

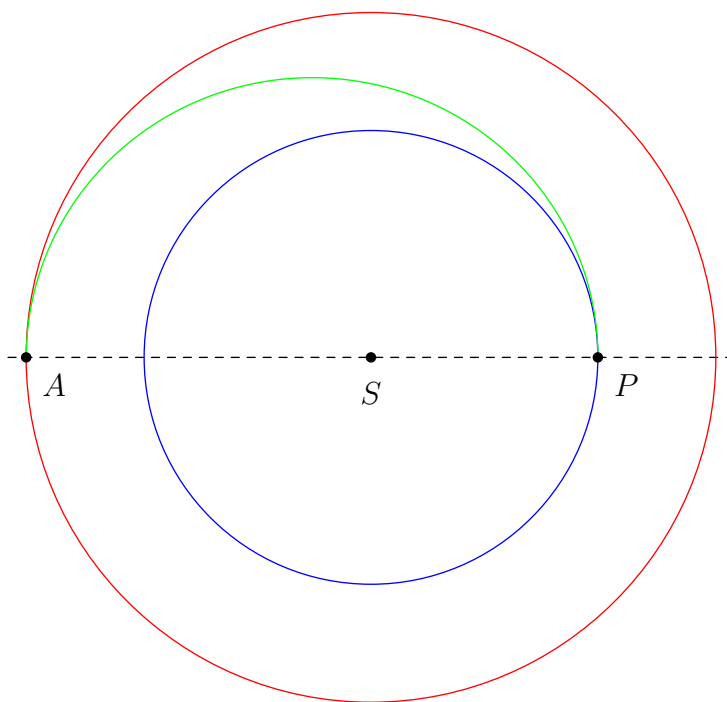
Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

A Let na Mars – Hohmannova přechodová dráha

(max. 30 bodů)

Walter Hohmann v roce 1925 publikoval odvození pro energeticky nejvýhodnější přeletovou dráhu mezi dvěma planetami, kdy se spotřebuje nejméně paliva v porovnání s přelety po jiných drahách. Na jeho počest se tato energeticky nejvýhodnější dráha nazývá Hohmannova přechodová dráha. My se právě na tento způsob letu sondy mezi dvěma planetami podíváme blíže, a sice pro let ze Země na Mars. V celé úloze budeme předpokládat, že Země i Mars se pohybují kolem Slunce po kružnicích v jedné rovině. Energeticky nejvýhodnější přechodovou dráhou je **polovina elipsy, jejíž perihélium je v bodě dráhy Země a afélium v bodě dráhy cílové planety na opačné straně Slunce než je perihélium této dráhy**, viz Obrázek 1.

K výpočtům v celé úloze využijte JEN A POUZE údaje z tabulky Astronomické olympiády pro kategorii GH. Všechny potřebné výpočty zapiš, pouhý správný výsledek bez postupu neuznáváme!



Obrázek 1: Hohmannova přechodová dráha. Sonda se má dostat ze startu ze Země (bod P) k vnější planetě (do bodu A). Energeticky nejvýhodnější dráha je polovina takové elipsy, která má perihélium v bodě P a afélium v bodě A , přičemž spojnice AP prochází Sluncem (bod S). Dráha letu sondy je znázorněna zeleně, oběžná dráha Země modře a oběžná dráha Marsu červeně. Měřítko obrázku odpovídá letu na Mars.

a) Vypočítej délku hlavní poloosy Hohmannovy přechodové dráhy pro let na Mars. Výsledek uveď v astronomických jednotkách zaokrouhlený na setiny.

Z Obrázku 1 vidíme, že délka hlavní poloosy a přechodové dráhy souvisí se středními vzdálenostmi Země a_Z a cílové planety a_M od Slunce jako

$$a = \frac{|SP| + |SA|}{2} = \frac{a_Z + a_M}{2}.$$



Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

Z Tabulky Astronomické olympiády pro kategorii GH (dále jen Tabulka) přečteme požadované údaje: $a_Z = 1,00$ au, $a_M = 1,52$ au.

$$a = \frac{a_Z + a_M}{2} = \frac{1,00 \text{ au} + 1,52 \text{ au}}{2} = 1,26 \text{ au}$$

b) Pro číselnou výstřednost ε Hohmannovy přechodové dráhy lze odvodit vzorec

$$\varepsilon = \frac{a_M - a_Z}{a_M + a_Z},$$

kde a_Z a a_M jsou střední vzdálenosti Země a Marsu od Slunce. Vypočítej hodnotu číselné výstřednosti Hohmannovy přechodové dráhy pro let na Mars a výsledek zaokrouhli na tisíce.

$$\varepsilon = \frac{a_M - a_Z}{a_M + a_Z} = \frac{1,52 - 1,00}{1,52 + 1,00} \approx 0,206$$

c) V odborné literatuře lze rovněž najít důkaz, že Hohmannova přechodová dráha zároveň znamená nejdelší možný přelet k jiné planetě. Pro čas přeletu platí vzorec

$$T = \frac{T_Z}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{a_M}{a_Z}\right)^3},$$

kde T_Z značí oběžnou dobu Země kolem Slunce. V tomto vzorci už je zohledněn fakt, že přechodová dráha je polovinou celé elipsy. Vypočítej dobu přeletu sondy od Země k Marsu po Hohmannově dráze. Výsledek uveď zaokrouhlený na celé dny.

Z Tabulky přečteme $T_Z = 365,256$ d.

$$T = \frac{T_Z}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{a_M}{a_Z}\right)^3} = \frac{365,256 \text{ d}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1,52}{1,00}\right)^3} \approx 258 \text{ d}$$

d) Pro obvod o celé elipsy s délkou hlavní poloosy a a číselnou výstředností ε přibližně platí

$$o \approx 6,28 \cdot a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right).$$

Vypočítej délku Hohmannovy přechodové dráhy pro let sondy ze Země na Mars a výsledek uveď v miliónech km zaokrouhlený na jednotky.

Stačí dosadit údaje získané v předešlých částech a výsledek vydělit dvěma, protože počítáme délku poloviny elipsy. Z Tabulky ještě přečteme údaj $1 \text{ au} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

$$s \approx \frac{6,28}{2} \cdot a \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \frac{6,28}{2} \cdot 1,26 \text{ au} \cdot \left(1 - \frac{0,206^2}{4}\right) \approx 3,91 \text{ au} \approx 587 \cdot 10^6 \text{ km}$$



Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

e) Pojďme nyní porovnat teoretické hodnoty pro energeticky nejúspornější přeletovou dráhu mezi Zemí a Marsem se třemi konkrétními misemi. Začneme porovnáním se sovětskou misí Mars 3, která ze Země odstartovala 28. května 1971 a k Marsu přilétla 2. prosince téhož roku. Tato mise se stala první misí v historii dobývání Marsu, jejíž přistávací modul úspěšně dosednul na povrch Marsu. Kolik dní letěla tato sonda ze Země k Marsu? Započítej datum startu ze Země i datum přiletu k Marsu.

$$4 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 2 = 189 \text{ dní}$$

f) Jako další slavnou misí pro porovnání s Hohmannovou přechodovou dráhou vybíráme Mars Science Laboratory, která na povrch Marsu doručila vozítko Curiosity. Ze Země odstartovala 26. listopadu 2011 a k Marsu dolétla 6. srpna 2012. Kolik dní letěla tato sonda ze Země k Marsu? Započítej datum startu ze Země i datum přiletu k Marsu.

$$\text{Rok 2012 byl přestupný: } 5 + 31 + 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 6 = 255 \text{ dní}$$

g) Jako poslední pro porovnání vybíráme misí Mars 2020, v rámci které bylo na povrch Marsu doručeno vozítko Perseverance. Start ze Země proběhl 30. července 2020 a přilet k Marsu nastal 18. února 2021. Kolik dní letěla tato sonda ze Země k Marsu? Započítej datum startu ze Země i datum přiletu k Marsu.

$$2 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 18 = 204 \text{ dní}$$

h) Podle předešlých výsledků vyber tu misí (Mars 3, Mars Science Laboratory, nebo Mars 2020), jejíž let k Marsu se nejvíce blížil Hohmannově přechodové dráze, a naopak vyber tu misí, jejíž let se nejvíce odlišoval.

Z uvedených tří misí se Hohmannově přechodové dráze nejvíce blíží let mise Mars Science Laboratory, která k Marsu letěla 255 dní, což je jen o 3 dny méně, než je doba přeletu dle výsledku části d). Nejvíce se naopak lišil let mise Mars 3, který byl o 69 dní rychlejší, než je doba letu po Hohmannově přechodové dráze.

i) Ještě se na závěr úlohy pojďme podívat na úvahy o rychlostech (ve zjednodušené podobě). Nejprve vypočítej délku oběžné dráhy Země kolem Slunce. Výsledek uveď zaokrouhlený na milióny kilometrů.

$$o_Z \approx 6,28 \cdot a_Z = 6,28 \cdot 1,00 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 942 \cdot 10^6 \text{ km}$$

j) Nyní vypočítej průměrnou oběžnou rychlost Země kolem Slunce. Výsledek zaokrouhli na desetiny kilometru za sekundu.

$$v_Z = \frac{o_Z}{T_Z} = \frac{942 \cdot 10^6 \text{ km}}{365,256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

k) Dále vypočítej délku oběžné dráhy Marsu kolem Slunce. Výsledek uveď zaokrouhlený na milióny kilometrů.

$$o_M \approx 6,28 \cdot a_M = 6,28 \cdot 1,52 \cdot 150 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 1\,432 \cdot 10^6 \text{ km}$$



Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

l) Zbývá vypočítat průměrnou oběžnou rychlost Marsu kolem Slunce. Výsledek zaokrouhli na desetiny kilometru za sekundu.

Z Tabulky přečteme $T_M = 1,88 \cdot T_Z$.

$$v_M = \frac{a_M}{T_M} = \frac{1\,432 \cdot 10^6 \text{ km}}{1,88 \cdot 365,256 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} \approx 24,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

m) Při pohybu tělesa po eliptické dráze kolem Slunce se okamžitá rychlost v obíhajícího tělesa mění a lze ji spočítat podle vzorce

$$v = \left(29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)},$$

kde r je hodnota okamžité vzdálenosti tělesa od Slunce dosazená v astronomických jednotkách, a je délka hlavní poloosy elipsy, po které se těleso pohybuje, dosazená v astronomických jednotkách. Uvedený vzorec nám říká, že výsledek odmocniny stačí vynásobit hodnotou $29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ a získáme hledanou okamžitou rychlost tělesa v kilometrech za sekundu. Pomocí uvedeného vzorce spočítej, jakou okamžitou rychlost musí mít těleso v bodě P Hohmannovy přechodové dráhy. Výsledek zaokrouhli na desetiny $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ a k výpočtu použij výsledek části a).

K výpočtu použijeme výsledek části a) $a = 1,26 \text{ au}$ a uvědomíme si, že v bodě P je $r = a_Z$.

$$v_P = \left(29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{1,00} - \frac{1}{1,26} \right)} \approx 32,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

n) Dále spočítej, jakou rychlost má těleso při letu po Hohmannově přechodové dráze v bodě A . Výsledek zaokrouhli na desetiny $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Uvědomíme si, že v bodě A je $r = a_M$.

$$v_A = \left(29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{1,52} - \frac{1}{1,26} \right)} \approx 21,5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

o) Budeme-li předpokládat, že sonda má (vůči Slunci) po startu ze Země stejnou rychlost jako Země, kterou jsi spočítal/a v části j), o kolik $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ji musíme urychlit v bodě P pomocí motorů? Výsledek uveď zaokrouhlený na desetiny kilometru za sekundu a k výpočtu použij výsledek části m).

$$32,7 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 29,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

p) Aby se sonda stala oběžnicí Marsu, je nutné ji urychlit pomocí zážehu motorů tak, aby měla rychlost Marsu (vůči Slunci). O kolik $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ je nutné sondu urychlit v bodě A ? Výsledek uveď zaokrouhlený na desetiny kilometru za sekundu. K výpočtu použij výsledky částí l) a n).

$$24,1 \frac{\text{km}}{\text{s}} - 21,5 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 2,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Na závěr už nemusíš nic počítat, jen pro úplnost uvedme, že hodnoty, které jsi spočítal v posledních dvou částech, se často označují jako Δv (tato značka je velké řecké písmeno delta). Jedná se o důležité hodnoty, které je nutné vědět před startem každé mise, neboť z nich se pak určuje, jaké množství paliva musí sonda mít, aby ho měla dostatek na všechny nezbytné úpravy rychlosti.



Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

B Přehledový test

(max. 20 bodů)

U každé otázky vyber **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

1. Kolik známých měsíců má Venuše?

- [a] 0
- [b] 1
- [c] 2
- [d] 4

2. Mezi tělesa hlavního pásu NEPATŘÍ

- [a] Ceres.
- [b] Vesta.
- [c] **Sedna.**
- [d] Juno.

3. Jediným československým kosmonautem je

- [a] Aleš Svoboda.
- [b] Yemi A.D.
- [c] **Vladimír Remek.**
- [d] Vladislav Volkov.

4. Souhvězdí, které je pro pozorovatele na daném místě na Zemi viditelné po celý rok, se nazývá

- [a] cirkapolární.
- [b] cirkampolární.
- [c] cirkupolární.
- [d] **cirkumpolární.**

5. Jediným měsícem Sluneční soustavy majícím vlastní magnetické pole je

- [a] Io.
- [b] **Ganymed.**
- [c] Měsíc.
- [d] Titan.

6. Meteorický roj pozorovatelný v prosinci se nazývá

- [a] Perseidy.
- [b] Drakonidy.
- [c] Lyridy.
- [d] **Geminidy.**

7. Výrazný skleníkový efekt má planeta

- [a] Merkur.
- [b] **Venuše.**
- [c] Jupiter.
- [d] Saturn.

8. Která sonda určená pro výzkum Jupiteru a jeho měsíců odstartovala jako poslední?

- [a] Galileo
- [b] **Europa Clipper**
- [c] Juno
- [d] JUICE

9. Stáří Sluneční soustavy je přibližně

- [a] 3,6 miliardy let.
- [b] **4,6 miliardy let.**
- [c] 6 miliard let.
- [d] 13,8 miliardy let.

10. Měsíc je v porovnání se Zemí přibližně

- [a] dvakrát menší.
- [b] třikrát menší.
- [c] **čtyřikrát menší.**
- [d] pětkrát menší.

11. Evropský navigační systém nese označení

- [a] GPS.
- [b] **Galileo.**
- [c] Glonass.
- [d] Skylink.

12. Ve kterém souhvězdí se při pohledu ze Země nachází centrum Galaxie?

- [a] **v souhvězdí Střelce**
- [b] v souhvězdí Labutě
- [c] v souhvězdí Berana
- [d] v souhvězdí Panny



Finále 2024/25, kategorie GH (6. a 7. třída ZŠ) – řešení

13. Nejsilnější raketa Evropské kosmické agentury má označení

- [a] Falcon Heavy.
- [b] **Ariane 6.**
- [c] Saturn V.
- [d] Space Launch System.

14. Jak se nazývají reakce, které jsou zdrojem energie Slunce?

- [a] **jaderné slučování**
- [b] jaderné štěpení
- [c] gravitační stlačování
- [d] chemické reakce

15. Která hvězda ze seznamu je na pozemské obloze nejjasnější?

- [a] **Arcturus**
- [b] Aldebaran
- [c] Altair
- [d] Antares

16. Která planeta se okolo své osy otáčí nejrychleji?

- [a] Merkur
- [b] Venuše
- [c] **Jupiter**
- [d] Neptun

17. Který z galileovských měsíců je NEJMENŠÍ?

- [a] **Europa**
- [b] Ganymed
- [c] Callisto
- [d] Io

18. Přibližně jakou část hmotnosti Sluneční soustavy představuje Slunce?

- [a] 96,9 %
- [b] 97,9 %
- [c] 98,9 %
- [d] **99,9 %**

19. Která mise Evropské kosmické agentury zkoumala kometu, na jejíž povrch úspěšně doručila přistávací modul Philae?

- [a] Ulysses
- [b] **Rosetta**
- [c] BepiColombo
- [d] SOHO

20. Jaký vzácný úkaz jsme mohli letos z území České republiky pozorovat?

- [a] úplné zatmění Slunce
- [b] **částečné zatmění Slunce**
- [c] přechod Merkuru přes Slunce
- [d] přechod Venuše přes Slunce