

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Krátké úlohy

A Dvacetifranková početní rozcvička

(max. 10 bodů)

Výzdoba švýcarské 20frankové bankovky z roku 2017 je inspirována světlem. Na bankovce jsou drobným písmem napsány vzdálenosti ve světelných sekundách (značka ls, z anglického *light second*) mezi Zemí a různými vesmírnými tělesy.

a) Na bankovce je udána vzdálenost mezi Zemí a Sluncem 494 ls. Jaká vzdálenost r v kilometrech a v astronomických jednotkách tomu odpovídá? [1 b]

Světlo se pohybuje rychlostí $c = 299\,792\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Astronomická jednotka má hodnotu $1\text{ au} = 1,496 \cdot 10^8\text{ km}$. Vzdálenost mezi Zemí a Sluncem odpovídající vzdálenosti $r = 494\text{ ls}$ je

$$r = 494\text{ ls} = 1,481 \cdot 10^8\text{ km} = 0,990\,0\text{ au}.$$

Oběžná dráha Země okolo Slunce je eliptická s nízkou excentricitou. V následujících pár podúlohách zkusíme vypátrat, kterému dni v roce tato vzdálenost přibližně odpovídá.

b) Spočítejte pravou anomálii ν , excentrickou anomálii E a střední anomálii M Země odpovídající vzdálenosti r spočítané v podúloze a). Výsledky uveďte číselně ve stupních. [6 b]

Excentricita zemské dráhy je $e = 0,016\,7$. Pravou anomálii vypočteme jako

$$\cos \nu = \frac{1}{e} \left(\frac{a(1 - e^2)}{r} - 1 \right),$$
$$\nu = \pm 0,942\,2\text{ rad} = \pm 53,99^\circ.$$

Excentrickou anomálii získáme jako

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\nu}{2},$$
$$E = \pm 0,928\,9\text{ rad} = \pm 53,22^\circ.$$

Konečně střední anomálie pak je

$$M = E + e \sin E,$$
$$M = \pm 0,942\,2\text{ rad} = \pm 53,99^\circ.$$

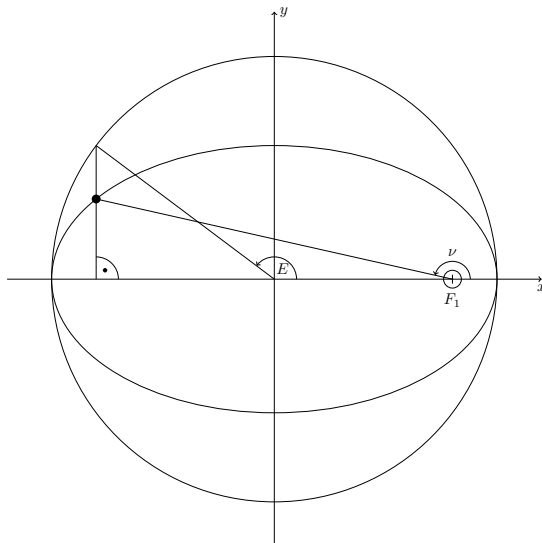
c) Země prochází perihéliem 4. ledna. Který den v roce může odpovídat vzdálenosti napsané na 20frankové bankovce? [3 b]

Střední anomálie $M = \pm 0,942\,2\text{ rad}$ odpovídá času od průchodu perihéliem

$$t = \frac{MT}{2\pi},$$

tedy $t = \pm 54,8\text{ d}$. Vzhledem k symetrii oběžné dráhy Země mohl hledaný den nastat 55 dní před 4. lednem nebo 55 dní po 4. lednu. To znamená buď 10. listopadu nebo 28. února.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Pravá anomálie ν a excentrická anomálie E vyznačená na oběžné elipse. Planeta je vyznačená černým kolečkem. Slunce se nachází v ohnisku F_1 .

Nápověda: Pravá anomálie je úhel mezi planetou, Sluncem a perihéliem. Excentrická anomálie je definovaná pomocí kružnice o poloměru rovném velké poloose elipsy se středem ve středu elipsy. Jestliže k ose elipsy vedeme kolmici procházející planetou, pak úhel mezi průsečíkem kolmice s kružnicí, středem kružnice a perihéliem je excentrická anomálie. Viz obrázek 1. Střední anomálie je úhel, který by planeta za čas od průchodu perihéliem urazila po kružnici, pokud by se pohybovala rovnoměrnou úhlovou rychlostí se stejnou celkovou periodou oběhu. Mezi hlavní poloosou a a excentricitou e oběžné dráhy, pravou anomálií ν a vzdáleností od Slunce r je vztah

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}.$$

Mezi pravou anomálií ν a excentrickou anomálií E je vztah

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

Mezi excentrickou anomálií E a střední anomálií M platí vztah

$$M = E - e \sin E.$$

Mezi střední anomálií M , periodou oběhu planety T , a časem od průchodu perihéliem t platí vztah

$$M = \frac{2\pi t}{T}.$$



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

B Kontrakce

(max. 8 bodů)

Před znalostí atomového jádra a ekvivalence hmoty a energie navrhli Lord Kelvin a Hermann von Helmholtz, že Slunce svítí díky tomu, že se celé smršťuje. Řádově odhadněte dobu t_{KH} (číselně v letech), po jakou by Slunce mohlo díky energii získané z gravitační kontrakce svítit při jeho současném výkonu. Uveďte argumenty, proč tento mechanismus nemůže být ten správný. V jaké fázi vývoje byla gravitační kontrakce pro Slunce relevantním zdrojem energie?

Pro řádový odhad nám postačí přibližný vztah

$$U_{\odot} \approx E_{\odot} \approx -\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}}$$

pro celkovou energii, která se může uvolnit při gravitačním kolapsu. Požadovanou časovou škálu získáme po vydělení pozorovaným výkonem Slunce. Tedy

$$t_{\text{KH}} = \frac{|U_{\odot}|}{L_{\odot}} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ let}.$$

Poznámka: Pokud bychom Slunce modelovali jako homogenní kouli, jeho gravitační potenciální energie by byla rovna

$$U_{\odot} = -\frac{3}{5} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}}.$$

Mohli bychom pak rovněž psát přesnější vztah (plynoucí z viriálové věty)

$$E_{\odot} = \frac{1}{2} U_{\odot} = -\frac{3}{10} \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}}$$

pro celkovou energii, která se při kolapsu může uvolnit. Pro řádový odhad času, po který by Slunce takto dokázalo svítit, nám ovšem stejně dobře poslouží přibližné vztahy zmíněné výše.

Stáří Země a Sluneční soustavy je známo z radionuklidového datování a je přibližně rovno 4,567 miliardám let. Ovšem i bez radionuklidového datování lze stáří Země omezit z geologie nebo z časové škály, na které probíhá darwinovská evoluce. Slunce tedy musí mít k dispozici mnohem více energie, než kolik může získat gravitačním kolapsem. Energie gravitačního kolapsu byla důležitou složkou celkové energetické rovnováhy Slunce **před** jeho vstupem na hlavní posloupnost.

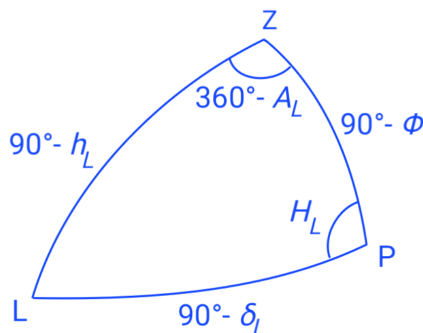
Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Zákeřná lampa

(max. 10 bodů)

Kuba rád fotografuje noční oblohu ze svého balkónu ($\phi = 50,09^\circ$ s.š., $\lambda = 14,42^\circ$ v.d.). Pozorování mu ale kazí rozsvícená lampa s obzorníkovými souřadnicemi $h_L = 30^\circ$ (výška nad obzorem) a $A_L = 111^\circ$ (azimut, měříme standardně od severu směrem na východ). V jakém rozsahu deklinací *nemůže* Kuba fotit, chce-li zajistit minimální vzdálenost foceného objektu 10° od lampy v jakýkoliv čas a den v roce?

Zadané obzorníkové souřadnice lampy můžeme přepočítat na rovníkové souřadnice prvního druhu (deklinaci δ_L a hodinový úhel h_L). Nakreslíme si sférický trojúhelník s vrcholy L (lampa), P (severní světový pól) a Z (zenit). Vyznačíme si délky jednotlivých stran: $|PZ| = 90^\circ - \phi$, $|PL| = 90^\circ - \delta_L$, $|ZL| = 90^\circ - h_L$ a jednotlivé úhly: hodinový úhel H_L bude úhel u vrcholu P, úhel u vrcholu Z bude mít velikost $360^\circ - A_L$, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Sférický trojúhelník pro převod obzorníkových souřadnic lampy na rovníkové prvního druhu.

Deklinaci lampy pak můžeme vyjádřit s pomocí sférické kosinové věty

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \delta_L) &= \cos(90^\circ - \phi) \cos(90^\circ - h_L) + \\ &\quad + \sin(90^\circ - \phi) \sin(90^\circ - h_L) \cos(360^\circ - A_L) \\ &= \sin \phi \sin h_L + \cos \phi \cos h_L \cos A_L, \end{aligned}$$

tedy

$$\delta_L = \arcsin(\sin \phi \sin h_L + \cos \phi \cos h_L \cos A_L) \doteq 10,6^\circ.$$

Vzdálenost 10° od lampy bude znamenat rozdíl v deklinaci maximálně 10° oběma směry. Deklinace, které Kuba nebude moct fotit leží tedy v intervalu $(\delta_L - 10^\circ, \delta_L + 10^\circ)$, číselně vychází přibližně $(0,6^\circ, 20,6^\circ)$.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

D Zákryt Neptunu v opozici

(max. 12 bodů)

Pozorovatel na Zemi sleduje zákryt Neptunu planetkou v opozici. Uvažujte, že orbity planetky i Neptunu se nacházejí v rovině ekliptiky. Planetka má průměr $D_p = (1,8 \pm 0,3)$ km a obíhá kolem Slunce po kruhové dráze s poloměrem $a_p = (2,24 \pm 0,18)$ au. Neptun má průměr $D_N = 49\,530$ km a je od Země v opozici vzdálený $r_N = 29,07$ au. Předpokládejte, že zákryt je centrální, neboli že uprostřed zákrytu se pozorovatel nachází na jedné přímce se středem planetky a disku Neptunu. Určete celkovou dobu T trvání zákrytu (od prvního do posledního kontaktu) a její nejistotu. Výsledky запиšte číselně v sekundách. Země se v okamžiku pozorování nachází ve vzdálenosti $a_Z = 1,00$ au od Slunce.

Nápověda: Relativní nejistota n -té mocniny veličiny je $|n|$ -násobek relativní nejistoty dané veličiny.

Dobu trvání přechodu planetky přes disk Neptunu spočítáme z úhlových rychlostí pohybu planetky a Neptunu po obloze. Ze zadání máme uvažovat zjednodušení, že oběžné dráhy Země, planetky i Neptunu leží v jedné rovině. Dále bylo řečeno, že planetka obíhá Slunce po kruhové dráze. Kvůli nízkým excentricitám oběžných drah Země a Neptunu budeme uvažovat, že i tyto planety obíhají Slunce po kruhových drahách. Taktéž budeme předpokládat, že planetka obíhá Slunce ve stejném směru jako Země a Neptun. To sice v zadání nebylo explicitně řečeno, ale všechna tělesa ve Sluneční soustavě vznikla z mračna plynu a prachu rotujícího okolo rodícího se Slunce. Podle velikosti poloosy $a_p = 2,24(18)$ au se planetka nachází v pásu planetek mezi Marsem a Jupiterem. Tam všechny planety obíhají Slunce ve stejném směru jako hlavní planety. Ani jednotlivé srážky mezi planetkami totiž nemívají dostatek energie, aby obrátily směr orbity.

Oběžné rychlosti Země, planetky a Neptunu jsou po řadě

$$\begin{aligned} v_Z &= \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z}} = 29,80 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \\ v_p &= \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_p}} = 19,91 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \\ v_N &= \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z + r_N}} = 5,43 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}, \end{aligned}$$

kde $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$ je gravitační konstanta a $M_\odot = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ je hmotnost Slunce, jejichž hodnoty jsme získali z tabulky konstant. Úhlová rychlost planetky po obloze z pro pozorovatele na Zemi je

$$\omega_{p,Z} = \frac{v_Z - v_p}{a_p - a_Z} = 5,33 \cdot 10^{-8} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

a úhlová rychlost Neptunu po obloze je

$$\omega_{N,Z} = \frac{v_Z - v_N}{r_N} = 5,61 \cdot 10^{-9} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Obě dvě tělesa se pohybují v záporném směru ekliptikální délky, přičemž planetka se po obloze pohybuje rychleji.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nyní se zamyslíme, co se musí stát během přechodu planety přes kotouček Neptunu trvajícího zatím neznámý čas T . Neptun po obloze urazí úhel

$$\theta_N = \omega_{N,Z}T,$$

zatímco planetka urazí vzdálenost

$$\theta_p = \omega_{p,Z}T,$$

přičemž musí platit

$$\theta_N + \rho_N + \rho_p = \theta_p.$$

Zde ρ_N a ρ_p jsou úhlové průměry Neptunu a planety při pohledu ze Země

$$\rho_N = \frac{D_N}{r_N} = 1,14 \cdot 10^{-5} \text{ rad},$$

$$\rho_p = \frac{D_p}{a_p - a_Z} = 1,06(18) \cdot 10^{-8} \text{ rad}.$$

Dobu trvání přechodu můžeme spojením výše zmíněných rovnic odvodit jako

$$\omega_{N,Z}T + \rho_N + \rho_p = \omega_{p,Z}T,$$

$$T = \frac{\rho_N + \rho_p}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}} \approx \frac{\rho_N}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}} = 239 \text{ s},$$

kde v poslední úpravě jsme zanedbali úhlový průměr planety $\rho_p \ll \rho_N$.

Abychom však správně spočítali nejistotu délky trvání zákrytu, musíme vztah pro T vyjádřit pomocí původních veličin ze zadání D_p a a_p

$$T = \frac{\rho_N}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}}.$$

Všimněme si, že jediný člen závisící na velké poloose a_p je úhlová rychlost $\omega_{p,Z}$. Průměr planety D_p pak nikde nevystupuje, neboť jsme jej zanedbali. Označme absolutní nejistotu úhlové rychlosti $\omega_{p,Z}$ jako $\Delta\omega_{p,Z}$. Absolutní nejistota jmenovatele zlomku je

$$\Delta(\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}) = \Delta\omega_{p,Z}.$$

Relativní nejistota doby trvání přechodu je stejná jako relativní nejistota jmenovatele

$$\delta T = \frac{\Delta T}{T} = \delta \left(\frac{1}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}} \right) = \delta(\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}) = \frac{\Delta(\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z})}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}} = \frac{\Delta\omega_{p,Z}}{\omega_{p,Z} - \omega_{N,Z}}. \quad (1)$$

Nyní musíme vyjádřit úhlovou rychlost $\omega_{p,Z}$ pomocí velké poloosy a_p , abychom mohli spočítat nejistotu $\Delta\omega_{p,Z}$

$$\omega_{p,Z} = \frac{v_Z - v_p}{a_p - a_Z} = \frac{\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z}} - \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_p}}}{a_p - a_Z} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z^3}} \frac{1 - \sqrt{\frac{a_Z}{a_p}}}{\frac{a_p}{a_Z} - 1} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_Z^3}} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{\alpha - 1}.$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Lépe se nám bude pracovat s poměrem α velkých poloos Země a planety, který můžeme snadno spočítat i s jeho nejistotou

$$\alpha = \frac{a_p}{a_z} = 2,24(18).$$

Výraz můžeme dále upravit tak, aby se α vyskytovala pouze ve jmenovateli

$$\omega_{p,z} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_z^3}} \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\sqrt{\alpha} - 1)}{(\sqrt{\alpha} + 1)(\sqrt{\alpha} - 1)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_z^3}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\alpha} + 1)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_z^3}} \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}.$$

Jak bylo řečeno v nápovědě, relativní nejistota n -té mocniny veličiny je rovná $|n|$ -násobku relativní nejistoty oné veličiny. Relativní nejistota odmocniny z α je tedy

$$\delta(\sqrt{\alpha}) = \frac{\Delta\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \delta(\alpha^{1/2}) = \frac{1}{2}\delta\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha}. \quad (2)$$

Absolutní nejistota jmenovatele zlomku je prostým součtem nejistot jednotlivých sčítanců, protože nejsou nezávislé

$$\Delta(\alpha + \sqrt{\alpha}) = \Delta\alpha + \Delta\sqrt{\alpha} = \Delta\alpha + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

kde jsme za $\Delta\sqrt{\alpha}$ dosadili z rovnice (2). Relativní nejistota úhlové rychlosti $\omega_{p,z}$ je stejná jako relativní nejistota zlomku

$$\delta\omega_{p,z} = \frac{\Delta\omega_{p,z}}{\omega_{p,z}} = \delta\left(\frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}}\right) = \delta(\alpha + \sqrt{\alpha}) = \frac{\Delta(\alpha + \sqrt{\alpha})}{\alpha + \sqrt{\alpha}} = \frac{\Delta\alpha + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\alpha}}}{\alpha + \sqrt{\alpha}} = 6,4 \, \%.$$

Tento výsledek můžeme dosadit do rovnice (1), abychom spočítali absolutní nejistotu délky přechodu

$$\Delta T = T\delta T = T \frac{\Delta\omega_{p,z}}{\omega_{p,z} - \omega_{N,z}} = T \frac{\omega_{p,z}\delta\omega_{p,z}}{\omega_{p,z} - \omega_{N,z}} = \frac{T\omega_{p,z}}{\omega_{p,z} - \omega_{N,z}} \frac{\Delta\alpha + \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\alpha}}}{\alpha + \sqrt{\alpha}} = 17 \, \text{s}.$$

Přechod planety přes kotouček Neptunu trval 239(17) s.

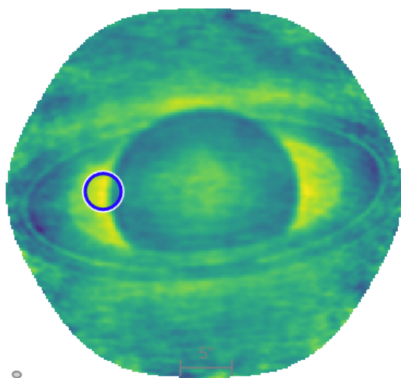
Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Dlouhé úlohy

E Rádiovy Saturn

(max. 20 bodů)

V této úloze odhadnete monochromatický zářivý tok Φ_ν na frekvenci $\nu = 300$ GHz, který na Zemi zaznameneáme v důsledku tepelného záření Saturnových prstenců. Rovněž uvažujte, že částice prachu mají na dané frekvenci Bondovo albedo $A_B = 0,5$ a že prstenec je dostatečně tenký na to, aby byl jako celek v termodynamické rovnováze. Bude nás zajímat pouze *tepelné* záření emitované prachem v prstenci, odražené (rozptýlené) záření neuvažujte. V celé úloze předpokládejte, že pozorování vykonáváme v okamžiku, kdy vzdálenost Saturnu od Země dosahuje minimální hodnoty $d = 8$ au.



Obrázek 3: Saturn v milimetrovém oboru. Obrázek je uveden pro ilustraci a není potřeba k vyřešení úlohy.

a) Spočítejte teplotu T (číselně v K), na které se ustálí částice prachu v prstenci Saturnu. [2,5 b]

Můžeme psát rovnici radiální rovnováhy ve tvaru

$$k_\odot \left(\frac{1 \text{ au}}{d_\odot} \right)^2 (1 - A_B) \pi r^2 = 4\pi r^2 \sigma T^4,$$

kde $k_\odot$ je sluneční konstanta $d_\odot = d + 1$ au je vzdálenost Saturnu od Slunce (je-li vzdálenost Saturnu od Země nejmenší, je Saturn v opozici) a r je poloměr částice prachu, který se ovšem vykrátí. Při dosazení vzdálenosti $d_\odot = 9$ au Saturnu od Slunce a sluneční konstanty $k_\odot = 1366 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ dostaneme

$$T = \sqrt[4]{\frac{k_\odot (1 - A_B)}{4\sigma} \left(\frac{1 \text{ au}}{d_\odot} \right)^2} \doteq 78 \text{ K}.$$

Rovnice přenosu záření říká, že při průchodu vrstvou prostředí o tloušťce Δs se monochromatická intenzita I_ν záření (veličina udávající emitovanou spektrální hustotu zářivého toku vztaženou na jednotku prostorového úhlu pokrytého zdrojem) změní o

$$\Delta I_\nu = \left(\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} - I_\nu \right) \varrho \kappa_\nu \Delta s, \quad (3)$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

kde j_ν je emisní koeficient na jednotku hmotnosti prostředí a ϱ je hustota prostředí. V celé úloze předpokládáme, že prach v prstencích je v lokální termodynamické rovnováze. Platí tedy Kirchhoffův zákon ve tvaru

$$\frac{j_\nu}{\kappa_\nu} = B_\nu \approx \frac{2k_B T \nu^2}{c^2}, \quad (4)$$

kde k_B je Boltzmannova konstanta, c je rychlost světla ve vakuu a Planckovu funkci B_ν jsme aproximovali pomocí Rayleighova-Jeansova zákona.

Budeme nejprve předpokládat, že prostředí prstence je *opticky tenké*, tedy že energie vyzářená částicemi prachu v prstenci není v samotném prstenci pohlcena. To znamená, že budeme zanedbávat druhý (absorpční) člen na pravé straně rovnice přenosu záření (3). Za tohoto předpokladu se rovnice přenosu záření redukuje na tvar

$$\Delta I_{\nu, \text{thin}} = B_\nu \varrho \kappa_\nu \Delta s = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \varrho \kappa_\nu \Delta s. \quad (5)$$

Budeme uvažovat, že veličiny ϱ , κ_ν a T jsou na průřezu prstence konstantní.

b) Napište obecný vztah pro monochromatickou intenzitu $I_{\nu, \text{thin}}$ tepelného záření emitovaného ve směru *kolmo* na prstenec za předpokladu opticky tenkého režimu. Výsledek vyjádřete pomocí k_B , T , ν , c , ϱ , κ_ν a tloušťky D prstence. [1 b]

Použitím rovnice přenosu záření zjistíme, že podél průřezu prstence se intenzita $I_{\nu, \text{thin}}$ emitovaná směrem k pozorovateli kolmo na rovinu prstence vlivem termální emise prachových částic změní z 0 (na opačné straně prstence odvrácené od pozorovatele) až na

$$I_{\nu, \text{thin}} = B_\nu \varrho \kappa_\nu D = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \varrho \kappa_\nu D.$$

Monochromatickou intenzitu I_ν můžeme obecně přepočítat na pozorovaný monochromatický zářivý tok Φ_ν (výkon dopadající na jednotku plochy na dané frekvenci) pomocí vztahu

$$\Phi_\nu \approx I_\nu \Delta \Omega,$$

kde $\Delta \Omega$ je prostorový úhel (ve steradiánech), který zdroj pokrývá na obloze. Uvažujeme $\Delta \Omega \ll 1$. Předpokládejte, že celková hmotnost složky prachu v prstenci, která nejvíce přispívá k pozorovanému záření, je rovna $2,1 \cdot 10^{17} \text{ kg}$. Tento prach má na zadané frekvenci $\nu = 300 \text{ GHz}$ monochromatickou opacitu $\kappa_\nu = 1 \text{ cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$.

c) Spočítejte monochromatický tok $\Phi_{\nu, \text{thin}}$ z celého prstence pozorovaný ze Země za předpokladu opticky tenkého režimu. Důkladně vysvětlete, proč je v opticky tenkém případě výsledný tok nezávislý na sklonu roviny prstenců vůči pozorovateli. Výsledek uveďte obecně pomocí M , κ_ν , k_B , T , ν , d , c a číselně v jednotkách jansky, kde $1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$. [3 b]

Označíme-li jako A plochu prstenců a jako θ sklon roviny Saturnových prstenců vůči zornému paprsku, můžeme psát

$$\Delta \Omega = \frac{A \sin \theta}{d^2}.$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Zároveň si ale musíme uvědomit, že tok detekovaný na Zemi prošel tlustší vrstvou prstence, než kdybychom ho měřili ve směru kolmém na rovinu prstenců. Dle zadání budeme předpokládat, že tato vrstva byla opticky tenká. Musíme pak psát

$$I_{\nu, \text{thin}} = B_{\nu} \varrho \kappa_{\nu} \frac{D}{\sin \theta}.$$

Celkem pak máme

$$\Phi_{\nu, \text{thin}} = \frac{A \sin \theta}{d^2} B_{\nu} \varrho \kappa_{\nu} \frac{D}{\sin \theta} = \frac{(\varrho A D) \kappa_{\nu} B_{\nu}}{d^2} = \frac{M \kappa_{\nu} B_{\nu}}{d^2} = \frac{M \kappa_{\nu} 2k_B T \nu^2}{d^2 c^2} \doteq 3\,160 \text{ Jy}.$$

Vidíme, že závislost na sklonu θ roviny prstenců vůči zornému paprsku se ve výsledném vztahu vykrátí.

Nyní zkusíme modelovat prstence Saturnu jako *opticky tlustý* zářič. V takovém režimu při průchodu vrstvou Δs prostředí prstence nastává rovnováha mezi emitovaným a absorbovaným zářením, neboli $\Delta I_{\nu} = 0$. Z pravé strany rovnice přenosu záření (3) a Kirchhoffova zákona (4) pak plyne, že monochromatickou intenzitu emitovanou povrchem prstence pokládáme přímo do rovnosti s Planckovou funkcí, tedy

$$I_{\nu, \text{thick}} = B_{\nu}. \quad (6)$$

Pro B_{ν} budeme nadále používat Rayleighovu-Jeansovu aproximaci. V následujících úkolech uvažujte vnitřní poloměr prstenců $R_{\text{in}} = 67\,000 \text{ km}$, vnější poloměr $R_{\text{out}} = 140\,000 \text{ km}$ a sklon $i = 27^\circ$ roviny prstenců vůči ekliptice.

d) Za předpokladu opticky tlustého režimu vypočtete maximální hodnotu monochromatického toku $\Phi_{\nu, \text{thick}}$, který můžeme od Saturnu v průběhu času pozorovat. Výsledek uveďte obecně pomocí k_B , T , ν , d , c , R_{in} , R_{out} , i a číselně v Jy. [**3 b**]

Je-li prstenec opticky tlusté prostředí, naměříme tok

$$\Phi_{\nu, \text{thick}} = B_{\nu} \frac{A \sin \theta}{d^2} = \frac{A \sin \theta}{d^2} \frac{2k_B T \nu^2}{c^2}.$$

Abychom maximalizovali $\Phi_{\nu, \text{thick}}$, musíme maximalizovat θ , tedy položit $\theta = i$ (vzdálenost d již uvažujeme minimální). Dostaneme pak maximální zářivý tok

$$\Phi_{\nu, \text{thick}, \text{max}} = \frac{\pi(R_{\text{out}}^2 - R_{\text{in}}^2) \sin i}{d^2} B_{\nu} = \frac{2k_B T \nu^2}{c^2} \frac{\pi(R_{\text{out}}^2 - R_{\text{in}}^2) \sin i}{d^2} \doteq 3\,250 \text{ Jy}.$$

To je hodnota podobná té, která nám vyšla v předchozí části za předpokladu opticky tenkého režimu. Jak ale brzy uvidíme, ani jeden z těchto výsledků není blízký správné hodnotě.

Zkusme nyní rozhodnout, který ze dvou výše uvažovaných režimů se ve skutečnosti realizuje. Kritérium můžeme formulovat pomocí bezrozměrové *optické tloušťky*

$$\tau = \varrho \kappa_{\nu} \Delta s, \quad (7)$$



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

příslušející dráze Δs , kterou záření urazilo v prostředí prstence. Pokud τ splňuje $\tau \ll 1$, jedná se o opticky tenké prostředí, v případě $\tau \gg 1$ máme naopak opticky tlustý režim.

e) Určete minimální optickou tloušťku $\tau_{\min}$ prstence Saturnu pozorovanou ze Země v průběhu času. Výsledek vyjádřete obecně pomocí toku $\Phi_{\nu, \text{thin}}$ a $\Phi_{\nu, \text{thick}}$, které jste získali v částech c) a d). Napište rovněž číselnou hodnotu $\tau_{\min}$. [2,5 b]

Optickou tloušťku prstence podél zorného paprsku můžeme obecně vyjádřit jako

$$\tau = \varrho \kappa_{\nu} \frac{D}{\sin \theta}.$$

Zároveň si vzpomeneme na obecné vztahy

$$\Phi_{\nu, \text{thin}} = \frac{A \sin \theta}{d^2} B_{\nu} \varrho \kappa_{\nu} \frac{D}{\sin \theta},$$

$$\Phi_{\nu, \text{thick}} = \frac{A \sin \theta}{d^2} B_{\nu}$$

pro $\Phi_{\nu, \text{thin}}$ a $\Phi_{\nu, \text{thick}}$ odvozené v částech c) a d). Odtud můžeme odečíst vztah

$$\tau = \frac{\Phi_{\nu, \text{thin}}}{\Phi_{\nu, \text{thick}}}.$$

V konfiguraci s maximální hodnotou $\Phi_{\nu, \text{thick}}$ (úhel $\theta = i$) dostaneme číselně

$$\tau_{\min} = \frac{3\,160 \text{ Jy}}{3\,240 \text{ Jy}} \doteq 0,97.$$

Na základě vašich výsledků byste měli usoudit, že při pohledu ze Země opticky tenký režim nikdy nastává. Konfiguraci uvažované v části e) (minimální pozorovaná optická tloušťka) navíc neodpovídá ani opticky tenký ani opticky tlustý režim, neboť τ vyšlo v řádu nízkých jednotek.

Pro obecné hodnoty τ , které interpolují mezi opticky tenkým a opticky tlustým režimem, musíme rovnici zářivého přenosu (3) integrovat. Dostali bychom pak správný vztah

$$I_{\nu}(\tau) = B_{\nu} (1 - e^{-\tau}) \quad (8)$$

pro monochromatickou intenzitu $I_{\nu}(\tau)$ emitovanou prstencem směrem k pozorovateli v závislosti na optické tloušťce τ prstence podél paprsku.

f) Ukažte, že pro $\tau \ll 1$, resp. $\tau \gg 1$ ze vztahu (8) skutečně dostáváme výsledek pro intenzitu $I_{\nu, \text{thin}}$ v opticky tenkém režimu odvozený v části b), resp. vztah (6) pro intenzitu $I_{\nu, \text{thick}}$ v opticky tlustém režimu. [1,5 b]

Nápověda: Může se vám hodit přibližný vztah $e^x \approx 1 + x$, který platí pro $x \ll 1$.

V opticky tlustém režimu $\tau \gg 1$ můžeme exponenciálu $e^{-\tau}$ ve vztahu (8) bezpečně zanedbat a dostáváme vztah (6) pro $I_{\nu, \text{thick}}$. Naopak v opticky tenkém režimu $\tau \ll 1$ můžeme aproximovat

$$e^{-\tau} \approx 1 - \tau,$$

a tedy

$$B_{\nu} (1 - e^{-\tau}) \approx B_{\nu} (1 - 1 + \tau) = B_{\nu} \tau,$$

odkud po dosazení za τ z definice (7) dostaneme vztah pro $I_{\nu, \text{thin}}$ odvozený v části b).

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

g) Vypočtete skutečnou maximální hodnotu monochromatického toku Φ_ν termálního záření Saturnových prstenců (číselně v Jy), kterou v průběhu času můžeme na Zemi naměřit. Porovnejte s výsledky části c) a d). [3 b]

Nápověda: Funkce $f(x) = (1 - e^{-x})/x$ je na intervalu $x \in \langle 0, \infty \rangle$ striktně klesající.

Všimněme si, že můžeme psát

$$\sin \theta = \frac{\varrho \kappa_\nu D}{\tau}.$$

Obecně tedy můžeme naměřený zářivý tok Φ_ν zapsat jako funkci τ pomocí vztahu

$$\Phi_\nu = \frac{A \sin \theta}{d^2} B_\nu (1 - e^{-\tau}) = \frac{(AD\varrho)\kappa_\nu}{d^2} B_\nu \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} = \Phi_{\nu, \text{thin}} \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau},$$

kde $\Phi_{\nu, \text{thin}}$ je konstantní hodnota vypočtená v části c). Jelikož je funkce $\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}$ pro fyzikální hodnoty τ striktně klesající, získáme maximální hodnotu monochromatického toku dosazením hodnoty $\tau_{\min}$, kterou jsme určili v části e). Dostaneme

$$\Phi_{\nu, \max} = \Phi_{\nu, \text{thin}} \frac{1 - e^{-\tau_{\min}}}{\tau_{\min}} \doteq 2020 \text{ Jy}.$$

Správným řešením rovnice přenosu záření jsme tedy dostali hodnotu podstatně nižší, než použitím aproximací v částech c) a d), které byly platné pouze v opticky tenkém, resp. opticky tlustém režimu.

V poslední části úlohy se podíváme na radiové záření přicházející ze samotného kotoučku planety Saturn na stejné frekvenci. Předpokládejte, že termální emise zde probíhá v opticky *tlustém* režimu. Uvažujte, že od kotoučku planety Saturn můžeme ve vzdálenosti $d = 8 \text{ au}$ naměřit celkový monochromatický tok $\Phi_{\nu, S} = 2900 \text{ Jy}$. Stínění disku prstenci zanedbejte. Poloměr planety Saturn je $R_S = 58232 \text{ km}$.

h) Určete *jasovou teplotu* $T_{S, b}$ disku Saturnu (číselně v K), tedy teplotu vypočtenou na základě předpokladu, že veškerý pozorovaný tok $\Phi_{\nu, S}$ je termálního původu. Určete rovněž očekávanou rovnovážnou teplotu povrchu Saturnu $T_{S, e}$ (vypočtenou za předpokladu, že Saturn nedisponuje žádnými vnitřními zdroji energie). Předpokládejte Bondovo albedo Saturnu $A_{B, S} = 0,35$. Hodnoty $T_{S, b}$ a $T_{S, e}$ porovnejte a diskutujte původ případného nesouladu. [3,5 b]

Ze vztahu

$$\Phi_{\nu, S} = B_\nu \frac{\pi R_S^2}{d^2} = \frac{2k_B T_{S, b} \nu^2}{c^2} \frac{\pi R_S^2}{d^2}$$

pro monochromatický tok $\Phi_{\nu, S}$, který platí v opticky tlustém režimu, můžeme vyjádřit jasovou teplotu $T_{S, b}$ povrchu Saturnu jako

$$T_{S, b} = \frac{c^2}{2k_B \nu^2} \frac{d^2}{\pi R_S^2} \Phi_{\nu, S} \doteq 140 \text{ K}.$$

Za předpokladu absence vnitřních zdrojů energie píšeme pro Saturn radiální rovnováhu ve tvaru

$$k_\odot \left(\frac{1 \text{ au}}{d_\odot} \right)^2 (1 - A_{B, S}) \pi R_S^2 = 4\pi R_S^2 \sigma T_{S, e}^4,$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

odkud můžeme vyjádřit

$$T_{\text{S,e}} = \sqrt[4]{\frac{k_{\odot}(1 - A_{\text{B}})}{4\sigma} \left(\frac{1 \text{ au}}{d_{\odot}}\right)^2} \doteq 83 \text{ K}.$$

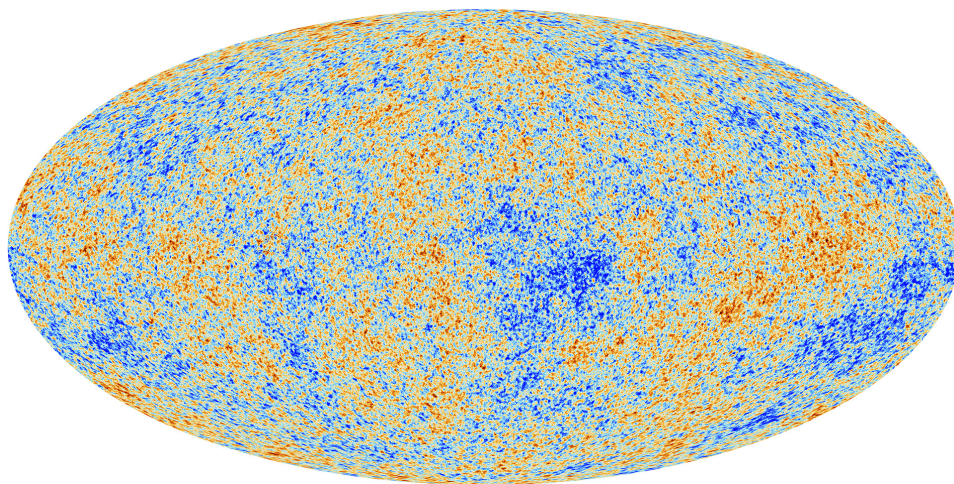
Vidíme, že rovnovážná teplota vyšla podstatně nižší než jasová teplota. Toto může nastat z několika důvodů.

1. Rovnovážná teplota může být nižší než skutečná efektivní teplota Saturnu, protože mohou být přítomny vnitřní zdroje energie, jako například gravitační kontrakce (ukazuje se, že toto je skutečně jeden z přispívajících faktorů).
2. Jasová teplota je vypočtena z *celkového* pozorovaného toku. Ten ovšem obsahuje i netermální složky, jako například odražený tok, nebo cyklotronovou emisi nabitých částic uvězněných v magnetosféře planety.
3. Termální složka pozorovaného rádiového toku může pocházet z hlubších vrstev atmosféry, kde je vyšší teplota.

F Sachsův–Wolfeův jev

(max. 20 bodů)

V této úloze prozkoumáme vliv struktur ve vesmíru na kosmické mikrovlnné pozadí. Konkrétně se zaměříme na posun vlnových délek fotonů CMB při průchodu gravitačním polem zárodků velkoškálových útvarů ve velmi raném vesmíru. Důsledky tohoto posunu (mluvíme o tzv. *Sachsově–Wolfeově jevu*) se přímo projevují jako příspěvky k anizotropiím v pozorované teplotě CMB – viz obrázek 4. Uvidíme, že měření velikosti těchto anizotropií nám prozradí některé zajímavé informace o struktuře hmoty a zákonech fyziky v raném vesmíru.



Obrázek 4: Celooblohová mapa anizotropií teploty reliktního záření pořízená družicí PLANCK. Červená barva značí oblasti s vyšší teplotou, modrá barva naopak oblasti s nižší teplotou. Velikost těchto fluktuací je řádově $10 \mu\text{K}$ okolo střední hodnoty $\bar{T} \approx 2,73 \text{ K}$.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Obecně lze říci, že fotony unikající z gravitačního pole ztrácí energii – dochází u nich ke *gravitačnímu červenému posuvu*. Vlnová délka fotonu se během přesunu z bodu s gravitačním potenciálem Φ_0 do bodu s gravitačním potenciálem Φ změní z hodnoty λ_0 na hodnotu λ , kde podíl λ a λ_0 lze získat ze vztahu

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx 1 + \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2}. \quad (9)$$

Předpokládáme $\Phi \ll c^2$. Rozdíly v hodnotě gravitačního potenciálu rovněž vedou k odlišnému vnímání času různými pozorovateli: naměří-li pozorovatel v místě s gravitačním potenciálem Φ_0 časový interval Δt_0 , potom platí

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} \approx 1 + \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2}, \quad (10)$$

kde Δt je odpovídající časový interval, který naměřil pozorovatel v místě s potenciálem Φ .

Vesmír je na velkých škálách homogenní a izotropní s průměrnou hustotou $\bar{\rho}_m$ hmoty (temné a baryonové). Na menších škálách pozorujeme v rozložení hmoty nehomogenity. Hustotu ρ_m hmoty tedy můžeme obecně zapsat jako $\rho_m = \bar{\rho}_m + \delta\rho_m$, kde $\delta\rho_m$ je odchylka, která závisí na poloze. K popisu nehomogenit je výhodné zavést bezrozměrovou veličinu

$$\delta_m = \frac{\delta\rho_m}{\bar{\rho}_m}, \quad (11)$$

kteří říkáme *hustotní kontrast*. V této úloze budeme nehomogenity pro jednoduchost modelovat jako *sférické* oblasti o poloměru R s *homogenní* hustotou $\bar{\rho}_m + \delta\rho_m > \bar{\rho}_m$, které existují v rámci okolního homogenního a izotropního vesmíru o hustotě $\bar{\rho}_m$. Budeme se pohybovat výhradně v tzv. lineárním režimu, ve kterém platí $|\delta\rho_m| \ll |\bar{\rho}_m|$ a tedy $\delta_m \ll 1$.

Přenesme se nyní do vztažné soustavy, jejíž počátek umístíme do středu sférické oblasti s homogenní nadhustotou $\delta\rho_m$. Označme jako r vzdálenost měřenou od středu oblasti. Pro nalezení gravitačního potenciálu $\Phi(r)$ způsobeného sférickou nadhustotou $\delta\rho_m$ můžeme využít faktu, že v případě sférického rozložení hmoty přispívá do výpočtu gravitační síly působící na testovací těleso umístěné na poloměru r pouze hmota, která se nachází na poloměrech menších než r . Tato hmota se potom chová, jako bychom ji stlačili do hmotného bodu umístěného v počátku. Potenciál $\Phi(r)$ i odpovídající gravitační síla musí být navíc spojitě funkce pro všechna r .

S využitím těchto informací bychom mohli odvodit, že vně sférické oblasti nadhustoty (tedy pro $r > R$) lze pro potenciál $\Phi(r)$ psát vztah

$$\Phi(r) = -\frac{4}{3}\pi GR^2\bar{\rho}_m\delta_m\frac{R}{r}, \quad (r > R) \quad (12)$$

zatímco *uvnitř* oblasti nadhustoty (pro $r \leq R$) bychom pro potenciál dostali vztah

$$\Phi(r) = 2\pi GR^2\bar{\rho}_m\delta_m\left(\frac{r^2}{3R^2} - 1\right). \quad (r \leq R) \quad (13)$$

a) Napište vztah pro hloubku $\Delta\Phi = \Phi(\infty) - \Phi(0)$ potenciálové jámy generované homogenní sférickou nadhustotou (vyjádřete pomocí G , δ_m , $\bar{\rho}_m$, R). [1,5 b]

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Dosažením $r = 0$ dostaneme

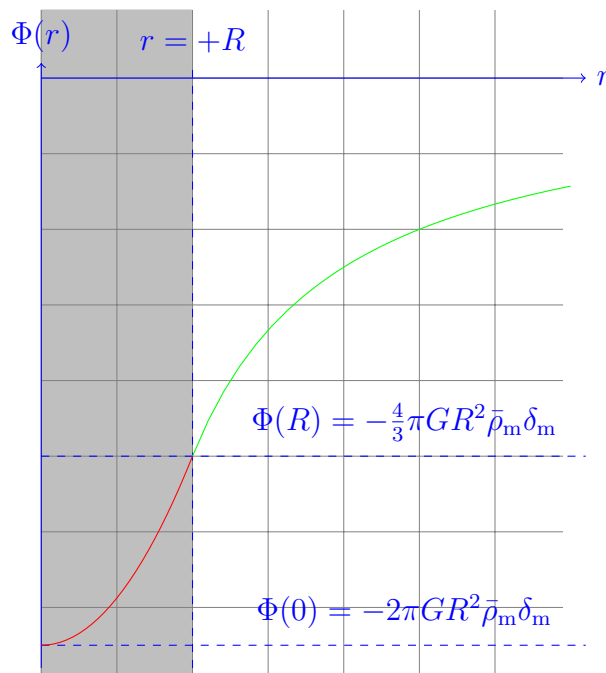
$$\Phi(0) = B = -2\pi GR^2 \bar{\rho}_m \delta_m.$$

Jelikož náš potenciál splňuje asymptotickou podmínku $\Phi(\infty) = 0$, můžeme pro hloubku potenciálu psát

$$\Delta\Phi = 0 - (-2\pi GR^2 \bar{\rho}_m \delta_m) = 2\pi GR^2 \bar{\rho}_m \delta_m. \quad (14)$$

b) Načrtněte graf potenciálu $\Phi(r)$ v závislosti na r pro všechna $r > 0$. Do vašeho grafu zřetelně vyznačte okraj $r = R$ oblasti nadhustoty, hodnotu potenciálu v tomto bodě, a také minimum gravitačního potenciálu (dno jámy). [3 b]

Požadovaný graf vidíme na obrázku 5.



Obrázek 5: Graf gravitační potenciálové jámy (tedy závislosti $\Phi(r)$ na r) způsobené oblastí homogenní sférické nadhustoty $\delta\rho_m$ o poloměru R (šedá oblast).

Zaměřme se nyní na nehomogenity, které ve vesmíru existovaly v období vzniku CMB, tedy v okamžiku oddělení reliktního záření od hmoty. V následujících úkolech můžete předpokládat, že náš vesmír je přesně plochý, že současná střední teplota CMB je rovna $\bar{T}_0 = 2,73 \text{ K}$, že kosmologický červený posuv odpovídající epoše vzniku CMB je $z = 1\,090$, že současná hodnota Hubbleova-Lemaîtreova parametru je $H_0 = 67,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ a že současný podíl hustoty hmoty na celkové hustotě látky ve vesmíru je $\Omega_{m,0} = 0,315$.

c) Vypočtete hustotu $\bar{\rho}_m$ hmoty ve vesmíru (číselně v $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$) v období vzniku CMB. [2,5 b]

Jelikož je náš vesmír plochý, je celková hustota $\bar{\rho}_0$ látky ve vesmíru rovná jeho kritické hustotě, tedy

$$\bar{\rho}_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

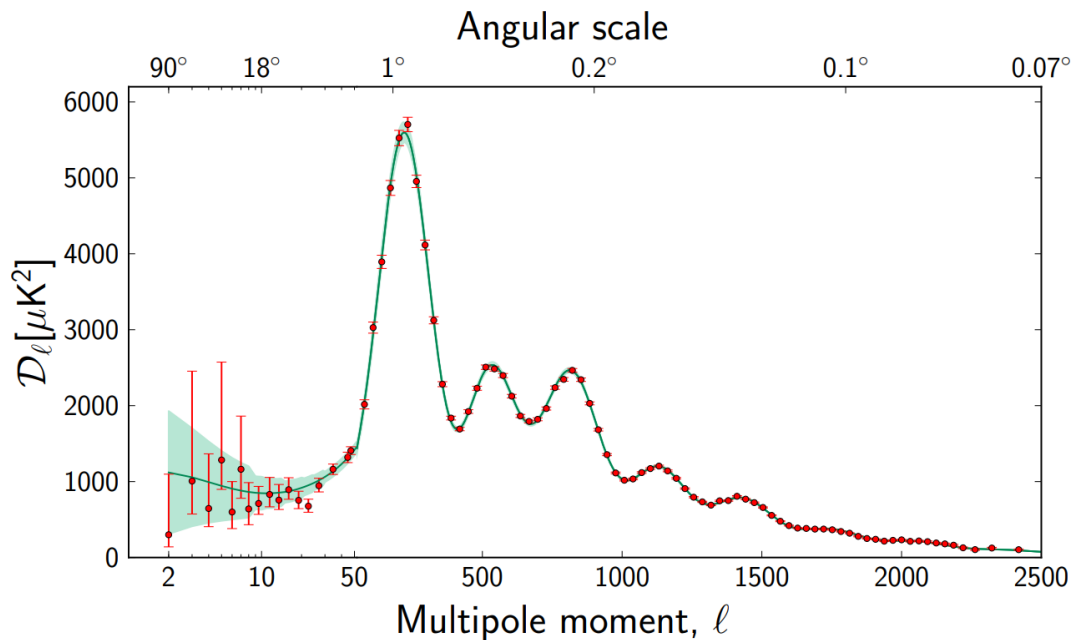
Odtud dostáváme současnou hustotu hmoty ve vesmíru jako

$$\bar{\rho}_{m,0} = \Omega_{m,0} \bar{\rho}_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{m,0}$$

a následně hustotu $\bar{\rho}_m$ hmoty v období vzniku CMB

$$\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_{m,0}(1+z)^3 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{m,0} (1+z)^3 \doteq 3,5 \cdot 10^{-18} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Zkusme nyní analyzovat vztah mezi hustotními fluktuacemi δ_m v období vzniku CMB a pozorovanými teplotními anizotropiemi CMB na různých úhlových škálách. Pozorované spektrum fluktuací (velikost teplotní fluktuace v závislosti na její úhlové velikosti) můžeme vidět na obrázku 6.



Obrázek 6: Pozorované spektrum anizotropií CMB (data z mise PLANCK). Veličina zobrazená na vertikální ose může být velmi zjednodušeně chápána jako kvadrát velikosti δT pozorované teplotní fluktuace. Na horizontální ose (na svrchní hraně grafu) je vynesena úhlová velikost fluktuací na obloze.

Za prvé, za předpokladu adiabaticity poruch rozpínání vesmíru můžeme oblasti s nadhustotou chápat jako bubliny prostoročasu, kde vývoj vesmíru mírně zaostává oproti okolí: jako by oblasti s malou nadhustotou $\delta\rho_m$ byly charakterizovány „starším“ škálovacím faktorem $a - \delta a$ namísto a , kde odchylku $0 < \delta a \ll 1$ volíme tak, aby platilo

$$\bar{\rho}_m + \delta\rho_m = \bar{\rho}_{m,0} (a - \delta a)^{-3},$$

zatímco $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_{m,0} a^{-3}$. Jelikož měl vesmír při menších škálovacích faktorech vyšší teplotu, dostáváme takto kladný příspěvek δT_{ad} do rozdílu teploty látky v oblasti nadhustoty oproti teplotě $\bar{T}$ látky v okolním vesmíru.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Ukažte, že lze psát přibližný vztah

$$\frac{\delta T_{\text{ad}}}{\bar{T}} \approx \frac{1}{3} \delta_m$$

mezi adiabatickou fluktuací δT_{ad} teploty CMB, střední teplotou $\bar{T}$ reliktního záření v období jeho vzniku a hustotním kontrastem δ_m . Může se vám hodit, že $(1+x)^p \approx 1+px$ pro $x \ll 1$. [2 b]

Interpretujeme-li adiabatické fluktuace jako oblasti vesmíru s opožděným vývojem, můžeme psát

$$1 + \delta_m = \frac{\bar{\rho}_m + \delta \rho_m}{\bar{\rho}_m} = \frac{\bar{\rho}_{m,0} (a - \delta a)^{-3}}{\bar{\rho}_{m,0} a^{-3}} = \left(1 - \frac{\delta a}{a}\right)^{-3} \approx 1 + 3 \frac{\delta a}{a}.$$

Zároveň pro teplotu $\bar{T} + \delta T_{\text{ad}}$ těchto fluktuací máme

$$1 + \frac{\delta T_{\text{ad}}}{\bar{T}} = \frac{\bar{T} + \delta T_{\text{ad}}}{\bar{T}} = \frac{\bar{T}_0 (a - \delta a)^{-1}}{\bar{T}_0 a^{-1}} = \left(1 - \frac{\delta a}{a}\right)^{-1} \approx 1 + \frac{\delta a}{a}.$$

Porovnáním tedy dostaneme

$$\frac{\delta T_{\text{ad}}}{\bar{T}} \approx \frac{\delta a}{a} \approx \frac{1}{3} \delta_m.$$

Toto ovšem není jediný efekt, který přispívá do teplotních fluktuací CMB: přítomnost nadhustoty rovněž způsobuje lokální zpomalení toku (kosmologického) času v důsledku gravitační dilatace dle vztahu (10) výše. To vede k *dalšímu* zaostávání ve vývoji oblasti nadhustoty ve srovnání s okolím, a tedy k *dalšímu* kladnému příspěvku δT_{dil} do rozdílu teploty oblasti nadhustoty oproti okolí. V následujících úkolech uvažujte, že rozpínání vesmíru bylo v období vzniku CMB dominováno hmotou, platilo tedy $a(t) \propto t^{2/3}$.

e) Ukažte, že můžeme psát přibližný vztah

$$\frac{\delta T_{\text{dil}}}{\bar{T}} \approx \frac{2}{3} \frac{\Delta \Phi}{c^2},$$

kde $\Delta \Phi$ je hloubka gravitační potenciálové jámy, která je způsobena oblastí nadhustoty. [2,5 b]

Uvažujme jednoho pozorovatele daleko od jámy („v nekonečnu“) a druhého pozorovatele uprostřed jámy. Ten pocituje gravitační potenciál, který je o $\Delta \Phi$ menší, než gravitační potenciál pozorovatele v nekonečnu. Za čas t se tedy kosmologické hodinky pozorovatele v jámě zpomalí vzhledem ke kosmologickým hodinkám pozorovatele v nekonečnu o hodnotu δt , která dle vztahu (10) splňuje

$$1 - \frac{\delta t}{t} = \frac{t - \delta t}{t} \approx 1 - \frac{\Delta \Phi}{c^2}.$$

To má za následek, že pozorovatel v jámě pocituje škálovací faktor $a - \delta a$ (kde a je škálovací faktor pozorovatele mimo jámu), který splňuje

$$1 - \frac{\delta a}{a} = \frac{a - \delta a}{a} = \left(\frac{t - \delta t}{t}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(1 - \frac{\delta t}{t}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 1 - \frac{2}{3} \frac{\delta t}{t} = 1 - \frac{2}{3} \frac{\Delta \Phi}{c^2}.$$

Použitím jednoho z výsledků předchozí části pak dostaneme

$$\frac{\delta T_{\text{dil}}}{\bar{T}} \approx \frac{\delta a}{a} \approx \frac{2}{3} \frac{\Delta \Phi}{c^2}.$$

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Konečně, vnější pozorovatel získává informaci o teplotě v oblasti nadhustoty skrze fotony, které z ní vyletují. Jak již bylo popsáno v úvodu úlohy, tyto fotony podléhají gravitačnímu červenému posuvu. Vnější pozorovatel toto interpretuje jako záporný příspěvek δT_{red} do celkové teplotní fluktuace oblasti nadhustoty ve srovnání s okolím.

f) Ukažte, že přibližně platí

$$\frac{\delta T_{\text{red}}}{\bar{T}} \approx -\frac{\Delta\Phi}{c^2}.$$

Napište rovněž vztah pro celkovou teplotní fluktuaci $\delta T = \delta T_{\text{ad}} + \delta T_{\text{dil}} + \delta T_{\text{red}}$ v důsledku přítomnosti oblasti nadhustoty pomocí $\bar{T}$, G , R , ρ_m , δ_m a c . [3,5 b]

Pokud byly fotony ze středu jámy termálně emitovány s rozdělením, které mělo maximum na vlnové délce λ , registruje pozorovatel v nekonečnu tyto fotony s rozdělením, které má maximum na vlnové délce $\lambda + \delta\lambda$, kde podle vztahu (9) píšeme

$$1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}.$$

Pozorovatel v nekonečnu tedy zjistí, že maximum λ termálního vyzařování oblasti nadhustoty je červeně posunuto o kladnou hodnotu $\delta\lambda$. Toto dle Wienova zákona interpretuje jako posun efektivní teploty oblasti nadhustoty o zápornou hodnotu δT_{red} . Wienův zákon přitom můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\bar{T} + \delta T_{\text{red}}}{\bar{T}} = \frac{\lambda}{\lambda + \delta\lambda},$$

tedy

$$1 + \frac{\delta T_{\text{red}}}{\bar{T}} = \left(1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

Dostaneme pak

$$\frac{\delta T_{\text{red}}}{\bar{T}} \approx -\frac{\delta\lambda}{\lambda} \approx -\frac{\Delta\Phi}{c^2}.$$

Celkově můžeme pro fluktuaci δT teploty CMB v důsledku přítomnosti oblasti nadhustoty psát vztah

$$\frac{\delta T}{\bar{T}} \approx \frac{1}{3} \left(\delta_m - \frac{\Delta\Phi}{c^2} \right) \approx \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\pi G R^2 \bar{\rho}_m}{c^2} \right) \delta_m. \quad (15)$$

Částečnému příspěvku

$$\frac{\delta T_{\text{SW}}}{\bar{T}} = \frac{\delta T_{\text{dil}} + \delta T_{\text{red}}}{\bar{T}} \approx -\frac{1}{3} \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

do teplotní fluktuace, který zahrnuje všechny členy explicitně závislé na poloměru R oblasti nadhustoty, říkáme *obyčejný Sachsův-Wolfeův jev*.¹ Z vašeho výsledku v části f) by mělo být patrné, že pro dostatečně malé hodnoty R je výsledná teplotní fluktuace dominována adiabatickým příspěvkem δT_{ad} , zatímco pro velké hodnoty R převažuje příspěvek δT_{SW} Sachsova-Wolfeova jevu.

¹V literatuře se rovněž setkáme s tzv. *integrovaným Sachsovým-Wolfeovým jevem*, kterým se ovšem v této úloze zabývat nebudeme.

Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

g) Určete kritickou hodnotu R_{crit} poloměru oblasti nadhustoty v období vzniku CMB (číselně v kpc), pro kterou je příspěvek δT_{ad} do celkové teplotní fluktuace srovnatelný s příspěvkem δT_{SW} Sachsova-Wolfeova jevu. Jakému úhlovému poloměru α_{crit} fluktuace by tato hodnota odpovídala na dnešní obloze? Diskutujte, jak je hodnota R_{crit} vztažena k poloměru c/H Hubbleovy sféry v období rekombinace. [3 b]

Nápověda: Přepočet lineárních vzdáleností na úhlové je pro velké červené posuvy velmi komplikovaný: pro $z \gg 1$ již nelze naivně použít Hubbleův zákon pro výpočet vzdálenosti a do hry vstupují detaily modelu rozpínání, který uvažujeme. Můžete místo toho využít známého faktu, že tzv. *sound horizon* v okamžiku oddělení záření CMB od hmoty, který má lineární velikost 133 kpc, odpovídá na dnešní obloze úhlové vzdálenosti $0,6^\circ$.

Ze vztahu (15) vidíme, že

$$R_{\text{crit}} = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi G \bar{\rho}_{\text{m}}}} \doteq 254 \text{ kpc}. \quad (16)$$

To na obloze odpovídá oblasti o úhlovém poloměru $\alpha_{\text{crit}} = \frac{254}{133} \cdot 0,6^\circ \doteq 1,1^\circ$. Pokud označíme jako $\Omega_{\text{m}} \simeq 1$ podíl hmoty na celkové hustotě látky ve vesmíru v okamžiku vzniku CMB, potom můžeme vztah (16) přepsat do tvaru

$$R_{\text{crit}} = \frac{2c}{H} \sqrt{\frac{1}{3\Omega_{\text{m}}}}.$$

Hodnota R_{crit} se tedy řádově shoduje s poloměrem Hubbleovy sféry v období rekombinace.

Poznámka: Můžeme tedy říct, že teplotní fluktuace CMB jsou dominovány adiabatickými příspěvky δT_{ad} na tzv. subhorizon škálách. Tyto struktury byly v období po skončení inflace v kauzálním kontaktu a fluktuace pozorované pro $\alpha < \alpha_{\text{crit}}$ tedy reflektují vývoj, který probíhal v období baryogeneze, nukleosynthese a později. Naopak Sachsův-Wolfeův jev δT_{SW} diktuje velikost fluktuací CMB na tzv. superhorizon škálách. Odpovídající struktury nebyly od konce období inflace v kauzálním kontaktu a nijak se tedy od té doby nevyvíjely. Z toho plyne, že fluktuace CMB pro $\alpha > \alpha_{\text{crit}}$ nám dávají unikátní informaci o strukturách, které se zformovaly během období inflace.

Jelikož jsou adiabatické příspěvky δT_{ad} do teplotních fluktuací přímo dané hustotním kontrastem δ_{m} , můžeme říct, že tvar spektra anizotropií CMB na obr. 6 v režimu $\alpha < \alpha_{\text{crit}}$ je přímým otiskem rozdělení $\delta_{\text{m}}(R)$ hustotního kontrastu v závislosti na velikosti R oblasti nadhustoty v období vzniku CMB. Tento režim mj. zahrnuje tzv. akustické peaky, které můžeme pozorovat v pravé části spektra. Naopak příspěvky δT_{SW} Sachsova-Wolfeova jevu ($\alpha \gg \alpha_{\text{crit}}$) převažují v krajní levé části spektra na obr. 6, kde pozorujeme přibližně konstantní rozdělení δT v závislosti na úhlové velikosti α (a tedy i na lineární velikosti R) oblasti nadhustoty.

h) Jaká závislost $\delta_{\text{m}}(R)$ hustotního kontrastu na poloměru R oblasti nadhustoty plyne z dat na obr. 6 v režimu $R \gg R_{\text{crit}}$? [2 b]

Pro $R \gg R_{\text{crit}}$ je celková teplotní fluktuace δT dána vztahem

$$\frac{\delta T}{T} \approx -\frac{2\pi G R^2 \bar{\rho}_{\text{m}}}{3c^2} \delta_{\text{m}}.$$



Finále 2024/25, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Má-li být $\delta T/\bar{T}$ nezávislé na R (jak plyne z obr. 6), musíme požadovat

$$\delta_m(R) \propto R^{-2}.$$

Poznámka: Tomuto rozdělení hustotního kontrastu v závislosti na velikosti R oblasti nadhustoty říkáme škálově-invariantní spektrum nebo také Harrisonovo-Zeldovičovo spektrum. Škálově invariantní se nazývá právě proto, že dává za vznik škálově-invariantním potenciálovým jámám: jejich hloubka $\Delta\Phi \propto R^2\delta_m(R)$ (a tedy i velikost teplotní fluktuace δT_{SW}) pro $\delta_m(R) \propto R^{-2}$ nezávisí na R . Jak jsme již poznamenali v řešení předchozí části, dostali jsme tímto přímou informaci o spektru hustotních fluktuací, které se zformovaly během období inflace. Škálovací invariance těchto fluktuací naznačuje přítomnost škálovací symetrie zákonů fyziky v (před)inflační fázi vesmíru. Malé odchylky od škálově-invariantního spektra (detailní analýzou dat bychom mohli odhalit, že ve skutečnosti na superhorizon škálách máme $\delta_m(R) \propto R^{-(3+n_s)/2}$, kde tzv. skalární spektrální index n_s má dle dat z mise PLANCK hodnotu $n_s = 0,9649 \pm 0,0042$) poskytují cenné informace o mechanismu inflace a o narušení škálovací symetrie v raném vesmíru.

Autorem úlohy A je Jindřich Jelínek, autorem úlohy B je Marco Souza de Joode, autorem úlohy C je Radka Křížová, autorem úlohy D je Marco Souza de Joode, autory úlohy E jsou Marco Souza de Joode a Jakub Vošmera, autory úlohy F jsou David Kománek a Jakub Vošmera.