

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Analýza dat

Úlohy

G Profil Mléčné dráhy

(max. 25 bodů)

Mléčná dráha dosahuje nejvyšší deklinace v souhvězdí Kasiopeji. Jindru zajímalo, o kolik vyšší je hustota hvězd v Mléčné dráze oproti jiným oblastem oblohy. Proto se podíval do hvězdné mapy a počítal hvězdy jasnější než 10 mag ve čtvercích na obloze. Rozměry čtverců jsou 2° deklinace krát 0 h 15 min rektascenze. Jindra počítal hvězdy ve čtvercích mezi 00 h 00 min a 00 h 15 min rektascenze od 42° do 72° deklinace. Počty hvězd jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1: Počty hvězd jasnějších než 10 mag (3. sloupec) ve čtvercích na obloze ohraničených 00 h 00 min a 00 h 15 min rektascenze a deklinací uvedenou v prvním a druhém sloupci.

1	2	3
Min. deklinace (°)	Max. deklinace (°)	Počet hvězd N
70	72	26
68	70	32
66	68	38
64	66	37
62	64	65
60	62	55
58	60	70
56	58	72
54	56	60
52	54	86
50	52	71
48	50	59
46	48	65
44	46	67
42	44	71

a) Spočítejte ve steradiánech velikosti všech 15 oblastí oblohy, kde Jindra počítal hvězdy. [5 b]

Nápověda: Plocha kulového vrchlíku o výšce h je $S = 2\pi Rh$, kde R je poloměr koule. Celá koule má prostorový úhel 4π steradiánů.

Vyjdeme ze vztahu pro povrch kulového vrchlíku $S = 2\pi Rh$. Představme si nebeskou sféru jako kouli s velmi velkým poloměrem R o mnoho řádů větším, než je poloměr Země. Úhel deklinace δ se měří od roviny nebeského rovníku. Výška kulového vrchlíku nad deklinační kružnicí δ je

$$h_{\delta} = R(1 - \sin \delta).$$

Jelikož se pohybujeme pouze po severní polokouli s hodnotami deklinace (0°, 90°), nemusíme řešit znaménkovou konvenci pro sinus. Plocha vrstvy oblohy sevřené mezi dvěma



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

deklinacími kružnicemi δ_1 a δ_2 je

$$S_{1-2} = 2\pi R h_{\delta_1} - 2\pi R h_{\delta_2} = 2\pi R^2 (\sin \delta_2 - \sin \delta_1).$$

Jindra ale počítal jen hvězdy ve výseku mezi 00 h 00 min a 00 h 15 min rektascenze. To odpovídá $\Delta\alpha = 3,75^\circ$ rozpětí úhlů rektascenze, čili

$$p = \frac{\Delta\alpha}{360^\circ} = 0,01042 = 1,042\%$$

z pásu oblohy mezi deklinacemi δ_1 a δ_2 . Plocha čtverce na nebeské sféře, kde Jindra počítal hvězdy, je

$$S_{\text{square}} = p S_{1-2} = 2\pi R^2 (\sin \delta_2 - \sin \delta_1) \frac{\Delta\alpha}{360^\circ}.$$

Celá koule s plochou $S_o = 4\pi R^2$ má prostorový úhel $\Omega_o = 4\pi$. Čtverec na nebeské sféře tudíž pokrývá prostorový úhel

$$\Omega = \frac{S_{\text{square}}}{R^2} = 2\pi (\sin \delta_2 - \sin \delta_1) \frac{\Delta\alpha}{360^\circ}.$$

Prostorové úhly čtverců o výšce 2° deklinace a šířce $3,75^\circ$ rektascenze jsou uvedeny v sloupci 4 v tabulce 2.

b) Spočítejte hustoty hvězd (počet hvězd na jednotku prostorového úhlu) v 15 oblastech oblohy a jejich nejistoty. [5 b]

Nápověda: U počtů hvězd můžete uvažovat poissonovské nejistoty $\Delta N = \sqrt{N}$.

Poissonovská nejistota z počtu hvězd N je $\Delta N = \sqrt{N}$. Nejistoty pro jednotlivá Jindrova měření jsou napsány v sloupci 5 v tabulce 2.

Hustotu hvězd ρ spočítáme s pomocí prostorového úhlu Ω ve sloupci 4 v tabulce 2

$$\rho = \frac{N}{\Omega}.$$

Hustoty hvězd v jednotlivých čtvercích v Kasiopeji jsou uvedeny ve sloupci 6 v tabulce 2. Nejistotu hustoty $\Delta\rho$ spočítáme z nejistoty počtu hvězd ΔN ve sloupci 5

$$\Delta\rho = \frac{\Delta N}{\Omega}.$$

Výsledky jsou uvedeny ve sloupci 7 v tabulce 2.

c) Vyneste do grafu, jak se hustota hvězd na obloze mění s deklinací. Nakreslete i chybové úsečky. [5 b]

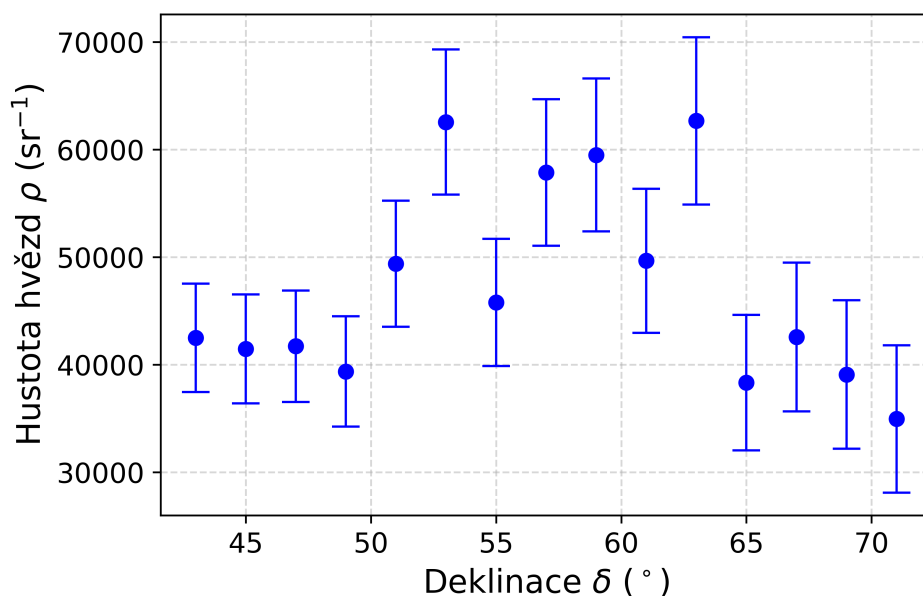
Profil hustoty hvězd skrz Mléčnou dráhu je vynesena v obrázku 1. Na osu x jsme vynesli průměrnou deklinaci každého ze čtverců. Na osu y jsme vynesli hustotu hvězd ze sloupce 6 v tabulce 2 a nejistotu hustoty ze sloupce 7.



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 2: Výsledky podúloh **a)** (sloupec 4) a **b)** (sloupce 5–7). První tři sloupce jsou zkopírovány z tabulky 1.

1	2	3	4	5	6	7
δ_1 (°)	δ_2 (°)	Počet hvězd N	Ω (sr)	ΔN	ρ (sr ⁻¹)	$\Delta\rho$ (sr ⁻¹)
70	72	26	$7,44 \cdot 10^{-4}$	5,1	$3,50 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^3$
68	70	32	$8,19 \cdot 10^{-4}$	5,7	$3,91 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^3$
66	68	38	$8,93 \cdot 10^{-4}$	6,2	$4,26 \cdot 10^4$	$6,9 \cdot 10^3$
64	66	37	$9,65 \cdot 10^{-4}$	6,1	$3,83 \cdot 10^4$	$6,3 \cdot 10^3$
62	64	65	$1,04 \cdot 10^{-3}$	8,1	$6,27 \cdot 10^4$	$7,8 \cdot 10^3$
60	62	55	$1,11 \cdot 10^{-3}$	7,4	$4,97 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^3$
58	60	70	$1,18 \cdot 10^{-3}$	8,4	$5,95 \cdot 10^4$	$7,1 \cdot 10^3$
56	58	72	$1,24 \cdot 10^{-3}$	8,5	$5,79 \cdot 10^4$	$6,8 \cdot 10^3$
54	56	60	$1,31 \cdot 10^{-3}$	7,7	$4,58 \cdot 10^4$	$5,9 \cdot 10^3$
52	54	86	$1,37 \cdot 10^{-3}$	9,3	$6,26 \cdot 10^4$	$6,7 \cdot 10^3$
50	52	71	$1,44 \cdot 10^{-3}$	8,4	$4,94 \cdot 10^4$	$5,9 \cdot 10^3$
48	50	59	$1,50 \cdot 10^{-3}$	7,7	$3,94 \cdot 10^4$	$5,1 \cdot 10^3$
46	48	65	$1,56 \cdot 10^{-3}$	8,1	$4,17 \cdot 10^4$	$5,2 \cdot 10^3$
44	46	67	$1,62 \cdot 10^{-3}$	8,2	$4,15 \cdot 10^4$	$5,1 \cdot 10^3$
42	44	71	$1,67 \cdot 10^{-3}$	8,4	$4,25 \cdot 10^4$	$5,0 \cdot 10^3$



Obrázek 1: Profil hustoty hvězd skrz Mléčnou dráhu v souhvězdí Kasiopieji.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Napište rozpětí deklinačních úhlů, kde se podle grafu nachází Mléčná dráha, a zdůvodněte své rozhodnutí. Spočítejte průměrné hustoty hvězd jasnějších než 10 mag v Mléčné dráze a také mimo Mléčnou dráhu metodou váženého průměru a jejich nejistoty. O kolik je vyšší hustota hvězd v Mléčné dráze a jaká je nejistota tohoto rozdílu? [5 b]

Nápověda: Vážený průměr μ z dat (x_i, σ_i) , kde x_i jsou data a σ_i jsou nejistoty měření, je

$$\mu = \sigma_\mu^2 \sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2}.$$

Nejistota váženého průměru σ_μ se dá spočítat ze vztahu $\frac{1}{\sigma_\mu^2} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}$.

Vidíme, že čtyři krajní hustoty v grafu zleva i zprava mají stejnou hodnotu v rámci nejistot měření. Naopak v centrální části grafu jsou hustoty hvězd systematicky vyšší. Proto dojdeme k závěru, že Mléčná dráha se v našem výřezu oblohy nachází mezi deklinacemi $\delta_{\min} = 50^\circ$ a $\delta_{\max} = 64^\circ$.

Průměrnou hustotu hvězd v Mléčné dráze v našem výseku oblohy tedy spočítáme z prostředních 7 bodů v obrázku 1. Průměrná hustota ρ_G a její nejistota $\Delta\rho_G$ jsou

$$\Delta\rho_G = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 \frac{1}{(\Delta\rho_i)^2}}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ sr}^{-1},$$

$$\rho_G = (\Delta\rho_G)^2 \sum_{i=1}^7 \frac{\rho_i}{(\Delta\rho_i)^2} = 5,44 \cdot 10^4 \text{ sr}^{-1}.$$

Průměrnou hustotu hvězd mimo Mléčnou dráhu spočítáme z krajních 8 bodů. Průměrná hustota ρ_O a její nejistota $\Delta\rho_O$ jsou

$$\Delta\rho_O = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^8 \frac{1}{(\Delta\rho_i)^2}}} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ sr}^{-1},$$

$$\rho_O = (\Delta\rho_O)^2 \sum_{i=1}^8 \frac{\rho_i}{(\Delta\rho_i)^2} = 4,03 \cdot 10^4 \text{ sr}^{-1}.$$

V Mléčné dráze je hustota hvězd o $\rho_G - \rho_O = 1,41 \cdot 10^4 \text{ sr}^{-1}$ vyšší než v blízkém okolí. Nejistota tohoto rozdílu je $\sqrt{(\Delta\rho_G)^2 + (\Delta\rho_O)^2} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ sr}^{-1}$.

e) Nyní se pokusíme odhadnout počet hvězd jasnějších než 10 mag na celé obloze. Předpokládejte, že hustoty hvězd mimo Mléčnou dráhu a v Mléčné dráze, které jste spočítali v podúloze d), platí na celé hvězdné obloze. Taktéž předpokládejte, že Mléčná dráha má na celé obloze stejnou šířku, již můžete odečíst z grafu z podúlohy c). Kolik hvězd jasnějších než 10 mag se nachází na celé obloze a jaká je nejistota počtu hvězd? [5 b]

V podúloze d) jsme přišli na to, že Mléčná dráha ve sledovaném výseku oblohy se nachází mezi 50° a 64° deklinace. Zároveň v zadání zaznělo, že v Kasiopěji dosahuje Mléčná dráha nejvyšší deklinace. Průřez podél deklinace v obrázku 1 jde tedy kolmo skrz Mléčnou dráhu. Tloušťku Mléčné dráhy na celé obloze tudíž odhadneme jako $\beta = 14^\circ$.



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Jelikož Sluneční soustava se nachází v rovině disku naší Galaxie, Mléčná dráha se na zemské obloze promítá podél hlavní kružnice. Dva vrchlíky hvězdné oblohy nad a pod Mléčnou dráhou pokrývají prostorový úhel

$$\Omega_O = 2 \cdot 2\pi \left(\sin(90^\circ) - \sin \frac{\beta}{2} \right) = 11,03 \text{ sr.}$$

Mléčná dráha pokrývá pás oblohy o šířce $\beta/2 = 7^\circ$ na obě strany od galaktického rovníku. Prostorový úhel pokrytý Mléčnou dráhou je

$$\Omega_G = 2 \cdot 2\pi \left(\sin \frac{\beta}{2} - \sin(0^\circ) \right) = 1,53 \text{ sr.}$$

Můžeme ověřit, že součet prostorových úhlů pokrývá celou nebeskou sféru $\Omega_O + \Omega_G = 4\pi \text{ sr.}$

K výpočtu množství hvězd na celé obloze využijeme hustoty z podúlohy **d)**

$$N_{\text{tot}} = \rho_O \Omega_O + \rho_G \Omega_G = 5,28 \cdot 10^5.$$

Nejistota počtu hvězd je

$$\Delta N_{\text{tot}} = \sqrt{(\Omega_O \Delta \rho_O)^2 + (\Omega_G \Delta \rho_G)^2} = 2,2 \cdot 10^4.$$

Celkové množství hvězd janějších než 10 mag jsme odhadli jako $N_{\text{tot}} = 5,28(22) \cdot 10^5$.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení**H O-C diagram***(max. 15 bodů)*

Uvažujte hypotetickou zákrytovou proměnnou hvězdu, u níž byl na základě předchozích pozorování stanoven hrubý odhad oběžné periody $P_0 \approx 0,324$ d. Pro danou proměnnou hvězdu rovněž existují indikace, že se její perioda rovnoměrně mění v čase. Astronomové se tedy rozhodli provést sérii dalších pozorování, pomocí nichž by mohli jednak určit přesnější hodnotu P orbitální periody a také zjistit případnou velikost ΔP její změny za jednu orbitu.

Pokusme se nejdříve nastínit metodu, pomocí níž budeme hodnoty P a ΔP určovat. Předpokládejme, že první pozorované primární minimum ze série nastalo v čase $t_{p,0}$.

a) Napište vztah pro předpokládaný čas C_n primárního minima po uplynutí n orbit od epochy $t_{p,0}$, který bychom vypočetli pomocí počátečního odhadu P_0 orbitální periody. Výsledek vyjádřete pomocí $t_{p,0}$, P_0 a n . [1 b]

Dostaneme

$$C_n = t_{p,0} + nP_0.$$

Pokud je ovšem skutečná perioda v epoše $t_{p,0}$ rovna P a změní-li se navíc velikost periody během každé orbity o konstantní hodnotu ΔP , budeme ve skutečnosti primární minima pozorovat v časech O_n , které se od vypočtených časů C_n budou lišit.

b) Ukažte, že můžeme psát [1,5 b]

$$O_n = t_{p,0} + nP + \frac{1}{2}n(n+1)\Delta P. \quad (1)$$

l -tá orbita následující po epoše $t_{p,0}$ přispěje do času O_n hodnotou

$$P + l\Delta P.$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} O_n &= t_{p,0} + \sum_{l=1}^n (P + l\Delta P) \\ &= t_{p,0} + P \sum_{l=1}^n 1 + \Delta P \sum_{l=1}^n l \\ &= t_{p,0} + nP + \frac{1}{2}n(n+1)\Delta P, \end{aligned}$$

kde jsme použili výsledky

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n 1 &= n, \\ \sum_{l=1}^n l &= \frac{1}{2}n(n+1). \end{aligned}$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

c) Napište vztah pro rozdíl $O_n - C_n$ pozorovaných časů primárního minima v závislosti na počtu n orbit, které uplynuly od epochy $t_{p,0}$. Ve vašem vztahu by měly vystupovat parametry P_0, P a ΔP . [1 b]

Dostaneme

$$O_n - C_n = n(P - P_0) + \frac{1}{2}n(n+1)\Delta P. \quad (2)$$

Tabulka 3: Juliánská data t_p středu primárního minima pro 20 pozorování zákrytové proměnné hvězdy.

#	t_p/JD	#	t_p/JD
1	2457753,4392	11	2457817,1757
2	2457760,8614	12	2457821,6815
3	2457766,3547	13	2457825,2596
4	2457777,3482	14	2457834,0324
5	2457785,1074	15	2457839,5288
6	2457795,8013	16	2457845,3695
7	2457801,2967	17	2457850,5660
8	2457804,8658	18	2457856,4145
9	2457809,3882	19	2457861,9358
10	2457814,2463	20	2457867,1256

V Tabulce 3 vidíme výsledky 20 měření času t_p středu primárního minima. Hodnoty t_p jsou uvedeny ve formátu JD (Juliánské datum): jedná se o počet dnů uplynulých od jistého referenčního data.

d) Pro každé měření v Tabulce 3 určete počet n orbit, které zákrytová proměnná hvězda zkompletovala od epochy $t_{p,0} = \text{JD } 2457753,4392$ dané prvním měřením. Pro každé měření poté vypočtete hodnotu C_n (pomocí počátečního odhadu P_0 periody a výsledku části a)) a rovněž hodnotu $O_n - C_n$ (kde O_n je pozorována hodnota t_p času primárního minima pro dané n). [4,5 b]

Výsledky můžeme vidět v Tabulce 4.

e) Pro $n \geq 80$ vykreslete graf závislosti $\frac{1}{n}(O_n - C_n)$ na n . [4 b]

Výsledný graf vidíme na Obrázku 2.

f) Proložení grafu z předchozí část vhodnou závislostí určete zpřesněnou hodnotu P periody a rovněž případnou relativní změnu $\Delta P/P$ periody připadající na jednu orbitu. [3 b]

Všimněme si, že vztah (2) můžeme přepsat ve tvaru

$$\frac{O_n - C_n}{n} = P - P_0 + \frac{1}{2}\Delta P + \frac{1}{2}n\Delta P.$$

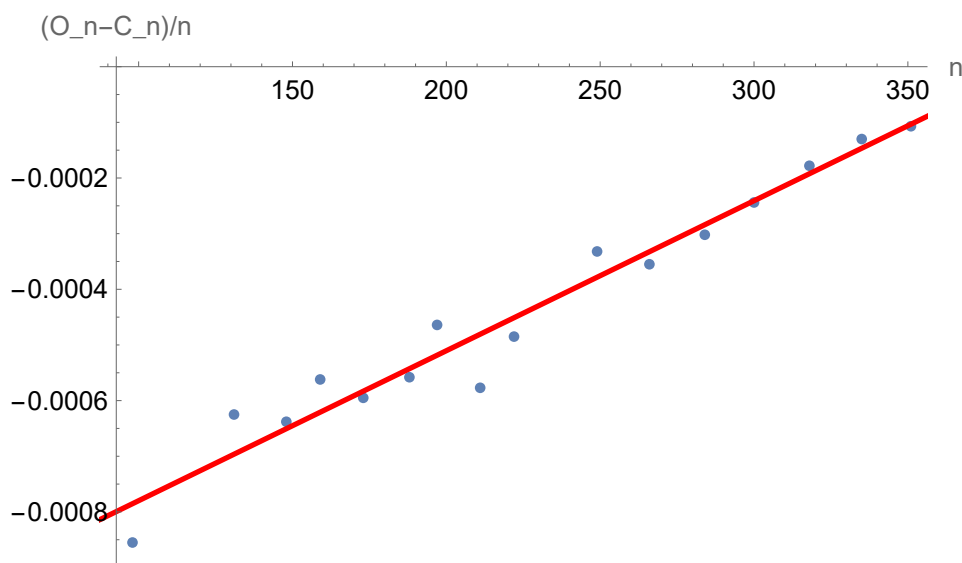
Proložíme-li tedy závislost $\frac{1}{n}(O_n - C_n)$ na n přímkou, její směrnice bude určovat hodnotu $\frac{1}{2}\Delta P$, zatímco její intercept s vertikální osou určí hodnotu $P - P_0 + \frac{1}{2}\Delta P$.



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 4: Vypočtené hodnoty n , C_n a $O_n - C_n$.

#	t_p/JD	n	C_n	$O_n - C_n$
1	2457753,4392	0	2457753,4392	0,0000
2	2457760,8614	23	2457760,8912	-0,0298
3	2457766,3547	40	2457766,3992	-0,0445
4	2457777,3482	74	2457777,4152	-0,0670
5	2457785,1074	98	2457785,1912	-0,0838
6	2457795,8013	131	2457795,8832	-0,0819
7	2457801,2967	148	2457801,3912	-0,0945
8	2457804,8658	159	2457804,9552	-0,0894
9	2457809,3882	173	2457809,4912	-0,1030
10	2457814,2463	188	2457814,3512	-0,1049
11	2457817,1757	197	2457817,2672	-0,0915
12	2457821,6815	211	2457821,8032	-0,1217
13	2457825,2596	222	2457825,3672	-0,1076
14	2457834,0324	249	2457834,1152	-0,0828
15	2457839,5288	266	2457839,6232	-0,0944
16	2457845,3695	284	2457845,4552	-0,0857
17	2457850,5660	300	2457850,6392	-0,0732
18	2457856,4145	318	2457856,4712	-0,0567
19	2457861,9358	335	2457861,9792	-0,0434
20	2457867,1256	351	2457867,1632	-0,0376



Obrázek 2: Graf závislosti $\frac{1}{n}(O_n - C_n)$ na n pro 16 měření středu primárního minima.



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Data vykreslená v předchozí části můžeme proložit lineární závislostí „od oka“. Dostaneme pak

$$\Delta P \doteq 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ d},$$

a také

$$P - P_0 + \frac{1}{2}\Delta P \doteq -0,0010 \text{ d}.$$

Dostáváme tedy zpřesněnou hodnotu periody $P \doteq 0,3230 \text{ d}$ a relativní prodlužování periody $\frac{\Delta P}{P} \doteq 1,7 \cdot 10^{-5}$ za jednu orbitu.

Poznámka: datové body pro malé hodnoty n jsme vynechali kvůli dělení hodnotou n vertikální souřadnice – tato metoda produkuje větší nepřesnosti ve vertikální poloze datových bodů s klesající hodnotou n . Nejedná se o nejpřesnější postup určení P a ΔP : přesnějších výsledků bychom dosáhli přímým fitováním kvadratické funkce na závislost $O_n - C_n$ na n pomocí počítače.