

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **14. 3. 2025** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Analema*(max. 20 bodů)*

Nadšený mladý astronom provedl dlouhodobý experiment, při kterém každý den z daného pozorovacího stanoviště na Zemi zaznamenával polohu Slunce na obloze ve *fixní místní střední sluneční čas*.

¹ Pro specifikování polohy Slunce použil místní souřadnicový systém sestávající z deklinace δ objektu (tedy úhlové vzdálenosti objektu od nebeského rovníku) a jeho hodinového úhlu H (tedy úhlu, který svírá rovina procházející objektem a světovými póly s rovinou místního poledníku). Svá měření rovněž názorně vizualizoval tak, že Slunce během roku v daný čas fotil vzhledem k fixní scénérii objektů ve svém okolí. Složením (a interpolací) snímků vznikla fotografie, kterou vidíme na obrázku 1. Povšimněme si, že obrazy Slunce na ní vykreslují křivku ve tvaru číslice 8. Té říkáme *analema*.



Obrázek 1: Snímek vzniklý složením fotografií Slunce pořízených během roku ve fixní pásmový čas.

Jelikož našeho mladého astronoma zajímá, proč věci fungují tak, jak fungují, začal se pít po důvodech, proč se vlastně poloha Slunce na obloze ve fixní pásmový čas v průběhu roku mění. Po důkladné rešerši literatury dospěl k následujícím závěrům: 1. ke změnám deklinace δ Slunce během

¹Místní střední sluneční čas se od standardního pásmového času liší pouze o konstantní posun, který je plně určen zeměpisnou délkou pozorovatele a který pro nás v této úloze nebude relevantní.

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

roku dochází v důsledku nenulového sklonu ε roviny světového rovníku vůči rovině ekliptiky, 2. k variacím v hodinovém úhlu H Slunce v daný pásmový čas dochází v důsledku nerovnoměrností nárůstu rektascenze Slunce během roku. Tyto nerovnoměrnosti jsou pak zapříčiněny jak sklonem světového rovníku vůči ekliptice, tak nerovnoměrností pohybu Slunce po ekliptice kvůli nenulové excentricitě e oběžné dráhy Země.

Náš astronom si všiml, že deklinaci δ Slunce v závislosti na čase t během roku lze poměrně přesně popsat vztahem ve tvaru

$$\delta(t) \approx \delta_{\max} \sin(\Omega t + \varphi), \quad (1)$$

kde $\delta_{\max}$ představuje maximální hodnotu deklinace, jaké mohou jednotlivé body na analemě nabývat. Zapomněl si však poznamenat, jakým způsobem můžeme parametry $\delta_{\max}$, Ω a φ určit pomocí známých veličin.

a) Určete parametry $\delta_{\max}$, Ω a φ funkce $\delta(t)$ dané vztahem (1) obecně pomocí sklonu $\varepsilon \doteq 23,44^\circ$ světového rovníku vůči ekliptice, siderické oběžné periody $P \doteq 365,256$ d Země kolem Slunce a okamžiku t_{Υ} jarní rovnodennosti. **[3 b]**

Deklinace Slunce během roku nabývá maximální hodnoty $\delta_{\max} = \varepsilon$. Hodnoty deklinace se zároveň opakují s periodou P , máme tedy $\Omega = 2\pi/P$. V okamžiku jarní rovnodennosti je deklinace Slunce nulová a rostoucí, máme tedy $\varphi = -\Omega t_{\Upsilon} = -2\pi \frac{t_{\Upsilon}}{P}$. Celkem tedy můžeme psát

$$\delta(t) \approx \varepsilon \sin \left[\frac{2\pi}{P} (t - t_{\Upsilon}) \right].$$

Pro hodinový úhel H Slunce v danou hodnotu T_m místního středního slunečního času v závislosti na čase t během roku můžeme napsat vztah (platný dosazujeme-li ε a T_m v radiánech)

$$H(t) \approx -2e \sin [\Omega(t - t_p)] + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin [k\Omega(t - t_{\Upsilon})] + T_m, \quad (2)$$

kde $e \doteq 0,0167$ je excentricita dráhy Země kolem Slunce a $t_p \doteq t_{\Upsilon} - 78,2$ d je okamžik průchodu Země perihéliem. Používáme přitom konvenci, kdy je $T_m = 0$ h v poledne místního středního slunečního času. Na pravé straně vztahu (2) můžeme zřetelně identifikovat příspěvek v důsledku elipticity dráhy Země (první člen) a rovněž příspěvek započítávající nerovnoměrnost změn rektascenze Slunce v důsledku nenulového sklonu světového rovníku vůči ekliptice (druhý člen). Rozdíl

$$\text{EoT}(t) \equiv H(t) - T_m$$

nazýváme *časová rovnice* (anglicky *equation of time*).

b) Určete hodnotu bezrozměrového parametru k , který vystupuje ve vztahu (2). Svoji odpověď důkladně zdůvodněte. **[2 b]**

Představme si dvě hypotetická Slunce. První, podobně jako to skutečné, se bude pohybovat po ekliptice, a to konstantní úhlovou rychlostí Ω . Zatímco jeho ekliptikální délka tedy bude narůstat rovnoměrně, jeho rektascenze se bude během roku měnit nerovnoměrně. Abychom tuto nerovnoměrnost izolovali, uvažujme druhé Slunce, které se bude pohybovat toutéž úhlovou rychlostí Ω , ale po nebeském rovníku. Tedy tak, aby jeho rektascenze

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

narůstala rovnoměrně. Jak se budou lišit rektascenze těchto dvou Sluncí v průběhu roku? Začneme v okamžik jarní rovnodennosti, kdy se obě Slunce budou nacházet v jarním bodě. Jejich rektascenze se tedy budou rovnat. Jak však bude plynout čas, rektascenze Slunce pohybujícího se po rovníku bude narůstat stále úhlovou rychlostí Ω , zatímco rektascenze Slunce pohybujícího se po ekliptice se bude zvyšovat pomaleji o faktor $\cos \varepsilon$. Rektascenze obou Sluncí se pak opět vyrovnají až v bodě letního slunovratu, kam se obě Slunce dostanou přibližně za čtvrtinu oběžné periody Země. Analogicky si budou rektascenze obou sluncí ještě rovny také při podzimní rovnodennosti a zimním slunovratu. To znamená, že sinusoida nabývá nulové hodnoty čtyřikrát v jednom roce. Proto $k = \pm 2$. Vidíme navíc, že hodinový úhel pravého Slunce začne v okamžik jarní rovnodennosti (v důsledku sklonu roviny ekliptiky vůči rovině světového rovníku) vzhledem k hodinovému úhlu středního Slunce *narůstat*. To nám vytrídí hodnotu $k = +2$.

c) Ručně nebo pomocí vhodného softwaru vykreslete v rovině (H, δ) křivku, kterou během roku opisují body $[H(t), \delta(t)]$, jejichž souřadnice jsou dány rovnicemi (1) a (2). Uvažujte situaci v pravé poledne místního středního slunečního času. Za předpokladu, že jarní rovnodennost nastala 20. března, vyznačte na křivce body, které odpovídají prvnímu dni v každém kalendářním měsíci (uvažujte nepřestupný rok). Výsledek porovnejte s tvarem analemy na obrázku 1. [5 b]

Požadovanou křivku s vyznačenými body vidíme na obrázku 2. Vidíme, že oproti analemě na obrázku 1 není naše křivka nakloněná doprava. To je způsobeno tím, že astronom Slunce fotil v pozdních odpoledních až večerních hodinách a také tím, že hrany fotografie jsou přibližně sesazeny s místním *obzorníkovým* (a ne rovníkovým) souřadnicovým systémem. Pokud by místo toho astronom fotil poblíž okamžiku pravého poledne místního středního slunečního času, byla by jeho analema skloněná podobně jako křivka na obrázku 2.

Poté, co důkladně zanalyzoval tvar sluneční analemy pozorované ze Země, napadlo našeho mladého astronoma prozkoumat, jaké analemy by mohl vidět z ostatních planet Sluneční soustavy.

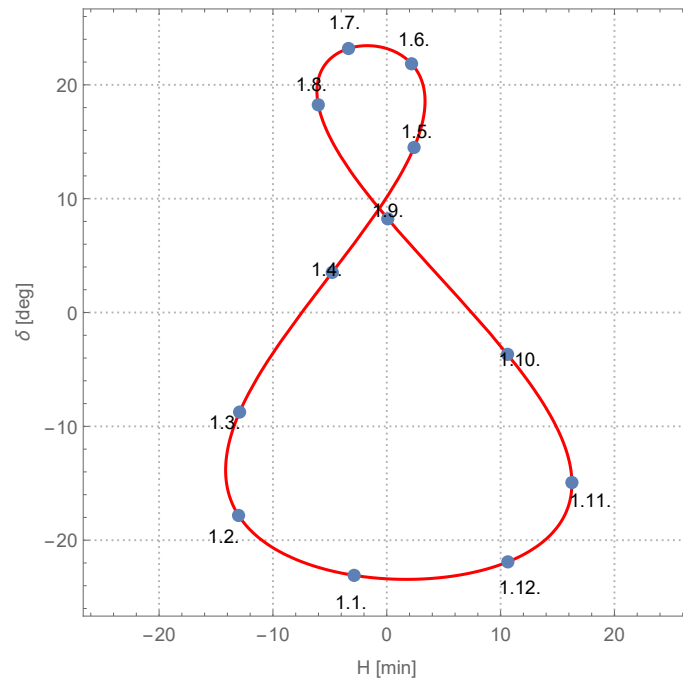
d) K jednotlivým slunečním analemám na obrázku 3 (písmena (a) až (d)) přiřadte odpovídající planetu Sluneční soustavy, ze které bychom danou analemu mohli v současnosti pozorovat. [2 b]

Identifikaci můžeme provést například odečtením odklonu rotační osy dané planety od směru kolmého k rovině oběhu planety kolem Slunce (který je roven maximální hodnotě deklinace bodů na analemě). Dostaneme: (a) Neptun, (b) Jupiter, (c) Saturn, (d) Mars.

Vraťme se nyní zpět na Zemi. Našeho astronoma obzvláště zaujalo, že analema Slunce pozorovaná ze Země je křivka, která v jednom bodě protíná sama sebe.

e) Určete deklinaci δ_x tohoto bodu obecně pomocí parametrů ε, e, Ω a rozdílu $\Delta_0 = t_r - t_p \doteq 78,2$ d mezi okamžikem t_r jarní rovnodennosti a okamžikem t_p průchodu Země perihéliem. Číselnou hodnotu δ_x ve stupních porovnejte s hodnotou, kterou můžete odečíst z vaší křivky v části c). Najděte rovněž časovou rovnici EoT_x pro dny odpovídající průsečíku analemy samy se sebou (obecně i číselně v minutách). [4 b]

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 2: Křivka, kterou opisují v rovině $[H, \delta]$ body, jejichž souřadnice jsou dány vztahy (1) a (2) pro $T_m = 0$ h. Horizontální osa je vyjádřena v minutách, vertikální osa je vyjádřena ve stupních. Modře jsou vyznačeny body odpovídající prvnímu dni v každém kalendářním měsíci.

Jelikož analema protíná sama sebe, musí existovat hodnoty času t_1 a t_2 takové, že $0 < t_1 < t_2 < P$ a pro které $\delta(t_1) = \delta(t_2) = \delta_x$, $H(t_1) = H(t_2) = \text{EoT}_x$ (pro $T_m = 0$ h). Všimněme si, že dle vztahu (1) je závislost deklinace na čase čistě harmonická, tj. je dána jednou sinusoidou s fixní periodou. Aby tedy platilo $\delta(t_1) = \delta(t_2)$, musí časy t_1 a t_2 splňovat vztah

$$\Omega(t_2 - t_T) = \pi - \Omega(t_1 - t_T).$$

Dosadíme-li tento výsledek do podmínky $H(t_1) = H(t_2)$, dostaneme

$$\begin{aligned} -2e \sin \left[\Omega(t_1 - t_T) + \Omega\Delta_0 \right] + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin \left[2\Omega(t_1 - t_T) \right] &= \\ &= -2e \sin \left[\pi - \Omega(t_1 - t_T) + \Omega\Delta_0 \right] + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin \left[2\pi - 2\Omega(t_1 - t_T) \right] = \\ &= -2e \sin \left[\Omega(t_1 - t_T) - \Omega\Delta_0 \right] - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin \left[2\Omega(t_1 - t_T) \right], \end{aligned}$$

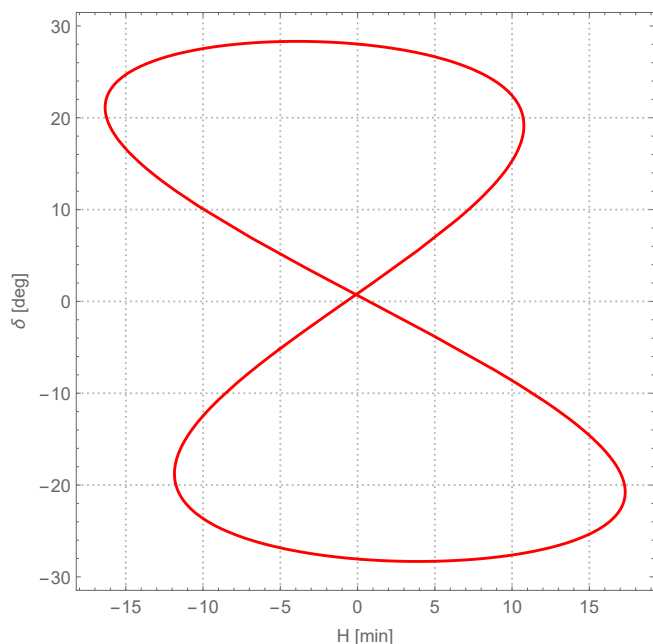
neboli

$$e \sin \left[\Omega(t_1 - t_T) - \Omega\Delta_0 \right] - e \sin \left[\Omega(t_1 - t_T) + \Omega\Delta_0 \right] = - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin \left[2\Omega(t_1 - t_T) \right].$$

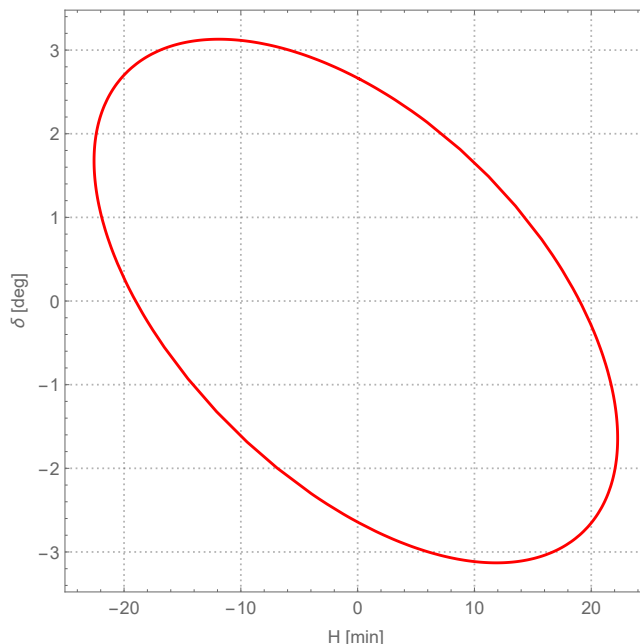
Levou stranu můžeme upravit pomocí součtového vzorce pro sinus, zatímco pravou stranu upravíme pomocí vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu. Dostaneme

$$-e \cos \left[\Omega(t_1 - t_T) \right] \sin \Omega\Delta_0 = - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin \left[\Omega(t_1 - t_T) \right] \cos \left[\Omega(t_1 - t_T) \right].$$

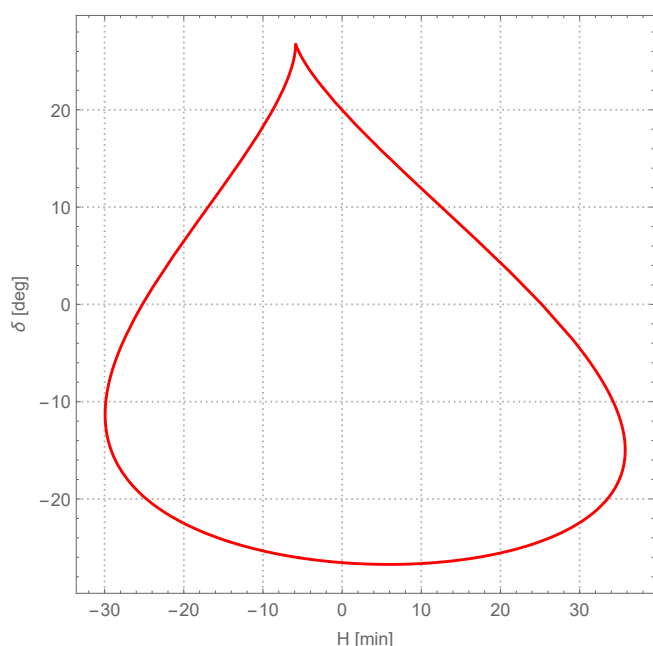
Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



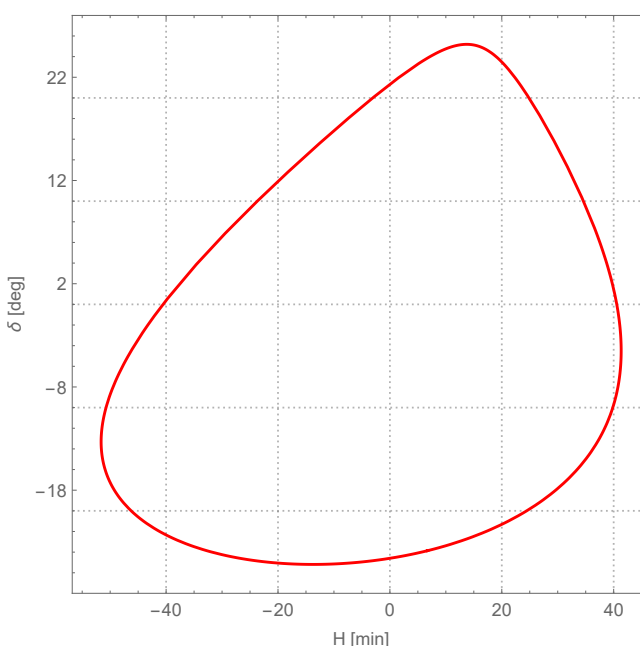
(a)



(b)



(c)



(d)

Obrázek 3: Analemy Slunce pozorované ze čtyř planet Sluneční soustavy. Na vertikální ose jsou vyneseny hodnoty deklinace, která je definována vzhledem k rovině světového rovníku dané planety. Na horizontální ose vynášíme hodinový úhel Slunce v pravé poledne místního středního slunečního času pro pozorovatele na planetě.

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Jelikož obecně $\cos[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] \neq 0$, můžeme tímto výrazem vydělit a zjistit tak, že

$$\sin[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] = 4 \frac{e}{\varepsilon^2} \sin \Omega \Delta_0. \quad (3)$$

Odtud vidíme, že pro obecné hodnoty parametrů e, ε, Ω a Δ_0 nemusí řešení pro t_1 existovat: pravá strana rovnice (3) může být větší než 1. Toto by nastalo např. v případě planety Mars, jehož analema sama sebe nekříží. V případě Země máme $4 \frac{e}{\varepsilon^2} \sin \Omega \Delta_0 \doteq 0,389 < 1$ a průsečík tedy skutečně existuje. Dosazením do vztahu (1) pak pro deklinaci $\delta_\times = \delta(t_1)$ průsečíku analemy Slunce ze Země samy se sebou dostaneme

$$\delta_\times = 4 \left(\frac{e}{\varepsilon} \right) \sin \Omega \Delta_0 \doteq 9,1^\circ.$$

Pro časovou rovnici $\text{EoT}_\times = H(t_1)$ pak máme

$$\begin{aligned} \text{EoT}_\times &= -2e \sin[\Omega(t_1 - t_\Upsilon) + \Omega \Delta_0] + \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin[2\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] = \\ &= -2e \sin[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] \cos \Omega \Delta_0 - 2e \cos[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] \sin \Omega \Delta_0 + \\ &\quad + 2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \sin[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)] \cos[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)]. \end{aligned}$$

Po dosazení za $\sin[\Omega(t_1 - t_\Upsilon)]$ ze vztahu (3) zjistíme, že se druhý a třetí člen odečtou. Nakonec tedy získáme

$$\text{EoT}_\times = -8 \left(\frac{e}{\varepsilon} \right)^2 \sin \Omega \Delta_0 \cos \Omega \Delta_0 = -4 \left(\frac{e}{\varepsilon} \right)^2 \sin 2\Omega \Delta_0 \doteq -0,67 \text{ min}.$$

f) V jakém roce budou lidé na Zemi moci pozorovat analemu, jejíž tvar (pro pravé poledne místního středního slunečního času) je znázorněn na obrázku 4? Uveďte nejbližší rok v budoucnosti. [4 b]

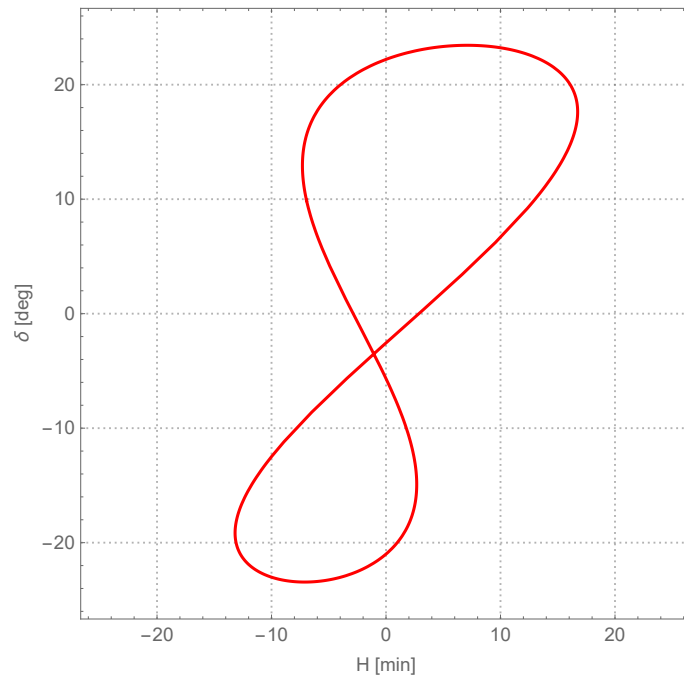
Nápověda: Můžete například začít určením polohy průsečíku analemy samy se sebou. Můžete také předpokládat následující:

- Jarní bod se rovnoměrně posouvá po ekliptice ve směru klesající rektascenze tak, že jeden kompletní „oběh“ vykoná za $\Pi_\Upsilon = 25\,700$ let (tzv. Platónský rok).
- Přímka apsid oběžné dráhy Země kolem Slunce (spojnice perihélia a afélia) se rovnoměrně stáčí ve směru oběhu Země s periodou $\Pi_{\text{aps}} = 112\,000$ let.
- Excentricita e , sklon ε i perioda P oběhu Země kolem Slunce jsou na časové škále dané periodami Π_Υ a Π_{aps} přibližně konstantní.

Z údajů v zadání plyne, že přímka apsid a průvodič jarního bodu se stáčí v *nesouhlasném* směru. Hodnota parametru Δ , který udává rozdíl mezi okamžikem jarní rovnodennosti a okamžikem průchodu Země perihéliem, tedy v čase klesá. Označíme-li jako τ_0 současnou epochu (rok 2025), potom pro parametr $\Delta(\tau)$ v obecné epoše τ můžeme psát vztah

$$2\pi \frac{\Delta(\tau)}{P} = 2\pi \frac{\Delta_0}{P} - \omega(\tau - \tau_0),$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Analema Slunce pro pozorovatele ze Země v budoucnosti (pro hodnotu $T_m = 0$ h).

kde ω označuje vzájemnou úhlovou rychlost stáčení přímky apsid a průvodiče jarního bodu, tedy

$$\omega = \frac{2\pi}{\Pi_\gamma} + \frac{2\pi}{\Pi_{\text{aps}}}.$$

Celkem tedy píšeme

$$\Omega\Delta(\tau) = \Omega\Delta_0 - 2\pi\left(\frac{1}{\Pi_\gamma} + \frac{1}{\Pi_{\text{aps}}}\right)(\tau - \tau_0). \quad (4)$$

Hodnota parametru Δ je vztahem (4) určena až na přičtení libovolného celočíselného násobku oběžné periody P Země kolem Slunce. Dokážeme-li tedy z tvaru analemy na obrázku 4 vyčíst hodnotu parametru Δ , můžeme využít vztah (4) pro určení nejbližší budoucí epochy, ve které budou moci lidé takovouto analemu pozorovat.

Parametr Δ můžeme určit například na základě měření polohy průsečíku analemy samy se sebou. Z výsledků předchozí části vidíme, že souřadnice $[\text{EoT}_\times, \delta_\times]$ tohoto průsečíku závisí pouze na e, ε, P a Δ . Zároveň máme dle zadání předpokládat, že parametry e, ε a P se s epochou τ nemění. Poloha průsečíku tedy jednoznačně určuje hodnotu parametru Δ .

Konkrétně jsme v části d) zjistili, že souřadnice $[\text{EoT}_\times, \delta_\times]$ jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \text{EoT}_\times &= -4\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^2 \sin 2\Omega\Delta = -8\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)^2 \sin \Omega\Delta \cos \Omega\Delta, \\ \delta_\times &= 4\frac{e}{\varepsilon} \sin \Omega\Delta. \end{aligned}$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Odtud dokážeme vyjádřit $\sin \Omega \Delta$ a $\cos \Omega \Delta$ jako

$$\sin \Omega \Delta = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{e} \delta_{\times}, \quad (5a)$$

$$\cos \Omega \Delta = -\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{e} \frac{EoT_{\times}}{\delta_{\times}}. \quad (5b)$$

Z obrázku 4 můžeme odečíst $\delta_{\times} \doteq -3,5^{\circ}$ a $EoT_{\times} \doteq -1,0 \text{ min}$. Použitím vztahů (5a) a (5b) pak lze spočítat $\sin \Omega \Delta \doteq -0,374$. Zároveň máme $\cos \Omega \Delta < 0$, hodnota $\Omega \Delta$ tedy bude ležet ve 3. kvadrantu. Dostaneme $\Omega \Delta \doteq 202^{\circ}$ a tedy ze vztahu (4) $\tau - \tau_0 \doteq 13\,650 \text{ y}$. Analemu na obrázku 4 tedy uvidíme nejdříve v roce 15 700.

C Koma

(max. 20 bodů)

Letos si připomeneme 350 let od smrti skotského matematika a astronoma Jamese Gregoryho. Mezi jeho objevy patří zrcadlový dalekohled s parabolickým primárním zrcadlem². Výhodou Gregoryho dalekohledu je, že netrpí sférickou ani chromatickou vadou.

V této úloze prozkoumáme optickou vadu dalekohledů, které říkáme *koma*. Ta způsobuje deformaci obrazu objektů, které se zobrazují mimo optickou osu. Například bodový zdroj, od něhož paprsky přichází pod nenulovým úhlem vzhledem k optické ose, by se v důsledku této vady v ohniskové rovině nezobrazil do jednoho bodu, ale vytvořil by nezaostřenou skvrnu.

Konkrétně se zaměříme na systémy obsahující parabolické zrcadlo popsané rovnicí $x^2 + y^2 = 4fz$, kde f je ohnisková vzdálenost. Paraboloid definovaný touto rovnicí má optickou osu rovnoběžnou s osou z . Parabolické zrcadlo všechny paprsky přicházející rovnoběžně s optickou osou odrazí do ohniska.

Pro výpočty v této úloze se nám bude hodit součtový vzorec

$$\operatorname{tg}(\psi \pm \phi) = \frac{\operatorname{tg} \psi \pm \operatorname{tg} \phi}{1 \mp \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \phi} \quad (6)$$

pro funkci tangens, z něhož plyne vzorec

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{1 - \operatorname{tg}^2 \psi} \quad (7)$$

pro tangens dvojnásobného úhlu.

a) Zavedme veličinu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, která označuje kolmou vzdálenost od optické osy. Jak závisí vzdálenost $h = z(r)$ paraboly nad rovinou (x, y) na poloměru r ? Taktéž narýsujte graf závislosti $h = z(r)$ pro parabolu s ohniskovou vzdáleností $f = 1 \text{ m}$. [5 b]

Dosadíme r do rovnice ze zadání

$$x^2 + y^2 = r^2 = 4fz.$$

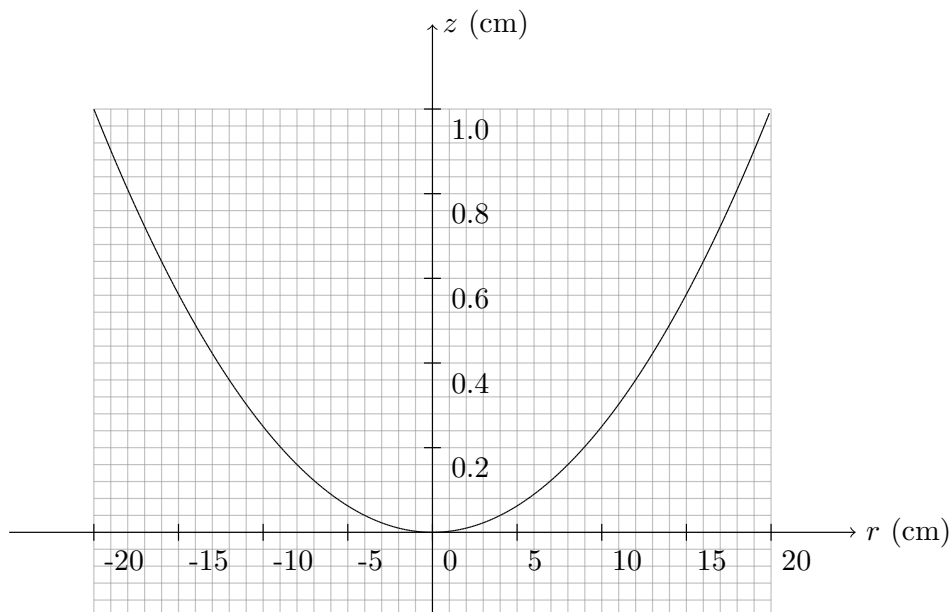
²https://cs.wikipedia.org/wiki/Gregoryho_dalekohled

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Vzdálenost paraboly od roviny (x, y) je

$$h = z(r) = \frac{r^2}{4f}. \quad (8)$$

Obrázek 5 ukazuje tvar paraboly pro $r < 20$ cm. Narýsovali jsme graf symetricky i pro $r < 0$, ačkoliv poloměr $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ může být jen nezáporný. Takto je ale lépe vidět profil parabolického zrcadla.



Obrázek 5: Graf paraboly pro $r < 20$ cm.

V každém bodě povrchu paraboloidu můžeme zkonstruovat rovinu tečnou k povrchu a definovat úhel α mezi touto tečnou rovinou a mezi rovinou (x, y) .

b) Jak závisí úhel α na vzdálenosti $\sigma \equiv r/(2f)$ bodu od optické osy, kterou měříme v jednotkách dvojnásobku ohniskové vzdálenosti f ? [4 b]

Nápověda: Můžete použít znalost, že paprsky rovnoběžné s optickou osou se odráží do ohniska paraboly, jak je naznačeno na obrázku 6.

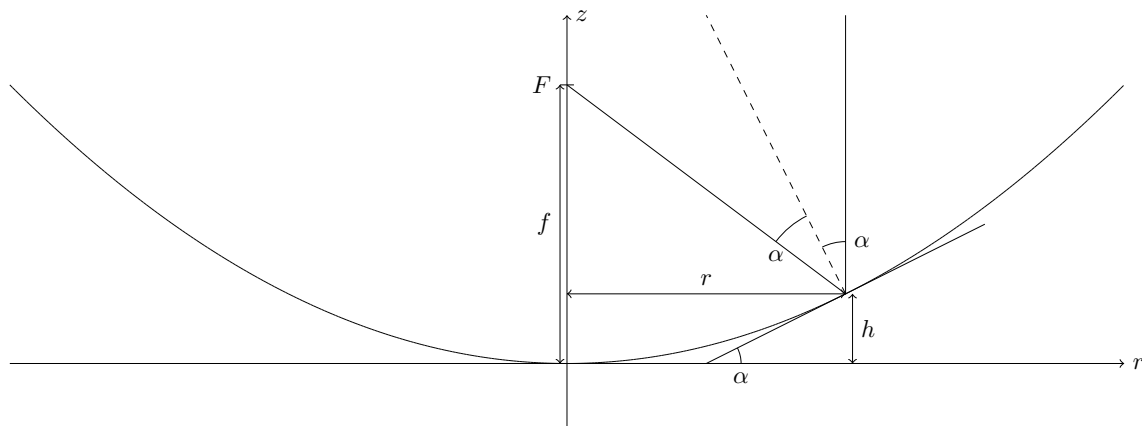
Jestliže úhel mezi tečnou rovinou paraboloidu a rovinou (x, y) je α , pak i úhel mezi přilétajícím paprskem a kolmicí k tečné rovině paraboloidu je α . Paprsek se odráží pod úhlem 2α vůči směru dopadu paprsku a protne ohnisko paraboly. Z geometrie paraboly (obrázek 6) platí

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{r}{f - h} = \frac{r}{f - \frac{r^2}{4f}} = \frac{2\sigma}{1 - \sigma^2}, \quad (9)$$

kde jsme za $h = z(r)$ dosadili z rovnice (8) a také jsme zavedli bezrozměrovou veličinu $\sigma \equiv r/(2f)$. Vzpomeneme-li si na identitu (7) pro tangens dvojnásobného úhlu, můžeme identifikovat

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma.$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 6: Zákon odrazu na parabolickém zrcadle. Paprsky přilétající rovnoběžně s optickou osou se odráží do ohniska.

Závislost úhlu α na vzdálenosti od optické osy r je tudíž

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{r}{f - \frac{r^2}{4f}} \right) = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{2\sigma}{1 - \sigma^2} \right) = \arctg \sigma = \arctg \frac{r}{2f}. \quad (10)$$

Jak ale vidíme na obrázku 7, paprsky dopadající pod nenulovým úhlem β (úhel je velmi malý) vzhledem k optické ose se do ohniska neodrazí: místo toho vytvoří v ohniskové rovině plošný obrazec a dají tak za vznik optické vadě koma. Pro zjednodušení výpočtů se nyní ze tří rozměrů přesuneme do dvourozměrné roviny (y, z) (která je dána podmínkou $x = 0$). Uvažujme tedy, že nyní všechny fotony přilétají jen v rovině (y, z) .

V ohniskové rovině dalekohledu (rovina kolmá na optickou osu procházející ohniskem) je umístěn CCD čip. Foton letící v rovině (y, z) svírá s optickou osou úhel β a dopadá na parabolické zrcadlo ve vzdálenosti r od osy, odráží se, a dopadne na CCD čip ve vzdálenosti ρ od osy. Tato situace je znázorněna na obrázku 7. Používáme znaménkovou konvenci, že pro paprsky přilétající zprava k optické ose je $\beta > 0$, pro bod odrazu vpravo od optické osy je $r > 0$ a pro bod dopadu na ohniskové rovině vpravo od optické osy je $\rho > 0$. Pro situaci na obrázku 7 tedy platí $\beta > 0$, $r > 0$, $\rho < 0$.

c) Najděte obecný vztah pro poměr ρ/f pomocí β a σ . [5 b]

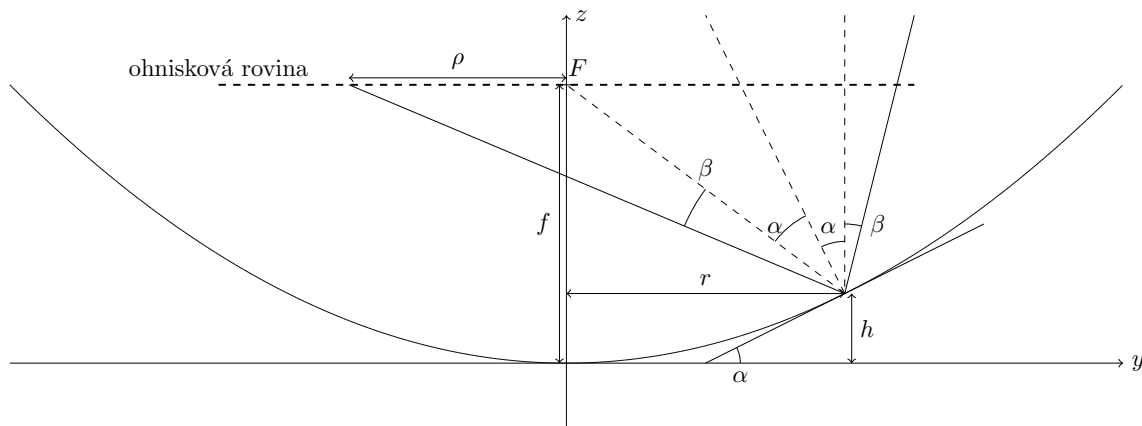
Foton svírá s kolmicí k povrchu zrcadla úhel $\alpha + \beta$ (obrázek 7). Bod zrcadla, od něž se paprsek odráží, je od ohniskové roviny vzdálený

$$f - h = \frac{r}{\tg 2\alpha}.$$

Z geometrie zrcadla a zákona odrazu odvodíme (nezapomeňme, že pro situaci na obrázku 7 máme $\rho < 0$)

$$r - \rho = (f - h) \tg \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - \beta \right) \right] = \frac{\tg(2\alpha + \beta)}{\tg 2\alpha} r.$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 7: Paprsek přilétající pod úhlem β k optické ose v rovině (y, z) .

Nyní využijeme vztah (6) pro tangens součtu úhlů. Vzdálenost ρ paprsku na CCD čipu od optické osy tedy splňuje

$$\rho = \left[1 - \frac{\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right] r = r - \frac{r}{\operatorname{tg} 2\alpha} \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \beta},$$

neboli, po dosazení $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\sigma/(1 - \sigma^2)$,

$$\frac{\rho}{f} = 2\sigma - (1 - \sigma^2) \frac{2\sigma + (1 - \sigma^2) \operatorname{tg} \beta}{(1 - \sigma^2) - 2\sigma \operatorname{tg} \beta} = - \frac{(1 + \sigma^2)^2}{1 - \sigma^2 - 2\sigma \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \beta. \quad (11)$$

d) Používáme dalekohled s parabolickým zrcadlem o průměru $D = 20$ cm a ohniskovou vzdáleností $f = 1$ m. Pozorujeme hvězdu v úhlové vzdálenosti $\beta = 0^\circ 30'$ od optické osy. Jaká bude poloha ρ_0 a průměr $\Delta\rho$ obrazu hvězdy v důsledku komy ve směru osy y na CCD čipu? [6 b]

Poloměr primárního zrcadla je $R = 10$ cm. Využijeme výsledek z rovnice (11). Nejprve zjistíme polohu středu obrazu tak, že dosadíme $r = 0$ cm (tedy $\sigma = 0$) a dostaneme

$$\rho_0 = -f \operatorname{tg} \beta \doteq -8,73 \text{ mm}.$$

V absolutní hodnotě je obraz hvězdy na CCD čipu ve vzdálenosti $|\rho_0| = 8,73$ mm od optické osy.

Z konce zrcadla v kladném směru osy y se paprsek odrazí do polohy

$$\frac{\rho_1}{f} = - \frac{(1 + \Sigma^2)^2}{1 - \Sigma^2 - 2\Sigma \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \beta, \quad (12)$$

kde jsme označili $\Sigma = R/(2f) \doteq 0,05$. Kam dopadne paprsek z druhého konce zrcadla, zjistíme tak, že v rovnici (12) zaměníme $\Sigma \rightarrow -\Sigma$, tedy

$$\frac{\rho_2}{f} = - \frac{(1 + \Sigma^2)^2}{1 - \Sigma^2 + 2\Sigma \operatorname{tg} \beta} \operatorname{tg} \beta.$$

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Velikost obrazu na CCD čipu způsobená komou je tedy dána rozdílem

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \rho_1 - \rho_2 = \\ &= -f \left(\frac{1}{1 - \Sigma^2 - 2\Sigma \operatorname{tg} \beta} - \frac{1}{1 - \Sigma^2 + 2\Sigma \operatorname{tg} \beta} \right) (1 + \Sigma^2)^2 \operatorname{tg} \beta = \\ &= -\frac{4f\Sigma(1 + \Sigma^2)^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{(1 - \Sigma^2)^2 - 4\Sigma^2 \operatorname{tg}^2 \beta}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li numerické hodnoty a vezmeme-li absolutní hodnotu rozdílu $\rho_1 - \rho_2$, dostaneme velikost obrazu $|\Delta\rho| \doteq 15,4 \mu\text{m}$.

D Diferenciální rotace Slunce

(max. 30 bodů)

Cílem této úlohy je prozkoumat rotaci Slunce. Hvězdy nerotují jako tuhá tělesa, úhlová rychlost rotace závisí na hloubce pod povrchem a vzdálenosti od rovníku. My se zaměříme na měření rychlosti rotace povrchu. Slunce můžete považovat za dokonalou kouli s poloměrem $R_\odot = 695\,700 \text{ km}$ rotující kolem osy, jejíž směr je v prostoru na časové škále let neměnný. Osa je skloněná o $7,25^\circ$ od kolmice k rovině oběžné dráhy Země. Během roku tedy můžeme ze Země pozorovat různé části povrchu Slunce.

Jednou z metod měření rychlosti rotace Slunce je sledování pohybu útvarů na jeho povrchu. Použijeme data ze sondy SDO, která se nachází na geosynchronní dráze Země. Sonda disponuje přístrojem HMI (Helioseismic and Magnetic Imager), který měří intenzitu fotosféry kolem absorpční čáry železa na vlnové délce $617,3 \text{ nm}$. To nám umožní vidět sluneční skvrny, které díky své nízké teplotě vyzařují podstatně méně ve viditelné oblasti spektra.

K vizualizaci dat můžete použít webovou aplikaci na adrese <https://heliviewer.org/>. Kliknutím na tlačítko *Data Sources* v levé části obrazovky otevřete nastavení pohledu. V sekci *Images* zvolte observatoř SDO, přístroj HMI a měřenou veličinu continuum. V sekci *Observation Date* můžete měnit datum a čas zobrazeného snímku. V horním panelu jsou zobrazeny souřadnice kurzoru myši. Lze přepínat mezi různými systémy, v této úloze si vystačíme s výchozími souřadnicemi HPC (Helioprojective Cartesian coordinates). Jedná se o úhlové souřadnice s počátkem ve středu Slunce. Úhel je měřený z pohledu pozorovatele na SDO (na Zemi). Osa θ_y je orientována podél projekce rotační osy Slunce do roviny obrázku, osa θ_x je na ni kolmá.

Zavedme nyní kartézské souřadnice s počátkem ve středu Slunce v rovině obrazu z SDO, kde osy x a y jsou orientované ve směru os θ_x a θ_y . Vyjádříme-li θ_x a θ_y ve stupních, pak platí převodní vztahy

$$\begin{aligned}x &\approx D_\odot \frac{\pi}{180^\circ} \theta_x, \\ y &\approx D_\odot \frac{\pi}{180^\circ} \theta_y,\end{aligned}$$

kde $D_\odot$ je vzdálenost Slunce od Země v okamžiku pozorování.

Zavedme druhou souřadnou soustavu, a to úhel $\beta \in [-90^\circ; 90^\circ]$ měřený směrem od rovníku k pólům a úhel α měřený podél rovnoběžek od bodu východu, tedy bodu, kde se pro pozorovatele z SDO objevují vlivem rotace vycházející útvary na povrchu Slunce.

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Dvakrát do roka prochází osa rotace Slunce rovinou obrazu. V tu dobu je snadné převádět mezi souřadnicemi x , y a α , β . Rovnoběžky pak mají konstantní hodnoty nejen β , ale i y a θ_y . Všechna pozorování tedy budeme dělat, pokud možno, blízko dnům, kdy je osa rotace Slunce v rovině obrazu. K tomu dochází kolem 6. června a 7. prosince.

a) Najděte obecné vztahy pro α a β pomocí x a y platné kolem výše popsanych dní. [4 b]

Z geometrie koule snadno odvodíme vztah

$$\beta = \arcsin \frac{y}{R_{\odot}}.$$

Navíc platí

$$x = -R_{\odot} \cos \alpha \cos \beta,$$

kde $\cos \beta > 0$ lze vyjádřit pomocí $\sin \beta$ jako

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_{\odot}^2}}.$$

Dosazením a vyjádřením z rovnice pro x dostaneme

$$\alpha = \arccos \left(-\frac{x}{R_{\odot} \cos \beta} \right) = \arccos \left(-\frac{x}{\sqrt{R_{\odot}^2 - y^2}} \right).$$

b) Sledujte alespoň 10 různých slunečních skvrn po dobu jejich viditelnosti během jedné periody rotace Slunce. Měření provádějte pro různé hodnoty β . Pokuste se pokrýt co možná nejvyšší rozsah vzdáleností od rovníku, neměl by být problém najít skvrny kolem $|\beta| \approx 30^\circ$. Pro každé měření uveďte datum, θ_x , θ_y , α , β a vzdálenost Země od Slunce použitou k převodu souřadnic³ Pro každou sledovanou skvrnu vypočítejte průměrné hodnoty $\bar{\beta}$ a úhlové rychlosti rotace povrchu Slunce $\bar{\omega}(\bar{\beta})$. [15 b]

V tabulce 1 je zaznamenaná poloha skvrn po dobu jejich viditelnosti s intervalem měření 1 den. Všechna měření byla provedena ve 12:00 UTC.

Pro každou skvrnu jsou v tabulce 2 průměrné hodnoty $\bar{\beta}$, $\bar{\omega}$ a směrodatné odchylky σ_{β} , σ_{ω} .

Předpokládejte, že pro úhlovou rychlost rotace platí vztah

$$\omega(\beta) = \omega_{\text{eq}} + A \sin^2 \beta, \quad (13)$$

kde ω_{eq} je úhlová rychlost rotace na rovníku a A je konstanta.

c) Určete hodnoty ω_{eq} , A a periody rotace na rovníku a blízko pólů Slunce. Odhadněte nejistotu měření. [7 b]

³Vzdálenost Země od Slunce můžete dohledat na internetu, například pomocí <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>.



Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 1: Výsledky měření. Čas měření je vždy ve 12:00 UTC pro uvedené datum. Úhlová rychlost ω je určena z rozdílu α mezi nacházejícím a aktuálním řádkem.

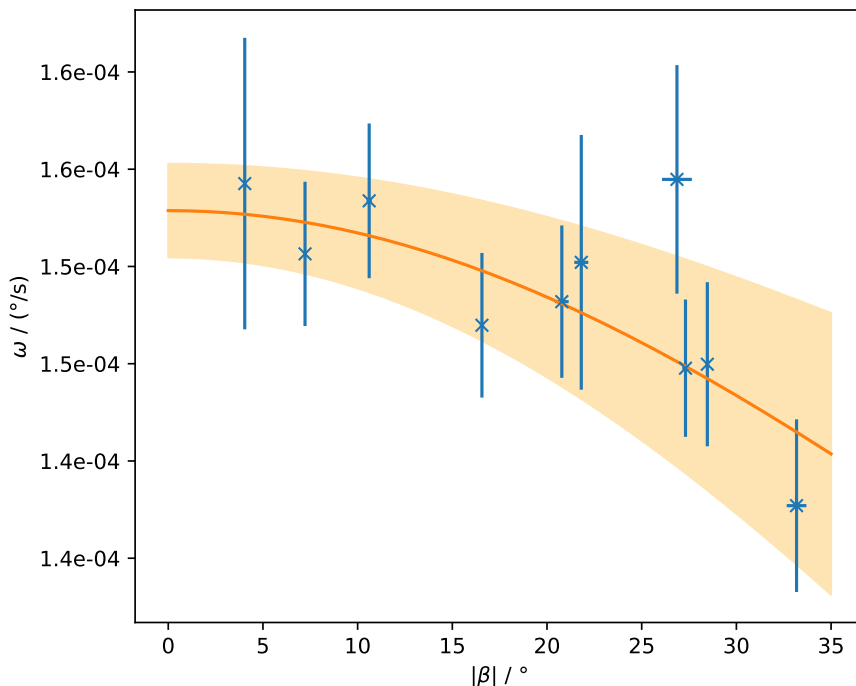
Datum	$D_{\odot}/\text{m}$	$\theta_x/''$	$\theta_y/''$	$\alpha/^\circ$	$\beta/^\circ$	$\omega/^\circ \cdot \text{s}^{-1}$	Datum	$D_{\odot}/\text{m}$	$\theta_x/''$	$\theta_y/''$	$\alpha/^\circ$	$\beta/^\circ$	$\omega/^\circ \cdot \text{s}^{-1}$
2024-05-31	$1,52 \cdot 10^{11}$	-409	357	62.2	22.2	$1,67 \cdot 10^{-4}$	2024-05-28	$1,52 \cdot 10^{11}$	-487	-511	52.3	-32.7	$1,43 \cdot 10^{-4}$
2024-06-01	$1,52 \cdot 10^{11}$	-203	358	76.6	22.2	$1,54 \cdot 10^{-4}$	2024-05-29	$1,52 \cdot 10^{11}$	-341	-510	64.7	-32.6	$1,44 \cdot 10^{-4}$
2024-06-02	$1,52 \cdot 10^{11}$	-1	357	89.9	22.2	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2024-05-30	$1,52 \cdot 10^{11}$	-178	-511	77.1	-32.7	$1,39 \cdot 10^{-4}$
2024-06-03	$1,52 \cdot 10^{11}$	202	352	103.3	21.9	$1,51 \cdot 10^{-4}$	2024-05-31	$1,52 \cdot 10^{11}$	-12	-514	89.1	-32.9	$1,46 \cdot 10^{-4}$
2024-06-04	$1,52 \cdot 10^{11}$	390	351	116.4	21.8	$1,47 \cdot 10^{-4}$	2024-06-01	$1,52 \cdot 10^{11}$	161	-517	101.7	-33.1	$1,44 \cdot 10^{-4}$
2024-06-05	$1,52 \cdot 10^{11}$	554	350	129.1	21.7	$1,56 \cdot 10^{-4}$	2024-06-02	$1,52 \cdot 10^{11}$	323	-521	114.2	-33.4	$1,44 \cdot 10^{-4}$
2024-06-06	$1,52 \cdot 10^{11}$	700	343	142.6	21.3	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2024-06-03	$1,52 \cdot 10^{11}$	469	-525	126.6	-33.7	$1,47 \cdot 10^{-4}$
2024-06-07	$1,52 \cdot 10^{11}$	805	342	156	21.2		2024-06-04	$1,52 \cdot 10^{11}$	594	-529	139.3	-34	$1,44 \cdot 10^{-4}$
2024-06-03	$1,52 \cdot 10^{11}$	-808	272	26.8	16.7	$1,52 \cdot 10^{-4}$	2024-06-05	$1,52 \cdot 10^{11}$	689	-531	151.8	-34.2	
2024-06-04	$1,52 \cdot 10^{11}$	-694	270	40	16.6	$1,50 \cdot 10^{-4}$	2021-12-14	$1,47 \cdot 10^{11}$	-394	-467	62.6	-28.6	$1,53 \cdot 10^{-4}$
2024-06-05	$1,52 \cdot 10^{11}$	-546	270	52.9	16.6	$1,54 \cdot 10^{-4}$	2021-12-15	$1,47 \cdot 10^{11}$	-210	-464	75.8	-28.4	$1,48 \cdot 10^{-4}$
2024-06-06	$1,52 \cdot 10^{11}$	-365	270	66.2	16.6	$1,53 \cdot 10^{-4}$	2021-12-16	$1,47 \cdot 10^{11}$	-21	-463	88.6	-28.4	$1,49 \cdot 10^{-4}$
2024-06-07	$1,52 \cdot 10^{11}$	-166	270	79.4	16.6	$1,52 \cdot 10^{-4}$	2021-12-17	$1,47 \cdot 10^{11}$	170	-464	101.4	-28.4	
2024-06-08	$1,52 \cdot 10^{11}$	41	270	92.6	16.6	$1,52 \cdot 10^{-4}$	2021-12-12	$1,47 \cdot 10^{11}$	-738	-184	39.5	-10.9	$1,62 \cdot 10^{-4}$
2024-06-09	$1,52 \cdot 10^{11}$	245	272	105.7	16.7	$1,53 \cdot 10^{-4}$	2021-12-13	$1,47 \cdot 10^{11}$	-570	-179	53.5	-10.6	$1,58 \cdot 10^{-4}$
2024-06-10	$1,52 \cdot 10^{11}$	438	269	118.9	16.5	$1,53 \cdot 10^{-4}$	2021-12-14	$1,47 \cdot 10^{11}$	-372	-178	67.2	-10.5	$1,57 \cdot 10^{-4}$
2024-06-11	$1,52 \cdot 10^{11}$	608	267	132.1	16.4	$1,50 \cdot 10^{-4}$	2021-12-15	$1,47 \cdot 10^{11}$	-155	-178	80.7	-10.5	$1,57 \cdot 10^{-4}$
2024-06-12	$1,52 \cdot 10^{11}$	743	267	145.1	16.4	$1,51 \cdot 10^{-4}$	2021-12-16	$1,47 \cdot 10^{11}$	71	-178	94.2	-10.5	
2024-06-13	$1,52 \cdot 10^{11}$	841	266	158.1	16.4		2021-12-15	$1,47 \cdot 10^{11}$	-620	-337	47.3	-20.2	$1,57 \cdot 10^{-4}$
2024-06-01	$1,52 \cdot 10^{11}$	222	65	103.6	3.9	$1,68 \cdot 10^{-4}$	2021-12-16	$1,47 \cdot 10^{11}$	-445	-341	60.8	-20.5	$1,53 \cdot 10^{-4}$
2024-06-02	$1,52 \cdot 10^{11}$	444	67	118.1	4.1	$1,64 \cdot 10^{-4}$	2021-12-17	$1,47 \cdot 10^{11}$	-250	-344	74.1	-20.7	$1,53 \cdot 10^{-4}$
2024-06-03	$1,52 \cdot 10^{11}$	634	65	132.2	3.9	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2021-12-18	$1,47 \cdot 10^{11}$	-43	-348	87.3	-20.9	$1,52 \cdot 10^{-4}$
2024-06-04	$1,52 \cdot 10^{11}$	778	67	145.6	4.1	$1,51 \cdot 10^{-4}$	2021-12-19	$1,47 \cdot 10^{11}$	164	-351	100.4	-21.1	$1,52 \cdot 10^{-4}$
2024-06-05	$1,52 \cdot 10^{11}$	878	69	158.6	4.2		2021-12-20	$1,47 \cdot 10^{11}$	362	-354	113.5	-21.3	
2024-06-13	$1,52 \cdot 10^{11}$	-593	-406	45.9	-25.5	$1,59 \cdot 10^{-4}$	2022-11-29	$1,48 \cdot 10^{11}$	71	442	94.7	27	$1,49 \cdot 10^{-4}$
2024-06-14	$1,52 \cdot 10^{11}$	-428	-418	59.6	-26.3	$1,61 \cdot 10^{-4}$	2022-11-30	$1,48 \cdot 10^{11}$	261	447	107.6	27.4	$1,50 \cdot 10^{-4}$
2024-06-15	$1,52 \cdot 10^{11}$	-239	-426	73.5	-26.8	$1,59 \cdot 10^{-4}$	2022-12-01	$1,48 \cdot 10^{11}$	438	449	120.5	27.5	$1,51 \cdot 10^{-4}$
2024-06-16	$1,52 \cdot 10^{11}$	-40	-438	87.3	-27.6	$1,63 \cdot 10^{-4}$	2022-12-02	$1,48 \cdot 10^{11}$	595	447	133.5	27.4	
2024-06-17	$1,52 \cdot 10^{11}$	164	-443	101.3	-28	$1,62 \cdot 10^{-4}$	2023-11-30	$1,48 \cdot 10^{11}$	-847	122	28.6	7.2	$1,53 \cdot 10^{-4}$
2024-06-18	$1,52 \cdot 10^{11}$	357	-440	115.3	-27.8	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2023-12-01	$1,48 \cdot 10^{11}$	-719	119	41.9	7	$1,54 \cdot 10^{-4}$
2024-06-19	$1,52 \cdot 10^{11}$	525	-432	128.7	-27.2	$1,53 \cdot 10^{-4}$	2023-12-02	$1,48 \cdot 10^{11}$	-551	121	55.2	7.1	$1,55 \cdot 10^{-4}$
2024-06-20	$1,52 \cdot 10^{11}$	662	-428	141.9	-27	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2023-12-03	$1,47 \cdot 10^{11}$	-353	122	68.5	7.2	$1,57 \cdot 10^{-4}$
2024-06-21	$1,52 \cdot 10^{11}$	767	-422	155.3	-26.6	$1,69 \cdot 10^{-4}$	2023-12-04	$1,47 \cdot 10^{11}$	-132	125	82.1	7.4	$1,56 \cdot 10^{-4}$
2024-06-22	$1,52 \cdot 10^{11}$	836	-412	169.9	-25.9		2023-12-05	$1,47 \cdot 10^{11}$	95	124	95.6	7.3	$1,56 \cdot 10^{-4}$
2024-05-25	$1,52 \cdot 10^{11}$	-762	-517	16.2	-33.1	$1,37 \cdot 10^{-4}$	2023-12-06	$1,47 \cdot 10^{11}$	317	123	109.2	7.3	$1,57 \cdot 10^{-4}$
2024-05-26	$1,52 \cdot 10^{11}$	-702	-514	28	-32.9	$1,41 \cdot 10^{-4}$	2023-12-07	$1,47 \cdot 10^{11}$	522	122	122.7	7.2	$1,56 \cdot 10^{-4}$
2024-05-27	$1,52 \cdot 10^{11}$	-608	-512	40.2	-32.7	$1,40 \cdot 10^{-4}$	2023-12-08	$1,47 \cdot 10^{11}$	697	123	136.2	7.3	

Tabulka 2: Průměrné hodnoty a směrodatné odchylky β a ω pro každou pozorovanou skvrnu.

$\beta/^\circ$	$\sigma_\beta/^\circ$	$\bar{\omega}/\text{s}^{-1}$	$\sigma_\omega/\text{s}^{-1}$
4.04	0.09	$2,78 \cdot 10^{-6}$	$1,16 \cdot 10^{-7}$
7.22	0.10	$2,72 \cdot 10^{-6}$	$2,27 \cdot 10^{-8}$
-10.61	0.14	$2,76 \cdot 10^{-6}$	$3,39 \cdot 10^{-8}$
16.56	0.11	$2,65 \cdot 10^{-6}$	$2,32 \cdot 10^{-8}$
-20.78	0.36	$2,67 \cdot 10^{-6}$	$3,16 \cdot 10^{-8}$
21.81	0.37	$2,71 \cdot 10^{-6}$	$9,69 \cdot 10^{-8}$
-26.86	0.79	$2,78 \cdot 10^{-6}$	$8,27 \cdot 10^{-8}$
27.31	0.17	$2,61 \cdot 10^{-6}$	$1,10 \cdot 10^{-8}$
-28.47	0.10	$2,62 \cdot 10^{-6}$	$4,18 \cdot 10^{-8}$
-33.18	0.52	$2,49 \cdot 10^{-6}$	$4,82 \cdot 10^{-8}$

K určení ω_{eq} a A použijeme lineární regresi. Na obrázku 8 je závislost $\omega = \omega(\beta)$ včetně výsledku fitu a intervalu nejistoty. Nejistota způsobená odečtem souřadnic skvrn je oproti

Krajské kolo 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 8: Závislost úhlové rychlosti rotace povrchu Slunce na vzdálenosti od rovníku. Oranžová čára představuje fit rovnice 13 a světle červená plocha interval nejistoty fitu.

směrodatné odchylce zanedbatelná. Během měření se ale může měnit tvar skvrny a s ním i její měřená poloha. Pokusme se alespoň o hrubý odhad chyby způsobené „pohybem“ skvrn v soustavě spojené s rotujícím povrchem. V ideálním případě by byla hodnota β pro jednu skvrnu během měření neměnná. Vidíme ale, že může docházet k posunu až o přibližně $0,3^\circ \cdot \text{d}^{-1} \doteq 4 \cdot 10^{-6}^\circ \cdot \text{s}^{-1}$. Jedná se spíše o horní odhad. K nejistotě navíc může přispívat, že osa rotace Slunce byla ve dny měření pouze přibližně v rovině obrazu z SDO, ale ne úplně přesně. Předpokládejme, že tato hodnota platí i pro α . Dostáváme $\omega_{\text{eq}} = (1,58 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}^\circ \cdot \text{s}^{-1}$ a $A = (-3,8 \pm 1,5) \cdot 10^{-5}^\circ \cdot \text{s}^{-1}$.

Periodu rotace dostaneme z úhlové rychlosti pomocí vztahu

$$T(\beta) = \frac{2\pi}{\omega(\beta)}.$$

Dosazením dostaneme hodnoty $T_{\text{eq}} = (26,4 \pm 0,4) \text{ d}$ a $T_{\text{pol}} = (35 \pm 3) \text{ d}$.

d) Diskutujte výsledky. [4 b]

Změřili jsme, že Slunce rotuje diferenciálně. To je v souladu s aktuální literaturou. Nejistota parametru A je vysoká. Ke snížení nejistoty by bylo vhodné měřit skvrny blíže pólům. To je ale problematické, protože ve vyšších vzdálenostech od rovníku skvrny nepozorujeme. Pro měření blíže pólům by bylo třeba zvolit jinou metodu, například určení rychlosti rotace povrchu z Dopplerova jevu.

Autorem přehledového testu A je kolektiv autorů AO. Úlohu B navrhli Radka Křížová a Jakub Vošmera, úlohu C navrhl Jindřich Jelínek, úlohu D navrhl David Kománek.