

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Krátké úlohy

A Astronomická jednotka z pozorování Měsíce

(max. 7 bodů)

Dne 4. května 2025, když se Měsíc nacházel přesně v první čtvrti, byla změřena jeho elongace jako $\lambda = 89^\circ 51,2' \pm 0^\circ 0,5'$. Vyjádřete střední vzdálenost Země–Slunce d_{ZS} jako násobek k střední vzdálenosti Měsíce od Země (d_{ZM}) a určete absolutní nejistotu σ_k tohoto poměru.

Nápověda: Relativní nejistota výsledného poměru je v tomto případě stejná jako relativní nejistota veličiny $90^\circ - \lambda$.

V první čtvrti je úhel Slunce–Měsíc–Země roven 90° . Pokud by Slunce bylo v nekonečnu, byl by i úhel Slunce–Země–Měsíc (tedy elongace Měsíce) přesně 90° . Protože se však Slunce nachází v konečné vzdálenosti od Země, bude elongace Měsíce menší.

Podle obrázku 1 platí

$$\cos \lambda = \frac{d_{\text{ZM}}}{d_{\text{ZS}}}.$$

Hledaný poměr je tedy

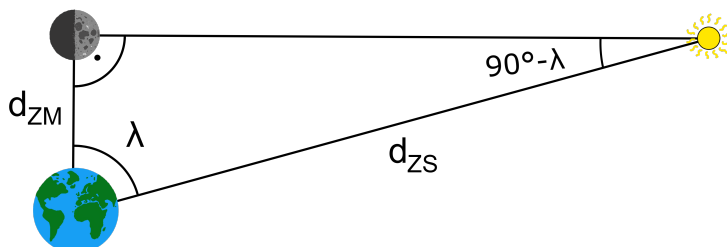
$$k = \frac{d_{\text{ZS}}}{d_{\text{ZM}}} = \frac{1}{\cos \lambda} \doteq 391.$$

Absolutní nejistoty veličin λ a $90^\circ - \lambda$ jsou stejné, neboli platí $\sigma_\lambda = \sigma_{90^\circ - \lambda}$. Relativní nejistota je poměr absolutní nejistoty a hodnoty dané veličiny, z nápovědy tak máme

$$\frac{\sigma_k}{k} = \frac{\sigma_{90^\circ - \lambda}}{90^\circ - \lambda}.$$

Po dosazení a zaokrouhlení na jednu platnou číslici (jak bývá zvykem) vyjde $\sigma_k \doteq 20$.

Výslednou hodnotu i s nejistotou zapíšeme jako $d_{\text{ZS}} = (390 \pm 20) d_{\text{ZM}}$. Měsíc je tedy od Země asi 390krát dál než Slunce.



Obrázek 1: Postavení Země, Slunce a Měsíce v první čtvrti.

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Odvození vztahu pro nejistoty: Pro nejistotu hledaného poměru platí z Gaussova zákona o šíření chyb

$$\sigma_k = \left| \frac{\partial k}{\partial \lambda} \right| \sigma_\lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} \sigma_\lambda = k \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \sigma_\lambda = k \frac{\cos(90^\circ - \lambda)}{\sin(90^\circ - \lambda)} \sigma_\lambda = k \frac{\sigma_\lambda}{\tan(90^\circ - \lambda)}.$$

Pro malé úhly α přibližně platí $\tan(\alpha) \approx \alpha$, takže

$$\frac{\sigma_k}{k} = \frac{\sigma_\lambda}{90^\circ - \lambda}.$$

Pak už si jen stačí uvědomit, že platí $\sigma_\lambda = \sigma_{90^\circ - \lambda}$, a dostáváme vztah z nápovědy.

B Chandrasekharova mez

(max. 10 bodů)

Chandrasekharova mez je hraniční hmotnost bílého trpaslíka, která rozhoduje o (ne)stabilitě v tomto konečném stádiu vývoje hvězdy. Tuto hmotnost můžeme řádově odhadnout jen ze znalosti základních fyzikálních konstant, kterými jsou redukováná Planckova konstanta $\hbar \doteq 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, rychlost světla c a gravitační konstanta G , a hmotnosti protonu m_p . Mez lze vyjádřit ve tvaru $M_{\text{Ch}} \approx 0,76 \cdot X \cdot m_p^{-2}$, kde X je vhodná kombinace mocnin $\hbar$, c a G . Pomocí rozměrové analýzy najdete vzorec pro výpočet Chandrasekharovy meze, vyčíslete ji a rozhodněte, zda bude bílý trpaslík vzniklý ze Slunce stabilní.

Vzhledem k tomu, že přesně víme, jaké veličiny vystupují ve výrazu pro Chandrasekharovu mez, použijeme k nalezení správného vzorce rozměrovou analýzu. Chandrasekharova mez je hmotnost, její jednotkou je tedy kilogram. Na pravé straně máme veličinu X , kterou chceme najít, a tu dělíme m_p^2 . Zřejmě tedy chceme, aby $[X] = \text{kg}^3$.

Je známo, že X sestavíme pouze z konstant $\hbar$, c a G , vypíšeme si proto jednotky těchto konstant a vyjádříme je jako kombinaci pouze jednotek SI.

$$[\hbar] = \text{J} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$[G] = \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$$

Napišeme si

$$X = \hbar^\alpha \cdot c^\beta \cdot G^\gamma,$$

pak musí zároveň platit

$$[X] = [\hbar]^\alpha \cdot [c]^\beta \cdot [G]^\gamma.$$

Dosazením jednotek máme rovnost

$$\text{kg}^3 = (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^\alpha \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\beta \cdot (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2})^\gamma.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Umocníme a upravíme pomocí pravidel pro násobení mocnin se stejným základem a dostaneme

$$\text{kg}^3 = \text{kg}^{\alpha-\gamma} \cdot \text{m}^{2\alpha+\beta+3\gamma} \cdot \text{s}^{-\alpha-\beta-2\gamma}.$$

Jelikož v soustavě SI nemůžeme násobením základních jednotek mezi sebou získat jinou základní jednotku, je rovnost výše ekvivalentní následující soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 3 &= \alpha - \gamma, \\ 0 &= 2\alpha + \beta + 3\gamma, \\ 0 &= -\alpha - \beta - 2\gamma. \end{aligned}$$

Soustavu snadno vyřešíme a dostaneme

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad \gamma = -\frac{3}{2}.$$

Pak tedy

$$X = \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Můžeme si všimnout, že X je složena pouze ze základních fyzikálních konstant $\hbar$, G a c a má jednotku kg^3 . Jedná se tedy vlastně o třetí mocninu *Planckovy hmotnosti*. Planckovy veličiny jsou totiž takové, které jsou vyjádřeny pouze kombinací zmíněných konstant – jsou jimi kromě hmotnosti například Planckův čas a Planckova délka.

Když máme vyjádření pro veličinu X , využijeme informaci v zadání o tom, jak vypadá vzorec pro Chandrasekharovu mez a dostaneme

$$M_{\text{Ch}} \approx 0,76 \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{m_{\text{p}}^2} \approx 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

kdy jsme již dosadili konkrétní hodnoty konstant.

Jelikož tato hmotnost je větší než hmotnost Slunce, konkrétně $M_{\text{Ch}} \approx 1,41 M_{\odot}$, bude bílý trpaslík, který vznikne z našeho Slunce, pod touto mezí, a tedy stabilní.

C Na dně písečné jamky

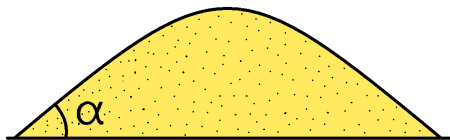
(max. 13 bodů)

Larvy mravkolva (rod hmyzu z řádu síťokřídlých) číhají na kořist na dně písečné jamky ve tvaru kužele. Když se neopatrný hmyz, např. mravenec, dostane k okraji jamky, larva mu pod nohy začne házet sypký písek, až se skutálí až na dno, kde ho larva sežere. Co dělá tento dravec ve dne, však patří do biologické olympiády, nás bude zajímat, co může mravkolev pozorovat v noci.

a) Sypný úhel (viz obr. 2) písku je $\alpha = 34^\circ$. Jakou část z celé oblohy v procentech vidí larva ze dna jamky? **[3 b]**

Nápověda: Povrch kulové úseče se vypočítá jako $S = 2\pi r v$, kde r je poloměr koule, ze které byla úseč vyříznuta, a v je výška úseče.

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



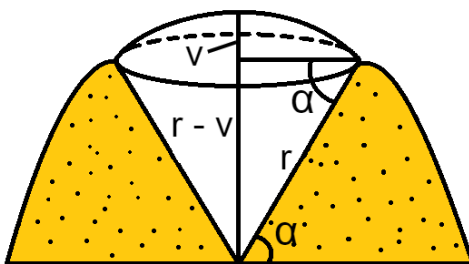
Obrázek 2: Sypný úhel suchého písku.

Larva vidí ze dna jamky z celé oblohy jen kulovou úseč od výšky $\alpha = 34^\circ$ nad ideálním obzorem. Povrch kulové úseče se vypočte jako $S_u = 2\pi r v$, kde r je poloměr původní koule a v je výška úseče (viz obr. 3). Výšku v můžeme vyjádřit pomocí úhlu α jako

$$v = r - r \sin \alpha = r(1 - \sin \alpha).$$

Povrch nyní bude $S_u = 2\pi r^2(1 - \sin \alpha)$. Povrch celé koule je $S_k = 4\pi r^2$. Mravkolev tedy vidí z celé oblohy jen

$$\frac{S_u}{S_k} = \frac{2\pi r^2(1 - \sin \alpha)}{4\pi r^2} = \frac{1 - \sin \alpha}{2} \doteq 22\%.$$



Obrázek 3: Jamka mravkolva.

b) Mravkolev z Českého Švýcarska (na zeměpisné šířce $\varphi = 50,869^\circ$) vidí nad okrajem své jamky hvězdu vycházet přesně na východě a zapadat přesně na západě. Jaká je její deklinace δ ? Výsledek uveďte číselně ve stupních. [5 b]

Nápověda: Pro sférický trojúhelník se stranami o velikostech a, b, c a vnitřními úhly u vrcholů A, B, C platí sférická kosinová věta $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$, kde A je úhel u vrcholu protilehlému ke straně o velikosti a .

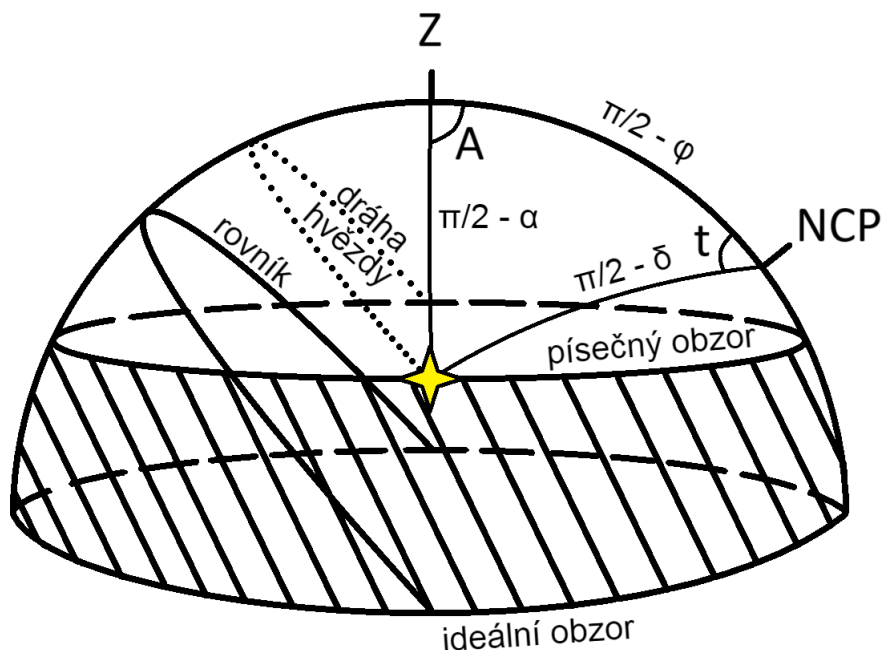
Vyjdeme ze sférického trojúhelníku zenit–vycházející hvězda–severní nebeský pól (obr. 4). Úhel hvězda–zenit–pól je azimut hvězdy $A = \frac{\pi}{2}$ a úhlu zenit–pól–hvězda pak odpovídá hodinový úhel mezi východem a kulminací t . Výška hvězdy nad obzorem je vlastně sypný úhel písku α . Ze sférické kosinové věty platí

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos A,$$

$$\sin \delta = \sin \alpha \sin \varphi,$$

$$\delta = \arcsin(\sin \alpha \sin \varphi) \doteq 25,7^\circ.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Sférický trojúhelník zenit-hvězda-pól.

c) Jak dlouho může tuto hvězdu přes noc pozorovat? Výsledek τ uveďte číselně v hodinách. [5 b]

Nápověda: Pro sférický trojúhelník se stranami o velikostech a, b, c a vnitřními úhly u vrcholů A, B, C platí sférická sinová věta $\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$.

Ze sférické sinové věty platí

$$\frac{\sin t}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \frac{\sin A}{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)},$$

$$\sin t = \frac{\cos \alpha}{\cos \delta},$$

$$t = \arcsin \frac{\cos \alpha}{\cos \delta} \doteq 4^{\text{h}} 27^{\text{m}} 46^{\text{s}}.$$

Celková doba, jakou je hvězda nad písečným obzorem, je oproti tomuto hodinovému úhlu dvojnásobná (od východu do kulminace a od kulminace do západu). Mravkolev tedy může hvězdu pozorovat po dobu $\tau = 2t = 8^{\text{h}} 55^{\text{m}} 32^{\text{s}}$, tedy necelých devět hodin.



Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Mezihvězdný most

(max. 10 bodů)

Ve vzdálené budoucnosti se lidstvo rozhodlo vyslat sondu ke hvězdě α Cen, která se nachází ve vzdálenosti $d = 1,34 \text{ pc}$ od Sluneční soustavy. Při plánování mise inženýři narazili na nečekaný problém. Sondu jsou schopni vybavit vysílačem (pracujícím na jisté frekvenci v rádiovém oboru), jehož maximální výkon je takový, že bychom ve vzdálenosti d naměřili od sondy monochromatický zářivý tok $\Phi_p = 0,1 \mu\text{Jy} = 10^{-33} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Na stejné frekvenci od α Cen pozorujeme na Zemi monochromatický tok $\Phi_s = 100 \mu\text{Jy} = 10^{-30} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Minimální poměr hodnot toků Φ_p a Φ_s , abychom na Zemi signál ze sondy rozeznali na pozadí rádiového záření od α Cen, je přitom $\gamma = 10^{-2}$. Signál ze sondy by tedy byl kompletně přezářen.

Aby problém s příjmem signálu od sondy vyřešili, rozhodli se inženýři na přímce α Cen–sonda–Země zanechat několik retranslačních stanic. Každá z nich disponuje vysílačem o stejném výkonu jako sonda a přijímačem o stejné citlivosti jako je k dispozici na Zemi. Za předpokladu, že sonda vysílá signál k Zemi ze vzdálenosti $r_0 = 1 \text{ au}$ od α Cen a nachází se na spojnici mezi α Cen a Zemí, určete minimální počet k retranslačních stanic potřebný k úspěšnému přenosu signálu ze sondy na Zemi.

Označme jako r_n vzdálenost n -té retranslační stanice od α Cen. Pořadí počítáme směrem od α Cen, platí tedy $r_0 < r_1 < r_2 < \dots$ (Pro $n = 0$ identifikujeme sondu ve vzdálenosti $r_0 = 1 \text{ au}$ od α Cen.) První retranslační stanice detekuje od sondy tok

$$\Phi_{p,1} = \Phi_p \left(\frac{d}{r_1 - r_0} \right)^2,$$

zatímco od hvězdy přijímá tok

$$\Phi_{s,1} = \Phi_s \left(\frac{d}{r_1} \right)^2.$$

Aby první stanice signál od sondy rozlišila, musí platit nerovnost

$$\frac{\Phi_{p,1}}{\Phi_{s,1}} = \frac{\Phi_p}{\Phi_s} \left(\frac{r_1}{r_1 - r_0} \right)^2 \geq \gamma.$$

Odtud dostáváme podmínku

$$r_1 \leq r_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_p}{\gamma \Phi_s}} \right)^{-1}.$$

Pro vzdálenost n -té retranslační stanice od α Cen bychom podobně dostali

$$r_n \leq r_{n-1} \left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_p}{\gamma \Phi_s}} \right)^{-1} \leq \dots \leq r_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_p}{\gamma \Phi_s}} \right)^{-n}.$$

Chceme-li počet retranslačních stanic minimalizovat, musíme všechny nerovnosti saturovat a nahradit je rovnostmi. Zároveň podmínka pro úspěšnou detekci signálu na Zemi za použití k stanic zní

$$r_{k+1} > d,$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

tedy, že $(k+1)$ -tá stanice by byla potřeba až ve vzdálenosti větší, než je vzdálenost Země od α Cen. Máme tedy

$$r_0 \left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_p}{\gamma \Phi_s}} \right)^{-k-1} > d,$$

což nám dává, že minimální počet k retranslačních stanic je nejmenší celé číslo, které splňuje

$$k > \frac{\log \frac{r_0}{d}}{\log \left(1 - \sqrt{\frac{\Phi_p}{\gamma \Phi_s}} \right)} - 1.$$

Číselně dostaneme $k = 32$.

Teoretická část Dlouhé úlohy

E Poyntingův-Robertsonův jev

(max. 20 bodů)

V této úloze se zaměříme na tzv. Poyntingův-Robertsonův jev, který popisuje efektivní odporovou sílu působící na tělesa pohybující se v poli záření.

Uvažujme kulové (sférické) prachové zrnko o poloměru $R = 30 \mu\text{m}$ a hustotě $\rho = 2,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ obíhající po kruhové dráze o poloměru $a = 1 \text{ au}$ okolo Slunce. Pro jednoduchost předpokládejme, že zrnko pohlcuje všechno světlo, které na něj dopadne, a pak ho vyzařuje jako absolutně černé těleso. Uvažujte, že ve své klidové soustavě zrnko vyzařuje rovnoměrně do všech směrů (tj. izotropně).

Za těchto předpokladů působí dopadající záření na zrnko silou o velikosti

$$F_{\text{fot}} = \frac{\Phi S}{c},$$

která působí v opačném směru, než ze kterého v klidové soustavě zrnka přilétají fotony záření. Jako S jsme označili obsah průřezu zrnka, Φ je výkon dopadajícího záření na jednotku plochy a c je rychlost světla.

V první části úlohy (části a), b) a c)) pro jednoduchost předpokládejme, že fotony na zrnko v jeho klidové soustavě dopadají přesně směrem od Slunce (tj. v radiálním směru, kolmo na jeho oběžnou dráhu).

a) Najděte obecný vztah pro velikost síly F_{fot} v závislosti na R , a , c a na zářivém výkonu Slunce L . Vypočtěte také číselnou velikost této síly (v N) působící na prachové zrnko. [2 b]

Pro sférické zrnko je obsah průřezu roven obsahu kruhu o poloměru R , tedy

$$S = \pi R^2.$$

Výkon dopadajícího záření na jednotku plochy ve vzdálenosti a od Slunce zároveň bude

$$\Phi = \frac{L}{4\pi a^2}.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Celkově tedy pro sílu dostáváme vztah

$$F_{\text{fot}} = \frac{LR^2}{4ca^2}.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází $F_{\text{fot}} \doteq 1,28 \cdot 10^{-14} \text{ N}$.

Kromě síly záření působí na částici rovněž gravitační síla

$$F_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{a^2},$$

kde M je hmotnost Slunce, m hmotnost zrnka a G gravitační konstanta. Celkovou sílu F působící na zrnko ve směru od Slunce pak můžeme zapsat jako

$$F = F_{\text{fot}} + F_{\text{grav}} = -\frac{\Gamma Mm}{a^2},$$

kde Γ je koeficient, kterému budeme říkat *efektivní gravitační konstanta* a který nezávisí na a . Zavedení této konstanty nám umožňuje převést zkoumaný systém, v němž působí zároveň gravitační síla i tlak záření, na ekvivalentní systém, kde působí čistě gravitační síla, která je ovšem popsána efektivní gravitační konstantou namísto té běžné.

b) Vyjádřete efektivní gravitační konstantu Γ pomocí G , R , ρ , M , L a c . Vypočtěte její číselnou hodnotu (v jednotkách SI) pro případ našeho zrnka. **[2 b]**

Sečtením síly záření a gravitační síly dostáváme

$$\begin{aligned} F &= F_{\text{fot}} + F_{\text{grav}} \\ &= \frac{LR^2}{4ca^2} - \frac{4\pi GM\rho R^3}{3a^2} \\ &= \frac{GMmLR^2}{4cGMma^2} - \frac{4\pi GM\rho R^3}{3a^2} \\ &= -\frac{4\pi GM\rho R^3}{3a^2} \left(1 - \frac{3L}{16\pi cGM\rho R} \right). \end{aligned}$$

Efektivní gravitační konstantu tedy můžeme vyjádřit jako

$$\Gamma = G - \frac{3L}{16\pi cM\rho R}.$$

Číselně vychází $\Gamma \doteq 6,62 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

c) Celková síla F způsobuje pohyb po kružnici, je tedy silou dostředivou. Vyjádřete z této rovnosti oběžnou rychlost zrnka v pomocí Γ , M a a . Vypočtěte také číselnou hodnotu v (v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$). **[2 b]**

Pro dostředivou sílu F_d působící na zrnko platí vztah

$$F_d = m \frac{v^2}{a}.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Z rovnosti sil tedy máme

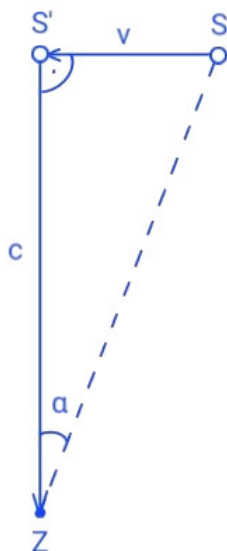
$$m \frac{v^2}{a} = \frac{\Gamma M m}{a^2},$$

z čehož vyjádříme oběžnou rychlost jako

$$v = \sqrt{\frac{\Gamma M}{a}}.$$

Po dosazení dostaneme $v \doteq 29,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vraťme se nyní k našemu předpokladu ohledně směru, ze kterého na zrnko dopadají fotony v jeho klidové soustavě. Pohybuje-li se objekt nenulovou rychlostí vzhledem ke zdroji světla, pozorujeme v klidové soustavě zrnka malé odchýlení světelného paprsku od směru, kterým fotony na zrnko dopadají z pohledu klidové soustavy zdroje (viz obrázek 5). Tomuto jevu se říká *aberrace*. Konkrétně uvažujme objekt, který se vzhledem ke zdroji pohybuje nenulovou rychlostí o velikosti $v \ll c$.



Obrázek 5: Vysvětlení aberace ze vztažné soustavy zrnka – značíme písmenem Z. Písmena S, resp. S' značí polohy Slunce v okamžiku vyzáření fotonů Sluncem, resp. jejich dopadu na zrnko.

Dopadají-li fotony na objekt *kolmo* z pohledu klidové soustavy zdroje (jako v případě našeho zrnka, které kolem Slunce obíhá po kruhové dráze), pozorujeme z pohledu klidové soustavy objektu malé odchýlení α světelného paprsku od kolmého směru, pro které platí

$$\tan \alpha = \frac{v}{c}.$$

Paprsky od Slunce tedy z pohledu zrnka přicházejí nikoliv ze směru kolmého na směr rychlosti, ale mírně šikmo, proti směru pohybu zrnka. Jelikož je pro nerelativistické rychlosti $v \ll c$ úhel α velmi malý, platí, že složka síly záření ve směru od Slunce je stále velmi přesně rovná F_{fot} (takže výsledky částí a), b) a c) zůstávají nezměněny). Navíc je ale přítomna i tečná složka síly záření, která zrnko brzdí. Tento efekt je znám jako *Poyntingův-Robertsonův jev*.

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

d) Vyjádřete velikost F_{PR} brzdné síly působící na zrnko pomocí Γ , M , R , a , L a c a vypočítejte její číselnou hodnotu (v N). [2,5 b]

Jedná se o tečnou složku síly záření. Z obrázku 5 vidíme, že platí

$$F_{\text{PR}} = F_{\text{fot}} \sin \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že je rychlost v malá v porovnání s rychlostí světla c , platí přibližně

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{v}{c}.$$

Pro velikost brzdné síly tedy dostáváme

$$F_{\text{PR}} \approx F_{\text{fot}} \frac{v}{c} = \frac{LR^2}{4ca^2} \frac{v}{c} = \frac{LR^2}{4c^2a^2} \sqrt{\frac{\Gamma M}{a}} = \frac{LR^2}{4c^2} \sqrt{\frac{\Gamma M}{a^5}},$$

číselně $F_{\text{PR}} \doteq 1,27 \cdot 10^{-18} \text{ N}$.

V důsledku působení brzdné síly se zrnko postupně přibližuje po spirále ke Slunci. Předpokládejte, že se poloměr dráhy částice a mění *velmi* pomalu, brzdná síla je malá a že ji lze v rámci jednoho oběhu považovat za konstantní.

e) Odvoďte vztah pro práci W_{PR} , kterou brzdná síla F_{PR} na zrnku vykoná za jeden oběh kolem Slunce. Výsledek vyjádřete pomocí Γ , M , R , a , L a c . Spočítejte rovněž číselně (v J). [2 b]

Brzdná síla F_{PR} působí rovnoběžně s pohybem zrnka proti směru jeho pohybu. Pro velikost vykonané práce tedy můžeme psát

$$W_{\text{PR}} = o F_{\text{PR}},$$

kde $o = 2\pi a$ je obvod kruhové dráhy zrnka. Celkově tedy pro práci dostáváme

$$W_{\text{PR}} = 2\pi a F_{\text{PR}} = 2\pi a \frac{LR^2}{4c^2} \sqrt{\frac{\Gamma M}{a^5}} = \frac{\pi LR^2}{2c^2} \sqrt{\frac{\Gamma M}{a^3}}.$$

Číselně vychází $W_{\text{PR}} \doteq 1,19 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

Vypočtená práce odpovídá rozdílu celkové mechanické energie zrnka na začátku a na konci oběhu. Nový poloměr dráhy po jednom oběhu budeme značit a' .

f) Ze zákona zachování energie vyjádřete nový poloměr dráhy a' , na níž se zrnko dostane v důsledku působení brzdné síly po jednom oběhu pomocí Γ , M , ρ , R a L , a a c . Uveďte i číselný výsledek pro rozdíl $\Delta a = a' - a$ (v km). [3,5 b]

Nápověda: v systému, kde by působila *pouze* gravitační síla, bychom celkovou mechanickou energii E tělesa o hmotnosti m , které obíhá po eliptické dráze o velké poloose a kolem centrálního tělesa o hmotnosti M , vypočetli jako

$$E = -\frac{GMm}{2a}.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Označme počáteční mechanickou energii jako E , mechanickou energii zrnka po jednom oběhu budeme značit E' . Podle zákona zachování energie musí platit

$$E = E' + W_{\text{PR}}.$$

Pro celkovou mechanickou energii E zrnka obíhajícího po dráze s velkou poloosou a platí standardní vztah, v němž ale vyměníme běžnou gravitační konstantu G za efektivní gravitační konstantu Γ , tedy

$$E = -\frac{\Gamma M m}{2a} = -\frac{4\pi\Gamma M \rho R^3}{6a}.$$

Pro E' analogicky máme

$$E' = -\frac{\Gamma M m}{2a'} = -\frac{4\pi\Gamma M \rho R^3}{6a'}.$$

Dosazením do ZZE dostáváme

$$-\frac{4\pi\Gamma M \rho R^3}{6a} = -\frac{4\pi\Gamma M \rho R^3}{6a'} + \frac{\pi L R^2}{2c^2} \sqrt{\frac{\Gamma M}{a^3}},$$

odkud píšeme

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{3L}{4c^2 \rho R} \sqrt{\frac{1}{\Gamma M a^3}}.$$

Celkem tedy dostaneme

$$a' = \frac{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a} + 3L} a.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme pro rozdíl velikostí nové a původní velké poloosy výsledek

$$\Delta a = a' - a = -\frac{3L}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a} + 3L} a \doteq -1400 \text{ km}.$$

Poznámka: jelikož platí $L \ll c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}$, můžeme aproximovat

$$\Delta a \approx -\frac{3L}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}} a.$$

g) Vyjádřete rychlost změny poloměru dráhy obecně pomocí Γ , M , ρ , R , L , a a c . Uvažujte, že všechny změny probíhají velmi pomalu. Rychlost změny spočítejte rovněž číselně (v $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$). [**2,5 b**]

Rychlost změny poloměru získáme jako podíl změny Δa poloměru za jeden oběh a periody P , tedy

$$\frac{\Delta a}{P} \approx \frac{v(a' - a)}{2\pi a} = \frac{\sqrt{\Gamma M}(a' - a)}{2\pi \sqrt{a^3}},$$

takže po dosazení za a' a několika úpravách máme

$$\frac{\Delta a}{P} \approx -\frac{3L\sqrt{\Gamma M}}{8\pi c^2 \rho R a \sqrt{\Gamma M} + 6\pi L \sqrt{a}}.$$



Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Číselně vychází $\frac{\Delta a}{P} \doteq -4,53 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Poznámka: podobně jako v předchozí části můžeme aproximovat

$$\frac{\Delta a}{P} \approx -\frac{3L}{8\pi c^2 \rho R a}.$$

h) Vyjádřete rychlost změny periody oběhu obecně pomocí Γ , M , ρ , R , L , a a c . Opět uvažujte, že všechny změny probíhají velmi pomalu. Uveďte i číselný výsledek v sekundách za rok. **[3,5 b]**

Počáteční periodu oběhu P , stejně tak jako periodu oběhu P' , kterou bude zrnko mít po jednom oběhu, můžeme zjistit ze 3. Keplerova zákona, samozřejmě opět s efektivní gravitační konstantou namísto té běžné. Máme tedy

$$P = \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{\Gamma M}}$$

a analogicky

$$P' = \sqrt{a'^3 \frac{4\pi^2}{\Gamma M}}.$$

Pro rychlost změny periody tedy píšeme

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{v(P' - P)}{2\pi a} = \frac{\sqrt{\Gamma M}(P' - P)}{2\pi \sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{\Gamma M}(\sqrt{a'^3 \frac{4\pi^2}{\Gamma M}} - \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{\Gamma M}})}{2\pi \sqrt{a^3}} = \frac{\sqrt{a'^3} - \sqrt{a^3}}{\sqrt{a^3}},$$

a tedy

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \left(\frac{a'}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Po dosazení za a' konečně dostaneme

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \left(\frac{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a} + 3L}\right)^{\frac{3}{2}} - 1.$$

Číselně $\frac{\Delta P}{P} \doteq -1,45 \cdot 10^{-5}$. Perioda se tedy zkrátí přibližně o 450 s za rok.

Poznámka: s využitím binomické aproximace $(1+x)^p \approx 1+px$, kde $x \ll 1$, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{P} &\approx \left(1 + \frac{3L}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}}\right)^{-\frac{3}{2}} - 1 \\ &\approx \left(1 - \frac{3}{2} \frac{3L}{4c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}}\right) - 1, \end{aligned}$$

tedy

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\frac{9L}{8c^2 \rho R \sqrt{\Gamma M a}}.$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

F Zatmění Slunce

(max. 20 bodů)

12. srpna 2026 nastane úplné zatmění Slunce viditelné z Grónska, Islandu a Španělska. Z České republiky bude pozorovatelné jako částečné, kdy Měsíc zakryje až 86 % plochy slunečního kotouče. V této úloze se pokusíme odhadnout poměr mezi počtem úplných zatmění Slunce a prstencových zatmění Slunce. Oběžnou dráhu Země okolo Slunce považujte za kruhovou, avšak oběžná dráha Měsíce okolo Země je eliptická. Počítejte s excentricitou dráhy Měsíce $e_M = 0,0549$ a hlavní poloosou $a_M = 384\,400$ km. Taktéž můžeme v této úloze hmotnost Měsíce považovat za zanedbatelnou oproti Zemi.

a) V jaké vzdálenosti (číselně v km) od pozorovatele na Zemi musí Měsíc být, aby měl přesně stejný úhlový průměr jako Slunce? [2 b]

Země obíhá okolo Slunce po kruhové dráze s poloměrem $a_Z = 1,00 \text{ au} = 1,496 \cdot 10^8$ km. Slunce má poloměr $R_\odot = 6,96 \cdot 10^5$ km a Měsíc má poloměr $R_M = 1\,740$ km. Aby měl Měsíc pro pozorovatele na Zemi stejný úhlový průměr jako Slunce, musí od pozorovatele být vzdálený

$$d_0 = \frac{R_M}{R_\odot} a_Z = 3,74 \cdot 10^5 \text{ km}.$$

Nyní uděláme krok stranou a podíváme se na obecnou eliptickou orbitu okolo tělesa o hmotnosti M . Rychlost obíhajícího objektu (o hmotnosti $m \ll M$) lze rozložit do radiální složky v_r a tangenciální složky $v_\perp$ a napsat zákon zachování energie

$$E_k(v_r, v_\perp) + E_p(r) = E_0,$$

kde $E_k(v_r, v_\perp)$ je kinetická energie objektu a $E_p(r)$ je jeho potenciální energie závisící na vzdálenosti r od centrálního tělesa.

b) Použijte zákon zachování momentu hybnosti $L = mv_\perp r = \text{konst.}$, abyste ze zákona zachování energie vyloučili tangenciální rychlost a dostali zákon zachování energie ve tvaru

$$T(v_r) + V(r) = E_0,$$

kde $T(v_r)$ je kinetická energie radiálního pohybu a $V(r)$ je efektivní potenciál závisící na momentu hybnosti L a na vzdálenosti od centrálního tělesa r . Napište do odpovědního archu efektivní potenciál $V(r)$ jako funkci r s parametry G, M, m a L . [4 b]

Zákon zachování energie říká

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mv_\perp^2 - \frac{GMm}{r} = E_0, \quad (1)$$

kde $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-2} \cdot \text{m}^2$, M je hmotnost centrálního tělesa, m je hmotnost obíhajícího tělesa, r je jejich vzdálenost a E_0 je celková energie. Moment hybnosti obíhajícího tělesa je

$$L = mv_\perp r = \text{konst.}$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Můžeme vyjádřit tangenciální rychlost $v_{\perp}$ pomocí momentu hybnosti a vzdálenosti r a dosadit do rovnice (1), čímž dostaneme zákon zachování energie v požadované formě

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r} = E_0.$$

Efektivní potenciál má tvar

$$V(r) = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - \frac{GMm}{r}.$$

Nyní uděláme další krok stranou k harmonickému oscilátoru. Rovnice harmonického oscilátoru má tvar

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E_{\text{tot}},$$

kde m je hmotnost oscilujícího tělesa, x a v_x jsou souřadnice a rychlost pohybu tělesa, E_{tot} je celková energie oscilátoru a ω je úhlová frekvence oscilátoru. Řešením rovnice harmonického oscilátoru je závislost polohy na čase

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E_{\text{tot}}}{m}} \cos(\omega t + \phi_0),$$

kde ϕ_0 je počáteční fáze, již dopočítáme dosazením počátečních podmínek, například z toho, že známe polohu oscilujícího tělesa v čase $t = 0$.

Představte si, že těleso obíhá po kruhové dráze s poloměrem r_0 , ale dojde k jeho vychýlení o vzdálenost Δr v radiálním směru, aby platilo $|\Delta r| \leq er_0$, kde $e \ll 1$. Celková energie tělesa se přitom nezmění, ale nový moment hybnosti bude $\sqrt{1 - e^2}$ -násobkem původního momentu hybnosti.

c) Ukažte, že v radiálním směru bude těleso vykonávat harmonický pohyb a najděte jeho úhlovou frekvenci ω pomocí G , M a r_0 . Tímto způsobem můžeme modelovat vzdálenost od centrálního tělesa pro orbity s nízkou excentricitou e . Ve výpočtech zanedbejte všechny členy chovající se jako e^3 nebo jako vyšší mocniny e , tedy i členy obsahující $e^2\Delta r$, $e^2\Delta r^2$ a další. [7 b]

Nápověda: Bude se vám hodit aproximační vzorec $(1 + z)^n \approx 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2}z^2$, který platí pro $|z| \ll 1$.

Označme poloměr kruhové dráhy jako r_0 . Při kruhové oběžné dráze je radiální rychlost nulová $v_r = 0$. Původní moment hybnosti spočítáme z oběžné rychlosti na kruhové dráze

$$L = mv_{\perp}r_0 = m\sqrt{\frac{GM}{r_0}}r_0 = m\sqrt{GMr_0} = \text{konst.}$$

Proto můžeme napsat rovnici pro celkovou energii

$$\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} = E_0 = -\frac{GMm}{2r_0}. \quad (2)$$

Při vychýlení z kruhové dráhy při zachování celkové energie E_0 a při změně momentu hybnosti $L_2 = L\sqrt{1 - e^2}$ se znovu objeví člen kinetické energie pro pohyb v radiálním

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

směru

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{m(r_0 + \Delta r)^2} - \frac{GMm}{r_0 + \Delta r} = E_0,$$

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2(1 - e^2)}{mr_0^2} \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-2} - \frac{GMm}{r_0} \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^{-1} = E_0.$$

Nyní použijeme aproximaci ze zadání pro $(1 + z)^n$, neboť $|\Delta r/r_0| \ll 1$, a zjednodušíme výraz

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2} \frac{L^2}{mr_0^2} (1 - e^2) \left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0} + 3\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\right) - \frac{GMm}{r_0} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} + \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\right) = E_0,$$

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} (1 - e^2) \left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0} + 3\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\right) - \frac{GMm}{r_0} \left(1 - \frac{\Delta r}{r_0} + \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2\right) = E_0,$$

$$\frac{1}{2}mv_r^2 - \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} e^2 + \frac{3}{2} \frac{GMm}{r_0} \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} \left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}m \frac{GM}{r_0^3} \Delta r^2 - \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} e^2 = 0.$$

Při přechodu z druhého na třetí řádek jsme podle instrukcí ze zadání zanedbali všechny členy obsahující $e^2\Delta r$ nebo $e^2\Delta r^2$. Navzájem se vyrušily členy s první mocninou $\Delta r/r_0$ a taktéž jsme využili rovnosti z rovnice (2).

Vidíme, že se objevila rovnice harmonického oscilátoru

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}m \frac{GM}{r_0^3} \Delta r^2 = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} e^2$$

s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{GM/r_0^3}$, která je stejná jako úhlová frekvence oběhu okolo centrálního tělesa.

d) Najděte, jak závisí vzdálenost $r(t)$ Měsíce od Země na čase t , pokud v čase $t = 0$ Měsíc procházel pericentrem své dráhy. Napište obecný vztah s využitím a_M , e_M a úhlové frekvence oběhu ω . [4 b]

Rovnice harmonického oscilátoru z podúlohy **c)** má na pravé straně energii oscilátoru

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} e^2.$$

Amplituda kmitů je tudíž podle vztahu ze zadání

$$A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E_{\text{tot}}}{m}} = \sqrt{\frac{r_0^3}{GM}} \sqrt{\frac{2 \frac{1}{2} \frac{GMm}{r_0} e^2}{m}} = er_0.$$

Časová závislost výchylky od původní kruhové dráhy je tudíž

$$\Delta r(t) = er_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

Finále 2024/25, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

a celková vzdálenost od centrálního tělesa v závislosti na čase je

$$r(t) = r_0 + \Delta r(t) = r_0(1 + e \cos(\omega t + \phi_0)).$$

Pro Měsíc můžeme ztotožnit $e = e_M$, $r_0 = a_M$ a $\omega = \sqrt{GM_Z/a_M^3}$, kde M_Z je hmotnost Země. Podle poznámky ze zadání jsme při výpočtu úhlové frekvence ω oběhu Měsíce zanedbali hmotnost Měsíce.

Ještě musíme spočítat fázi ϕ_0 . Měsíc se v čase $t = 0$ nacházel v pericentru své dráhy nejbližší k Zemi, což by odpovídalo fázi $\phi_0 = 180^\circ$, kde má funkce kosinus minimum. S využitím identity $\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha)$ dostaneme závislost vzdálenosti Měsíce od Země na čase

$$r(t) = a_M(1 - e_M \cos(\omega t)).$$

e) Předpokládejte, že oběžná dráha Země okolo Slunce i oběžná dráha Měsíce okolo Země leží v jedné rovině, tudíž při každém oběhu Měsíce nastane zatmění Slunce. Pokud bychom vždy pozorovali zatmění z místa na povrchu Země, které je nejbližší ke Slunci, jaký by byl poměr p mezi počtem prstencových zatmění a množstvím úplných zatmění? [3 b]

Jelikož orbitální periody Měsíce okolo Země a Země okolo Slunce nejsou v rezonanci, ve dlouhém časovém horizontu nastanou zatmění Slunce při všech možných vzdálenostech mezi Měsícem a Zemí. V okamžiku slunečního zatmění je Měsíc od pozorovatele stojícího na povrchu Země na spojnici Slunce–Měsíc–Země vzdálený

$$d_{P,M} = r(t) - R_Z = a_M(1 - e_M \cos(\omega t)) - R_Z,$$

kde $R_Z = 6\,378,1$ km je poloměr Země.

Abychom porovnali četnost prstencových a úplných slunečních zatmění, musíme zjistit pravděpodobnosti $d_{P,M} > d_0$ a $d_{P,M} < d_0$. Přejížděcí fáze $\phi_{p-u} = \omega t_{p-u}$ mezi prstencovým a úplným zatměním, kdy vzdálenost mezi pozorovatelem a Měsícem je přesně d_0 , je

$$d_0 = a_M(1 - e_M \cos(\phi_{p-u})) - R_Z,$$

$$\phi_{p-u} = \arccos\left(\frac{a_M - d_0 - R_Z}{e_M a_M}\right) = 79,0^\circ.$$

Při nižší fázové vzdálenosti Měsíce od průchodu pericentrem než ϕ_{p-u} dojde k úplnému zatmění. Naopak při vyšší fázové vzdálenosti Měsíce od průchodu pericentrem dojde k prstencovému zatmění. Poměr mezi počtem prstencových a úplných slunečních zatmění spočítáme jako

$$p = \frac{180^\circ - \phi_{p-u}}{\phi_{p-u} - 0^\circ} = 1,28.$$

Prstencová sluneční zatmění by nastávala 1,28-krát častěji než úplná sluneční zatmění.

Úlohu A a C navrhl David Němec, úlohu B navrhl Lukáš Linhart, úlohu D navrhli Marco Souza de Joode a Jakub Vošmera, úlohu E navrhla Radka Křížová, úlohu F navrhl Jindřich Jelínek.