$$\tau = \frac{3}{10} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}L_{\odot}} \doteq 9,4 \text{ mil. let.}$$

Pozorujeme, že poloměr Slunce by se významně měnil na časové škále, která je výrazně kratší, než je předpokládané stáří Sluneční soustavy. Zdrojem energie Slunce tedy musí být jiný fyzikální mechanismus. Dnes již víme, že se jedná o termonukleární fúzi.

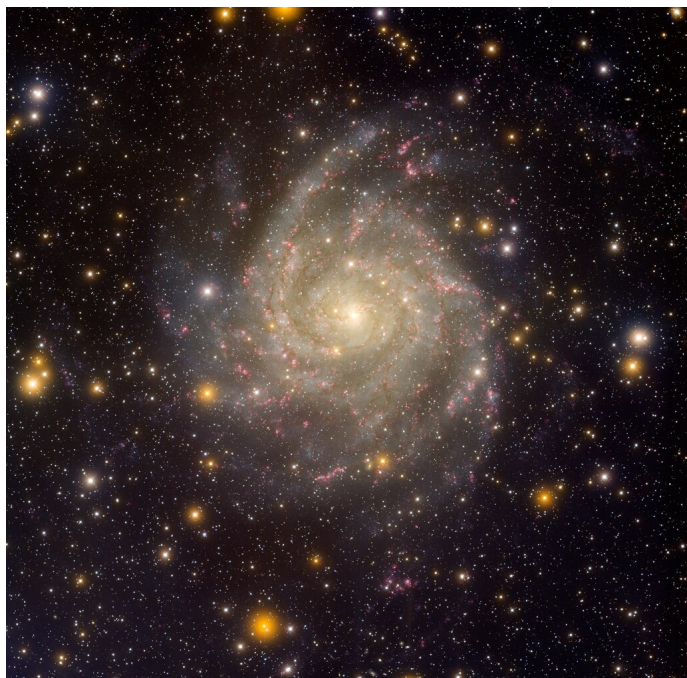
C Skrytá galaxie

(max. 20 bodů)

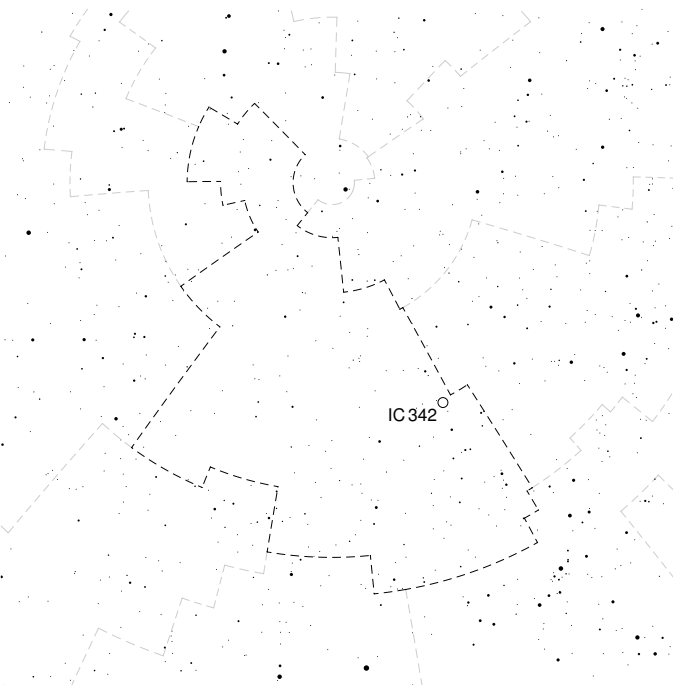
Cílem této úlohy bude na konkrétním příkladu spirální galaxie IC 342 (obr. 1) ilustrovat, jak dokáže mezihvězdná extinkce – zeslabení záření v důsledku absorpce nebo rozptylu na mezihvězdném prostředí – ovlivnit zářivý tok a výrazně tak zkomplikovat pozorování astronomických objektů. Galaxie IC 342, kterou bychom našli na severní obloze v souhvězdí Žirafy, se nám promítá do roviny Mléčné dráhy a její světlo je tedy výrazně ovlivněno extinkcí na difuzním mezihvězdném prostředí naší Galaxie (ang. diffuse interstellar medium, neboli *diffuse ISM*). Jedná se o poměrně slabou galaxii: ve viditelném oboru spektra bychom pro ni naměřili hvězdnou velikost $V_{\text{IC 342}} = 8,4$ mag. V následujících úkolech nicméně ukážeme, že nebýt vlivu extinkce, jednalo by se o jednu z nejvýraznějších galaxií na obloze, jejíž pozornost by zcela jistě neušla ani Charlesi Messierovi. Napovídá tomu ostatně její úhlová velikost, která ve viditelném oboru dosahuje $21,4' \times 20,9'$, což je např. více než v případě galaxie M 81 ve Velké medvědici.

Chceme-li být schopni odvodit co nejvíce charakteristik daného astronomického objektu, měli bychom v ideálním případě získat jeho spektrum, tj. změřit množství záření, které k nám od objektu přichází na jednotlivých vlnových délkách. V mnoha případech ovšem máme k dispozici pouze méně kompletní informaci ve formě hvězdných velikostí objektu v jednotlivých *fotometrických filtrech*. Ty se vyznačují selektivní propustností v určitém pásmu vlnových délek a poskytují tedy poněkud hrubší informaci o tom, kolik záření k nám od objektu přichází v různých oblastech spektra. Fotometrický filtr X typicky charakterizujeme efektivní vlnovou délkou λ_X středu pásma propustnosti a jeho FWHM šířkou $\Delta\lambda_X$ (full width at half maximum). Efektivní vlnové délky vybraných filtrů jsou shrnuty v tabulce 1.

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



(a) Snímek galaxie IC 342 pořízený v roce 2006 dalekohledem Mayall 4-meter Telescope na Kitt Peak National Observatory v Arizoně.



(b) Umístění galaxie IC 342 na noční obloze.

Obrázek 1: Ilustrace k úloze C.

Tabulka 1: Efektivní vlnové délky některých fotometrických filtrů. Filtry U, B, V, R a I bereme z Johnsonova-Cousinova systému, filtry r a i z poněkud méně používaného Thuanova-Gunnova systému (viz např. R. A. Wade, J. G. Hoessel, J. H. Elias, and J. P. Huchra: *A Two-Color Photometric System for the Near Infrared*, PASP, Vol. 91, 1979, [doi:10.1086/130435](https://doi.org/10.1086/130435)).

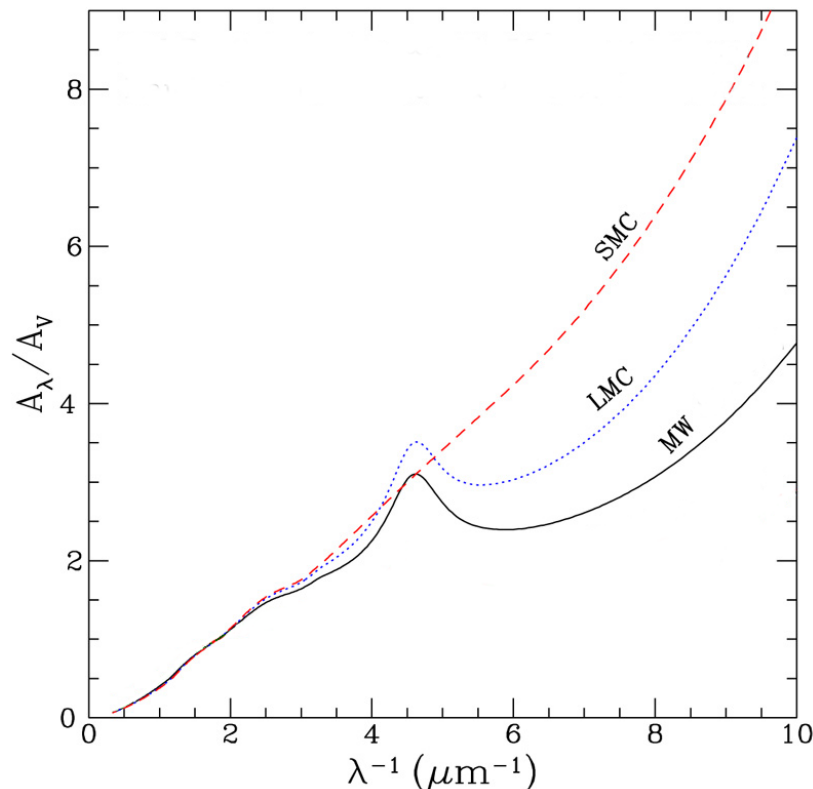
X	U	B	V	R	I	r	i
$\frac{\lambda_x}{\text{nm}}$	366,3	436,1	544,8	640,7	798,0	650	820

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Pozorovanou hvězdnou velikost objektu ve filtru X označme jako X . Pokud zároveň označíme X_0 hvězdnou velikost objektu neovlivněnou mezihvězdným prostředím (tzv. *vlastní* hvězdnou velikost), definujeme *extinkci* A_X ve filtru X jako

$$A_X = X - X_0.$$

Jelikož mezihvězdné prostředí interaguje různě se zářením šířícím se od objektu k pozorovateli na různých vlnových délkách, závisí obecně hodnota extinkce na efektivní vlnové délce λ_X filtru³. Toto tvrzení je podpořeno grafem na obr. 2, kde je vynesena závislost poměru A_λ/A_V na $1/\lambda$, neboli tzv. *křivka extinkce*. Je empirickým faktem, že tato křivka nezávisí na konkrétním pozorovaném objektu nebo jeho vzdálenosti od pozorovatele, pouze na lokálních vlastnostech částic difúzního ISM nacházejícího se mezi objektem a pozorovatelem. Jak je navíc patrné z obr. 2, křivky extinkce pro ISM v různých galaxiích jsou prakticky totožné až do blízké UV oblasti spektra a sdílejí vlastnost $A_\lambda/A_V \rightarrow 0$ pro $\lambda \rightarrow \infty$: v tomto režimu dochází k Rayleighovu rozptylu fotonů na částicích ISM, jehož míra je ovlivněna pouze jejich velikostí a je nepřímo úměrná čtvrté mocnině vlnové délky. Obecně extinkce blokuje krátkovlnnou („modrou“) část spektra více než dlouhovlnnou a způsobuje tedy efektivní „zčervenání“ pozorovaných objektů. Jak uvidíme v úkolech níže, určení míry tohoto zčervenání bude velmi důležité ke změření celkové extinkce směrem k danému objektu.



Obrázek 2: Křivky extinkce pro ISM v galaxiích Místní skupiny. Povšimněme si univerzality křivek v infračerveném, viditelném a blízkém UV oboru spektra. Adaptováno z A. Li: *Dust in Active Galactic Nuclei*, in *The Central Engine of Active Galactic Nuclei*, ASP Conference Series, Vol. 373, 2007, [arXiv:0808.4117](https://arxiv.org/abs/0808.4117).

³Tuto závislost budeme často zkráceně zapisovat jako A_λ .



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Abychom kvantifikovali barvu objektu a její případnou změnu v důsledku extinkce, definujeme tzv. barevný index. Uvážíme-li dva různé fotometrické filtry X a Y , můžeme zadefinovat tzv. *pozorovaný barevný index* $(X - Y)$ jako prostý rozdíl pozorovaných hvězdných velikostí $X - Y$ v daných filtrech. Jelikož se jedná o míru rozdílu vyzařování objektů v různých oblastech spektra, je přirozené mluvit o sadě barevných indexů pro různé filtry jako o „barvě“ objektu. Podobně definujeme *vlastní barevný index* $(X - Y)_0$ jako rozdíl vlastních hvězdných velikostí $X_0 - Y_0$ (neovlivněných extinkcí). Vlastní barevný index závisí pouze na teplotě hvězdy a pro různé spektrální třídy ho můžeme nalézt v tabulkách. Konečně změnu barvy objektu zapříčiněnou extinkcí vyjádříme pomocí tzv. *barevného excesu*, který definujeme jako rozdíl pozorovaného a vlastního barevného indexu, neboli

$$E(X - Y) = (X - Y) - (X - Y)_0.$$

a) Napište vztah pro výpočet $E(X - Y)$ pomocí extinkcí A_X a A_Y ve filtrech X a Y .

Přeuspořádáním členů dostaneme

$$E(X - Y) = (X - Y) - (X_0 - Y_0) = (X - X_0) - (Y - Y_0) = A_X - A_Y.$$

Pro mnohé hvězdy je barevný excés snadno měřitelnou veličinou, neboť spektrální typ (a tedy i vlastní barevný index) lze typicky nezávisle určit z intenzity absorpčních čar.

b) Ukažte, že můžeme psát $A_V = R_V E(B - V)$, kde hodnota koeficientu R_V závisí pouze na lokálních vlastnostech ISM. Pomocí křivky extinkce na obr. 2 určete číselnou hodnotu R_V pro naši Galaxii.

Píšeme

$$E(B - V) = A_B - A_V = \left(\frac{A_B}{A_V} - 1 \right) A_V,$$

kde poměr $\frac{A_B}{A_V}$ je funkční hodnotou křivky extinkce v bodě $1/\lambda = (1/436,1) \text{ nm}^{-1}$ a závisí tedy pouze na lokálních vlastnostech ISM. Ukázali jsme tedy, že lze psát

$$A_V = R_V E(B - V),$$

kde

$$R_V = \left(\frac{A_B}{A_V} - 1 \right)^{-1}$$

závisí pouze na lokálních vlastnostech ISM. Z křivky extinkce můžeme odečíst hodnotu $\frac{A_B}{A_V} \doteq 1,32$ a dostáváme tedy přibližně $R_V \doteq 3,1$.

Celkovou extinkci tedy můžeme pro danou hvězdu určit na základě znalosti jejího barevného excesu (míry zčervenání). Z vašeho postupu by zároveň mělo být patrné, že podobný empirický vztah můžeme odvodit pro libovolné dva filtry: podobným způsobem bychom mohli získat např. vztahy

$$A_r = 3,7E(r - i),$$

$$A_V = 5,3E(r - i),$$

které se nám budou hodit vzápětí.

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

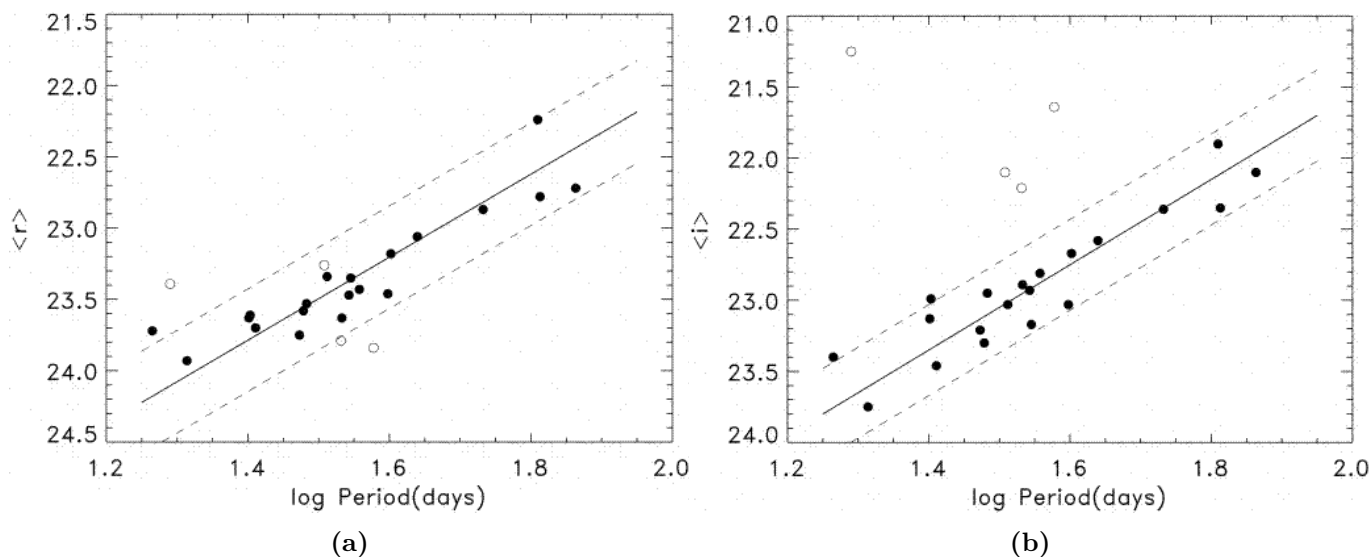
Abychom zjistili celkovou míru extinkce ve směru ke galaxii IC 342, určíme nejdříve barevný exces ve filtrech r a i: ne však na základě znalosti spektrálního typu hvězd (jak jsme nastínili výše), nýbrž za pomoci vztahu perioda – zářivý výkon pro *cefeidy* v této galaxii. Jedná se o pulsující proměnné hvězdy, u kterých fyzika jejich pulsace (tzv. *Eddingtonův kappa-mechanismus*) zajišťuje vazbu mezi periodou pulsace a jejich střední absolutní hvězdnou velikostí⁴. Znalost absolutní míry vyzařování cefeidy tedy můžeme získat prostým měřením její periody pulsace. Konkrétně pro střední absolutní hvězdné velikosti $\langle M_r \rangle$ a $\langle M_i \rangle$ ve filtrech r a i můžeme psát

$$\langle M_r \rangle = -2,91 \left(\log \frac{P}{d} - 1 \right) - 4,04,$$

$$\langle M_i \rangle = -3,00 \left(\log \frac{P}{d} - 1 \right) - 4,06.$$

Za chvíli se přesvědčíme, že přidáme-li k tomu navíc měření střední *pozorované* hvězdné velikosti cefeidy ve filtrech r a i, budeme mít pohromadě dostatek informací nejen k určení vzdálenosti cefeidy, ale i celkové extinkce mezi pozorovatelem a cefeidou.

Na obr. 3 vidíme výsledky pozorování 20 cefeid patřících do galaxie IC 342. Zatímco na horizontálních osách jsou vyneseny hodnoty logaritmu periody pulsace, na vertikálních osách vidíme hodnoty středních pozorovaných hvězdných velikostí $\langle r \rangle$ a $\langle i \rangle$ jednotlivých cefeid ve filtrech r a i. Ve zbývajících úkolech pro jednoduchost předpokládejte, že záření přicházející od objektů v galaxii IC 342 je ovlivněno extinkcí pouze na ISM uvnitř Mléčné drahy⁵. Vzdálenost cefeid považujte za identickou se vzdáleností galaxie IC 342 jako celku.



Obrázek 3: Závislost perioda – pozorovaná hvězdná velikost pro 20 cefeid z galaxie IC 342 (a) ve filtru r, (b) ve filtru i. Data byla získána pomocí 3,5metrového dalekohledu WIYN na Kitt Peak National Observatory a Arizoně. Adaptováno ze A. Saha, J. Claver, and J. G. Hoessel: *Cepheids and Long-Period Variables in IC 342*, AJ, Vol. 124, 2002, doi:10.1086/341649.

c) Pomocí vztahu perioda – absolutní hvězdná velikost a grafů na obr. 3 určete hodnotu (v mag)

⁴Definujeme jako hvězdnou velikost objektu ve vzdálenosti 10 pc *neovliněnou* extinkcí.

⁵Jedná se o rozumné zjednodušení, neboť galaxii IC 342 pozorujeme téměř shora („face-on“).



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

pozorovaného modulu vzdálenosti $\mu_{r, IC\ 342} = \langle r \rangle - \langle M_r \rangle$ ve filtru r pro cefeidy v galaxii IC 342. Zopakujte pro pozorovaný modul vzdálenosti $\mu_{i, IC\ 342}$ ve filtru i.

Stačí určit vertikální posunutí lineární závislosti fitu v grafu na obr. 3a a lineární závislosti $\langle M_r \rangle$ na $\log \frac{d}{\text{pc}}$, která je uvedena v zadání. Číselně vychází $\mu_{r, IC\ 342} \doteq 29,0$ mag, pro filtr i podobně dostaneme $\mu_{i, IC\ 342} \doteq 28,6$ mag.

d) Vyjádřete pozorovaný modul vzdálenosti μ_r ve filtru r obecně pomocí vzdálenosti d objektu a celkové extinkce A_r ve filtru r směrem k objektu. Zopakujte pro filtr i.

Pro filtry r a i můžeme psát

$$\langle r_0 \rangle - \langle M_r \rangle = 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 5,$$

$$\langle i_0 \rangle - \langle M_i \rangle = 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 5,$$

kde $\langle r_0 \rangle$ a $\langle i_0 \rangle$ jsou střední hvězdné velikosti dané cefeidy neovlivněné extinkcí. Dosadíme-li $\langle r_0 \rangle = \langle r \rangle - A_r$ a $\langle i_0 \rangle = \langle i \rangle - A_i$, dostáváme vztahy

$$\mu_r = 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 5 + A_r,$$

$$\mu_i = 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 5 + A_i.$$

e) Vyjádřete barevný exces $E(r - i)$ pomocí pozorovaných modulů vzdálenosti μ_r a μ_i . Určete jeho číselnou hodnotu (v mag) pro galaxii IC 342.

Odečteme-li od sebe vztahy pro pozorované moduly vzdálenosti μ_r a μ_i odvozené v předchozím úkolu, dostaneme

$$\mu_r - \mu_i = A_r - A_i = E(r - i).$$

Barevný exces $E(r - i)$ tedy získáme jako rozdíl pozorovaných modulů vzdálenosti ve filtrech r a i. Pro galaxii IC 342 číselně dostaneme $E(r - i)_{IC\ 342} \doteq 0,4$ mag.

f) Pomocí empirických vztahů dopočtete extinkce $A_{r, IC\ 342}$, $A_{i, IC\ 342}$ a $A_{V, IC\ 342}$ směrem ke galaxii IC 342 ve filtrech r, i a V. Jakou hvězdnou velikost ve filtru V by galaxie IC 342 měla, pokud by záření přicházející od ní nebylo ovlivněno extinkcí? Porovnejte se známými galaxiemi na obloze.

Dostáváme

$$A_{r, IC\ 342} = 3,7 \cdot 0,4 \text{ mag} \doteq 1,5 \text{ mag},$$

$$A_{V, IC\ 342} = 5,3 \cdot 0,4 \text{ mag} \doteq 2,1 \text{ mag}$$

a konečně $A_{i, IC\ 342} = A_{r, IC\ 342} - E(r - i)_{r, IC\ 342} \doteq 1,1$ mag. Nebýt extinkce, měla by tedy galaxie IC 342 ve filtru V hvězdnou velikost $(8,4 - 2,1) \text{ mag} \doteq 6,3$ mag. Byla by tak na obloze o něco jasnější (a úhlově větší), než známá galaxie M 81.



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

g) Určete vzdálenost galaxie IC 342 (číselně v pc).

Modul vzdálenosti opravený o extinkci určíme jako

$$\mu_0 = \mu_r - A_r = \mu_i - A_i.$$

Pro galaxii IC 342 číselně dostáváme $\mu_{0, IC\ 342} \doteq 27,5$ mag, a tedy vzdálenost $d_{IC\ 342} \doteq 3,2$ Mpc.

D Galaktický vodík v zenitu (praktická)

(max. 30 bodů)

V této úloze si naměříme H I emisi ze spirálních ramen naší Galaxie. Využijeme k tomu volně dostupného rádiového dalekohledu PICTOR, pictortelescope.com, situovaného v Athénách. I pokud nesplníte první části této úlohy, neváhejte si s ním zkusit pořídit měření!

a) Dalekohled PICTOR v současném režimu celoročně míří do zenitu. Uvažujte zeměpisnou polohu Athén $\phi_A = 37^\circ 59'$ s.š., $\lambda_A = 23^\circ 44'$ v.d. Na jaké deklinaci lze v Athénách pozorovat s dalekohledem PICTOR?

Body v zenitu mají deklinaci $\delta = \phi_A \doteq 37^\circ 59'$.

b) Spočítejte rektascenzi bodů na galaktickém rovníku, které lze pozorovat v Athénách v zenitu. Využijte k tomu deklinaci $\delta_{NGP} = 27^\circ 7,8'$ a rektascenzi $\alpha_{NGP} = 12^h 51,4^m$ severního galaktického pólu. Určete v jakých souhvězdích se tyto body nacházejí.

Je třeba si nakreslit sférický trojúhelník, jehož vrcholy jsou severní galaktický pól, severní světový pól a odpovídající bod na galaktickém rovníku. Jedná se o úlohu SSS, tj. všechny strany jsou zadány. V úhlové míře mají délky $\frac{\pi}{2} - \delta_{NGP}$ (oblouk hlavní kružnice spojující severní světový pól a severní galaktický pól), $\frac{\pi}{2} - \phi_A$ (oblouk hlavní kružnice spojující severní světový pól a bod na galaktickém rovníku) a $\frac{\pi}{2}$ (90° , které bychom naměřili podél oblouku hlavní kružnice konstantní galaktické délky mezi severním galaktickým pólem a galaktickým rovníkem). Vnitřní úhel u severního světového pólu označme jako $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{NGP}$. Můžeme potom psát sférickou kosinovou větu ve tvaru

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{NGP}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi_A\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta_{NGP}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_A\right) \cos(\alpha - \alpha_{NGP}),$$

odkud snadno vyjádříme

$$\cos \Delta\alpha = \cos(\alpha - \alpha_{NGP}) = -\operatorname{tg} \delta_{NGP} \operatorname{tg} \phi_A.$$

Můžeme vyčíslit $\cos \Delta\alpha \doteq -0,400$. Pro $\Delta\alpha$ pak dostáváme dvě řešení: $\Delta\alpha_1 \doteq 7^h 34,3^m$ a $\Delta\alpha_2 \doteq 16^h 25,7^m$. Výsledné rektascenze tedy jsou $\alpha_1 = \Delta\alpha_1 + \alpha_{NGP} \doteq 20^h 25,7^m$ (bod se nachází v souhvězdí Labutě – Cyg) a $\alpha_2 = \Delta\alpha_2 + \alpha_{NGP} \doteq 5^h 17,1^m$ (bod se nachází v souhvězdí Vozky – Aur). Takto vypočtené rektascenze jsou v dobré shodě s hodnotami, které si můžete změřit ve Stellariu. Hledané body na galaktickém rovníku, které se mohou v Athénách nacházet v zenitu, tedy mají souřadnice $(\delta_1, \alpha_1) \doteq (37^\circ 59', 20^h 25,7^m)$ a $(\delta_2, \alpha_2) \doteq (37^\circ 59', 5^h 17,1^m)$.



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

c) Určete místní hvězdné a místní pásmové časy (UTC+2) průchodů těchto bodů zenitem v Athénách pro den 1. ledna 2024 a pro den, kdy se chystáte pozorovat. Pomocí vhodného software (např. Stellarium) si před zasláním žádosti o pozorování ověřte, zda jsou vaše výpočty správné.

Místní hvězdné časy průchodu odpovídají rektascenzi vybraných bodů.

Dne 1. ledna se místní hvězdný čas v Athénách liší od UTC+2 jednak kvůli tomu, že Athény neleží na zeměpisné délce 30° v.d. (odpovídající středu časového pásma UTC+2), a také kvůli tomu, že pozorujeme 1. ledna: od podzimní rovnodennosti (kdy místní hvězdný čas a místní pásmový čas ve středu časového pásma koincidují) uplynulo 101 dní. Za jeden den se hvězdný čas od pásmového rozejde o 236 sekund. Oprava na datum pozorování je tedy $6^{\text{h}} 38^{\text{m}}$. Navíc si ale rozdíl zeměpisných délek vynutí opravu $-0^{\text{h}} 25^{\text{m}}$. Zjistíme tedy, že 1. ledna o půlnoci UTC + 2 je na zeměpisné délce λ_A místní hvězdný čas $6^{\text{h}} 13^{\text{m}}$.

Bod na rektascenzi α_2 bude kulminovat $6^{\text{h}} 13^{\text{m}} - 5^{\text{h}} 17^{\text{m}} = 0^{\text{h}} 56^{\text{m}}$ před půlnocí, tj. kolem 23:04 UTC+2. Naopak bod na rektascenzi α_1 bude kulminovat v $20^{\text{h}} 26^{\text{m}} - 6^{\text{h}} 13^{\text{m}}$ místního pásmového času neboli ve 14:13 UTC+2.

Odečtením ze Stellaria získáváme časy pro 1. ledna 22:59 a 14:08 UTC+2. Je třeba dbát na to, že pozorování se uskuteční téměř okamžitě po odeslání (nejste-li v pořadí). Pozorování bychom tedy zaslali prvního ledna krátce před 13:08 a 21:59 UTC+1 (místní pásmový čas při pozorování z ČR). Nesoulad výpočtu pásmových časů průchodu zenitem s hodnotami ze Stellaria lze vysvětlit např. nepřesností v určení okamžiku rovnodennosti, která může zapříčinit chybu ± 4 minuty.

d) Pomocí pictortelescope.com/observe napozorujte 21-cm čáru vodíku, a to v obou možných bodech roviny Galaxie. Nezapomeňte, že Athény se mohou nacházet v jiném časovém pásmu než místo, odkud vysíláte požadavek na pozorování. Ponechte pole `center frequency = 1420 MHz`, `bandwidth = 2,4 MHz`, `number of bins = 100`. S celkovou integrační dobou můžete experimentovat. Označte, že si přejete získat surová data jako `.csv` soubor. Brzy vám na email dorazí `.csv` soubor a náhledový obrázek s vaším pozorováním. **Přiložte nám tyto náhledové obrázky k vašemu řešení.**

Spektrum naměřené ve směru souhvězdí Labutě vidíme na obr. 4, ve směru souhvězdí Vozky na obr. 5. Měření byla provedena 15. a 16. listopadu 2023.

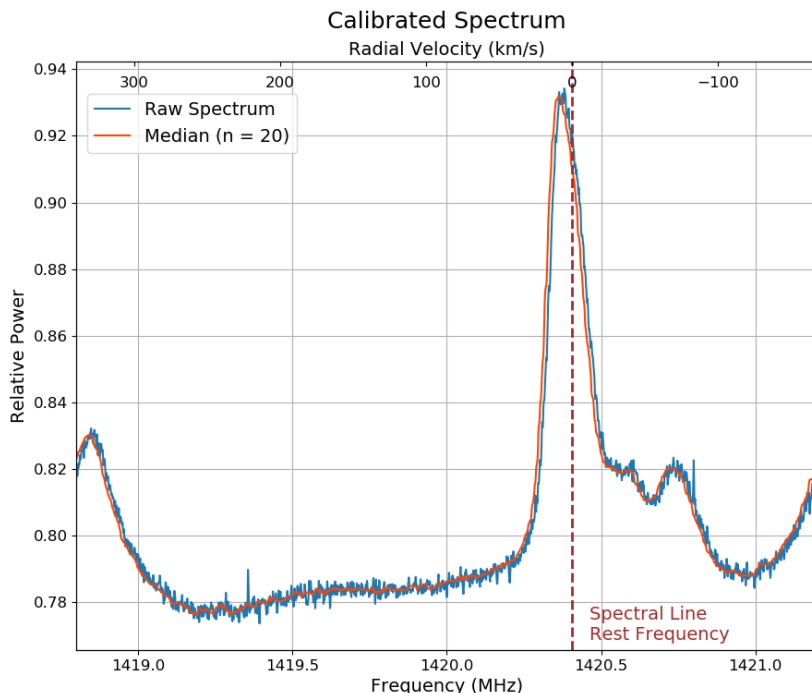
První sloupec `.csv` souboru je frekvence, druhý sloupec je vaše surové pozorování a třetí je referenční spektrum. Ve čtvrtém naleznete podíl vašeho pozorování a referenčního spektra.

Díváte se na spektrum tzv. spin-flip čáry vodíku, která odpovídá nepatrnému množství energie uvolněnému při překlopení spinu elektronu v atomárním vodíku. Tato čára má klidovou frekvenci $\nu_0 = 1420,4057$ MHz.

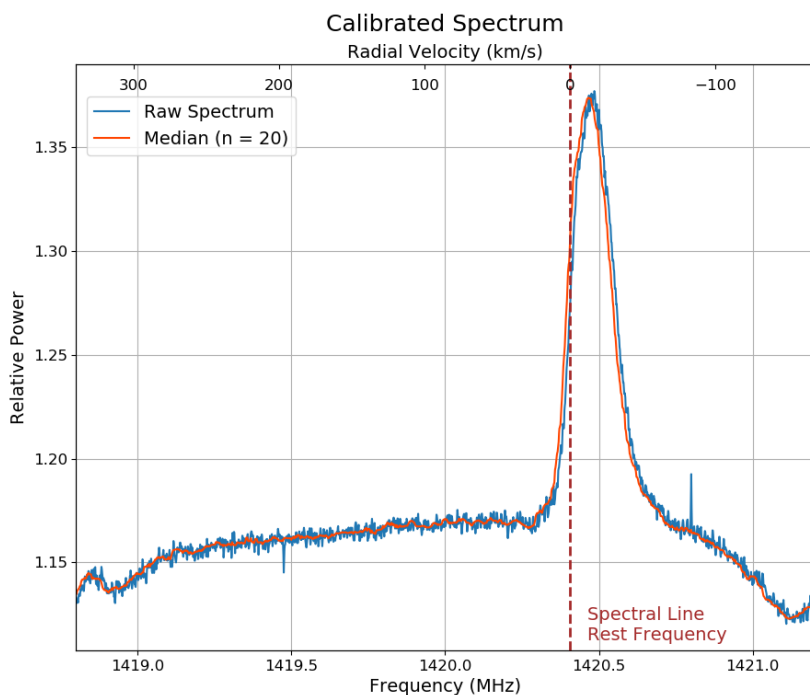
e) S jakou radiální rychlostí vzhledem k pozorovateli se pohybuje vodík ve směrech vašich pozorování? Uveďte číselné hodnoty v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Přibližuje se k němu, nebo se od něj vzdaluje?

Měřená radiální rychlost je ovlivněna jednak vzájemným pohybem spirálních ramen a Sluneční soustavy a pak také oběhem Země kolem Slunce. V závislosti na roční době, kdy jsme pozorování provedli, tedy můžeme obdržet trochu jiné výsledky. Čára v Labuti je

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Spektrum galaktického vodíku naměřené v rovině Mléčné dráhy ve směru souhvězdí Labutě. Měření bylo provedeno 15. listopadu 2023 ve 17:12 UTC+3.



Obrázek 5: Spektrum galaktického vodíku naměřené v rovině Mléčné dráhy ve směru souhvězdí Vozky. Měření bylo provedeno 16. listopadu 2023 ve 02:04 UTC+3.

Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

výrazně silnější a při pozorování 15. listopadu 2023 byl zřetelný modrý posuv odpovídající radiální rychlosti asi $(9 \pm 5) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Ve Vozkovi je čára méně výrazná a při pozorování 16. listopadu 2023 byla změřena radiální rychlost přibližně $(-13 \pm 5) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Radiální rychlosti lze zjistit buď přímo z horizontální osy na svrchní hraně grafů na obr. 4 a 5, nebo z posunu frekvence čáry (kterou odečteme na spodní hraně grafu) a Dopplerova vztahu.

Měli byste zjistit, že velikosti získaných rychlostí jsou řádově srovnatelné s orbitální rychlostí Země kolem Slunce. Abychom získali vzájemnou radiální rychlost Sluneční soustavy a pozorovaného spirálního ramena, je třeba naměřené výsledky o tento pohyb opravit.

f) K jakému bodu na obloze se Země v důsledku oběhu kolem Slunce pohybuje? Polohu tohoto bodu (tzv. *apexu*) vyjádřete obecně v ekliptikálních souřadnicích (β_a, λ_a) pomocí ekliptikální délky Slunce λ_\odot v den pozorování.

Ekliptikální délka zemského apexu je

$$\lambda_a = \lambda_\odot - \frac{\pi}{2},$$

ekliptikální šířka pak $\beta_a = 0^\circ$.

Rychlostní korekci, kterou musíte provést, lze spočítat jako

$$\Delta v = v_Z \cos \theta,$$

kde $v_Z \doteq 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ je rychlost oběhu Země kolem Slunce a θ je úhlová vzdálenost bodu na obloze, v němž pozorujete, od bodu, ke kterému se Země pohybuje.

g) Vypočtete hodnotu Δv pro den vašeho pozorování (uvedte v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$). Úhlovou vzdálenost θ můžete buď odečíst ve Stellariu, nebo vypočítat pomocí sférické trigonometrie. Uvedte, zda musíme korekci Δv ke změřeným radiálním rychlostem přičíst nebo ji od nich odečíst.

Nejdříve určíme hodnotu λ_\odot v den pozorování. V našem případě (přelom 15. a 16. listopadu 2023) dostáváme (pomocí Stellaria nebo z ročenky) $\lambda_\odot \doteq 233^\circ 10'$. Ekliptikální souřadnice zemského apexu tedy v den našeho pozorování byly $(\beta_a, \lambda_a) = (0^\circ, 143^\circ 10')$. Rovníkové souřadnice apexu můžeme vypočítat pomocí známých převodních vztahů. Deklinace nabývá hodnot z intervalu $[-90^\circ, +90^\circ]$ a můžeme ji tedy jednoznačně určit ze vztahu

$$\sin \delta_a = \sin \beta_a \cos \varepsilon + \cos \beta_a \sin \varepsilon \sin \lambda_a,$$

kde $\varepsilon \doteq 23,4^\circ$ jsme označili sklon roviny nebeského rovníku vůči rovině ekliptiky. Číselně dostáváme $\sin \delta_a \doteq 0,238$, a tedy $\delta_a \doteq 13^\circ 46,4'$. Rektascenze může nabývat hodnot z intervalu $[0^{\text{h}}, 24^{\text{h}}]$ a k jejímu určení tedy musíme znát hodnotu $\cos \alpha_a$ i $\sin \alpha_a$. Ty určíme pomocí vztahů

$$\cos \alpha_a \cos \delta_a = \cos \lambda_a \cos \beta_a,$$

$$\sin \alpha_a \cos \delta_a = -\sin \beta_a \sin \varepsilon + \cos \beta_a \cos \varepsilon \sin \lambda_a.$$

Číselně vychází $\cos \alpha_a \doteq -0,824$ a $\sin \alpha_a \doteq 0,566$. Hodnotu α_a tedy musíme hledat v intervalu $[6^{\text{h}}, 12^{\text{h}}]$. Vychází pak $\alpha_a \doteq 9^{\text{h}} 42,0^{\text{m}}$. Celkem tedy máme rovníkové souřadnice



Krajské kolo 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

apexu $(\delta_a, \alpha_a) = (13^\circ 46,4', 9^h 42,0^m)$. Konečně označme θ_i (pro $i = 1, 2$) úhlovou vzdálenost mezi apexem a body na galaktickém rovníku, ve kterých jsme pozorovali (jejichž rovníkové souřadnice (δ_i, α_i) jsme vypočetli v části b)). Máme pak

$$\cos \theta_i = \sin \delta_a \sin \delta_i + \cos \delta_a \cos \delta_i \cos(\alpha_a - \alpha_i).$$

Číselně dostáváme $\cos \theta_1 \doteq -0,577$ a $\cos \theta_2 \doteq 0,455$, a tedy odpovídající korekce na heliocentrickou rychlost $\Delta v_1 \doteq -17 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a $\Delta v_2 \doteq 14 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Tyto korekce je třeba přičíst k naměřeným hodnotám radiální rychlosti.

h) Určete heliocentrické radiální rychlosti vodíku v Galaxii ve směrech vašich pozorování. Hodnoty uveďte v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Po zohlednění korekcí dostáváme heliocentrické radiální rychlosti $(-8 \pm 5) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ v Labutí a $(1 \pm 5) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ve Vozkovi.

Autorem přehledového testu A a úlohy B je Radka Křížová, úlohu C navrhli Jakub Vošmera a Tomáš Patsch, úlohu D navrhl Marco Souza de Joode.