Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

A Přehledový test – není dostupný online

(max. 30 bodů)

POKYNY: U každé otázky **zakroužkuj právě jednu** odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. Pokud se chceš opravit, původní odpověď zřetelně škrtni a zakroužkuj jinou možnost. V případě špatné, žádné, nebo nezřetelné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Slepá mapa oblohy

(max. 15 bodů)

1. **Napiš české názvy libovolných pěti souhvězdí, která jsou na mapce alespoň částečně vidět.**

   Had, Hadonoš, Herkules, Severní koruna, Štír, Váhy, Pastýř, Honicí psi, Panna, Hydra, Havran, Pohár, Sextant, Lev, Rak, Malý lev, Vlasy Bereniky, Velká medvědice, Štít, Orel, Kentaur, Vlk, Lyra, Labuť, Šíp, Drak, Rys, Blíženci, Malý pes, Jednorožec

2. **Pojmenuj hvězdy označené „a“ až „f“:**

[a] **Arcturus**

[b] **Regulus**

[c] **Spica**

[d] **Antares**

[e] **Alphard**

[f] **Cor Caroli**

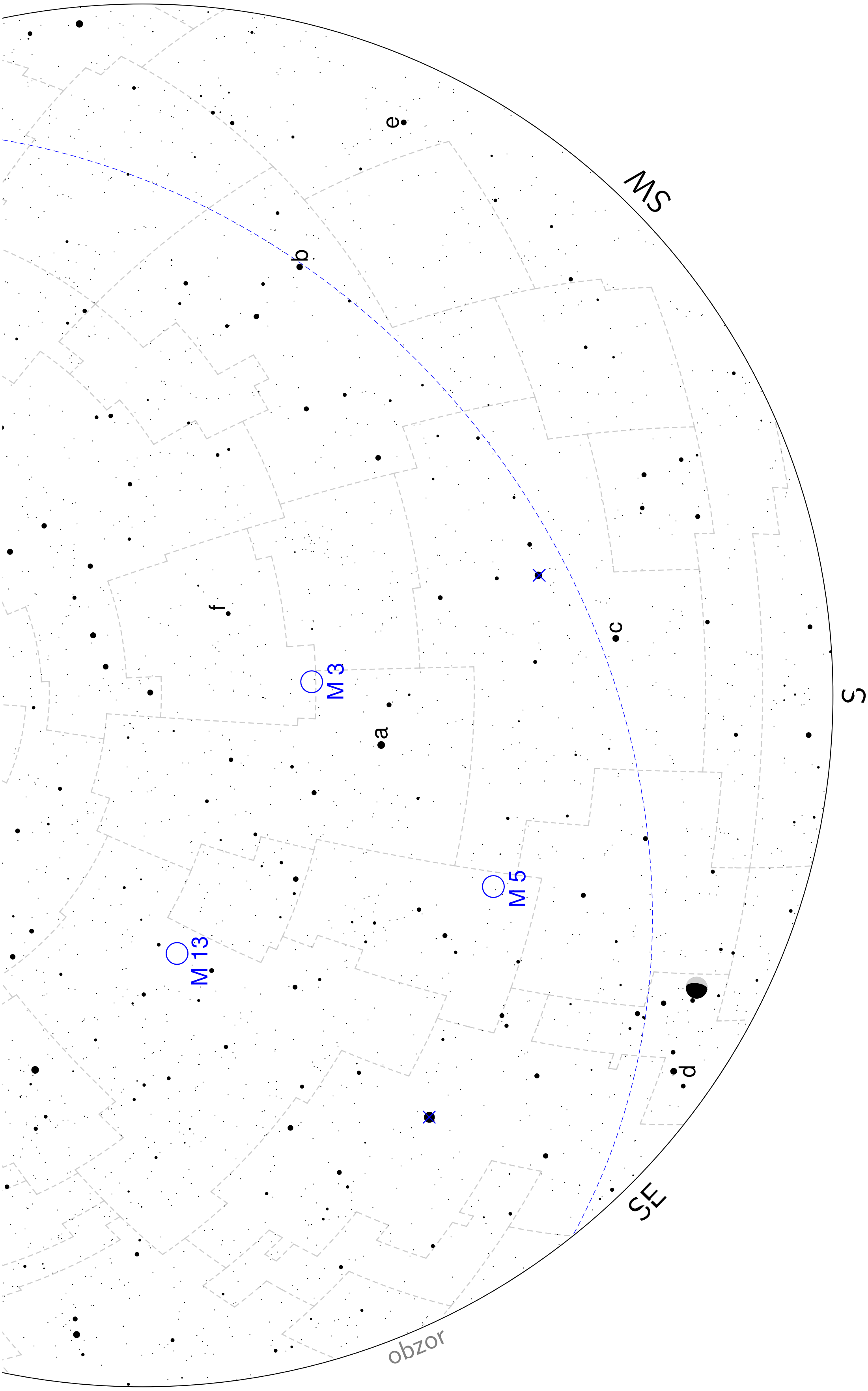
3. **Zakroužkuj a označ M3, M5 a M13.**
4. **V mapce přebývají dvě jasné hvězdy. Vyznač jejich polohy křížky.**
5. **Zakresli do mapky ekliptiku.**
6. **Napiš stáří Měsíce na mapce ve dnech. Černá barva představuje osvětlenou část Měsíce. Detail Měsíce můžeš vidět na obrázku níže.**

   20 dní (±2 dny)

7. **Urči měsíc pozorování a stručně zdůvodni.**

   Březen. Měsíc se na mapce nachází v souhvězdí Štíra, couvá a jeho stáří jsme určili na 20 dní. Synodická perioda Měsíce je 29 dní, za 9 dní tedy bude Měsíc v novu. Od Slunce je nyní proto úhlově vzdálen 9/29 plného úhlu, tedy asi 112 stupňů, a to směrem doprava. Z toho odhadneme, že Slunce se nachází o necelé 4 souhvězdí vlevo, tedy zkraje Ryb, což odpovídá březnu.

Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

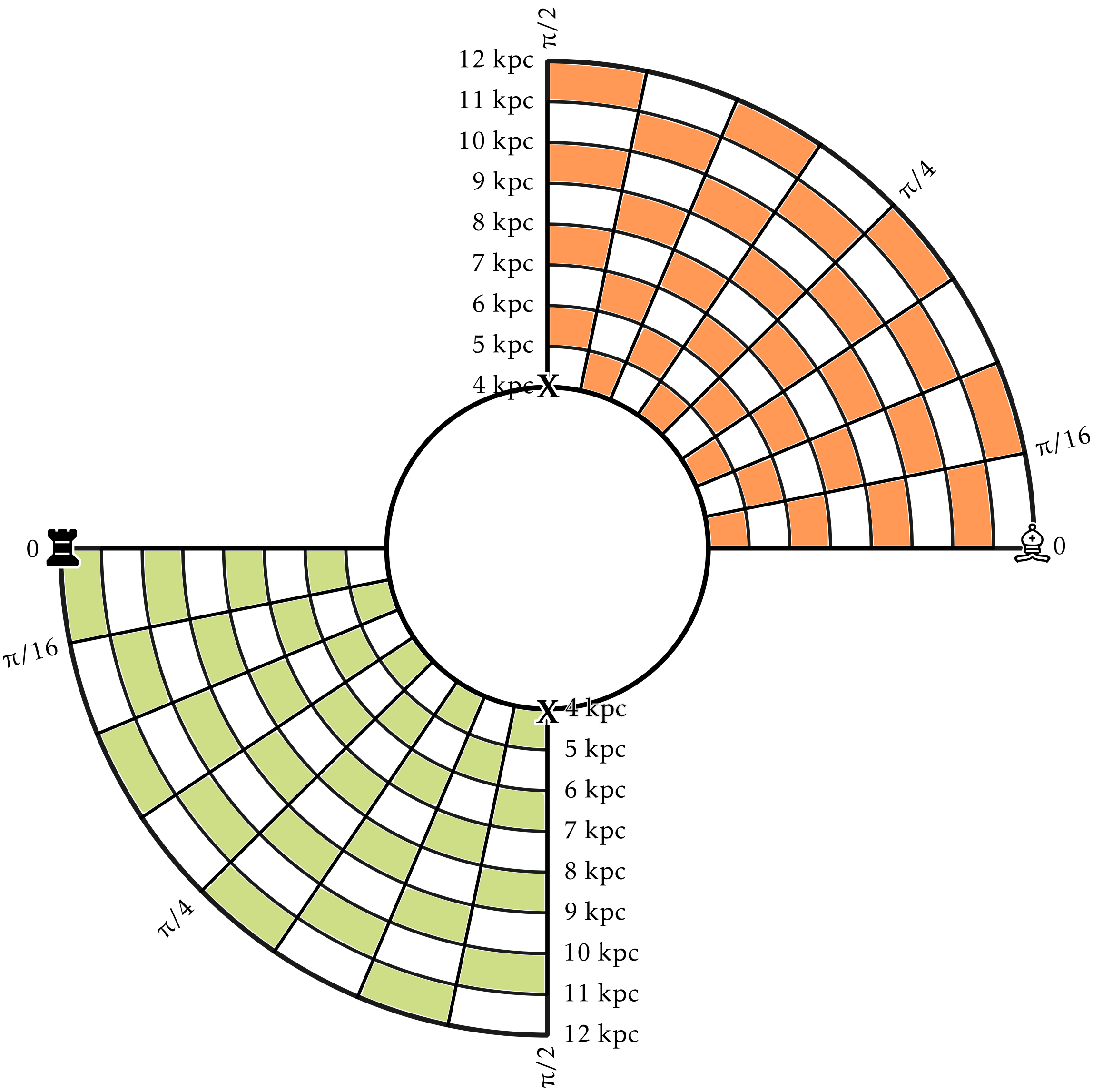


Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

C Galaktické šachy

(max. 17 bodů)

Dvě kosmické bytosti hrají nové galaktické šachy. Oproti klasickým šachům se hrají napříč celou galaxií a deska má mřížku v polárních souřadnicích (R, ϕ) v rozmezí poloměrů od $R = 4\,\mathrm{kpc}$ do $12\,\mathrm{kpc}$ (po $1\,\mathrm{kpc}$) a úhlů od $\phi = 0$ do $\pi/2$ radiánů (s krokem $\pi/16$). Každý hráč má také svůj vlastní kvadrant (viz obrázek). Tyto hodnoty jsou zadány přesně.



Další rozdíl oproti normálním šachům je, že se figurky během tahu pohybují vždy jen o jedno políčko a začátek i konec tahu každé figurky je na průsečících sítě, a to dle následujících pravidel:

- **Věž** se může pohybovat buď radiálně (tj. beze změny ϕ) nebo azimutálně (na konstantním R).
- **Střelec** se musí pohybovat po souřadnicových diagonálách, tj. vždy dohromady o $\Delta R = 1\,\mathrm{kpc}$ a $\Delta\phi = \pi/16$.

Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

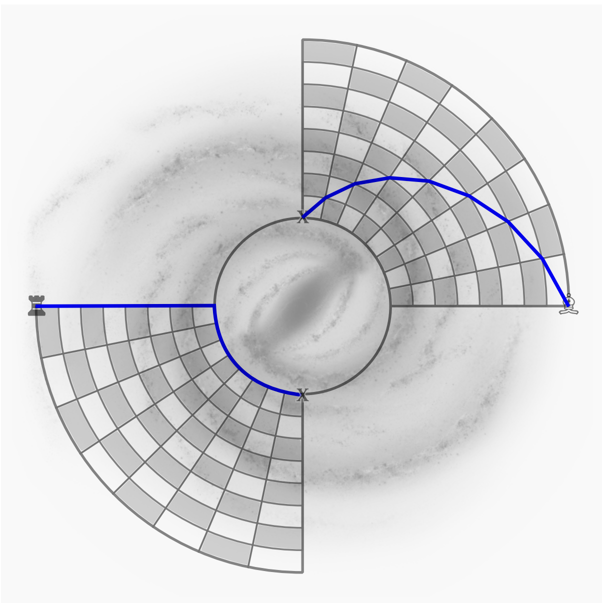
Cílem každého hráče je dopravit svou figurku (bílý střelce, černý věž) z jejího startovního políčka (vyznačeno obrázkem) do cílového políčka označeného písmenem **X**.

a) Najdi optimální cestu pro každou figurku tak, aby její cesta měla co nejméně tahů (tj. přesunů z políčka na políčko). Do obrázku zatím nic nekresli, jen zapiš, kolik tahů potřebuje věž a kolik střelec.

věž 16 tahů , střelec 8 tahů

Předpokládej, že se během tahu po šachovnici pohybuje každá figurka konstantní rychlostí 200,0 km/s vůči hrací ploše. Další pravidlo galaktických šachů je, že hráč nemusí čekat na dokončení tahu soupeře, ale může zahájit svůj následující tah ihned poté, co jeho předchozí tah skončí. Napovíme, že se ti v některé z následujících úloh může hodit převodní vztah 1 km/s = 1,023 pc/Myr, kde Myr je označení pro milion roků.

b) Nakresli do obrázku takovou trajektorii každé figurky, která bude trvat nejkratší dobu.



c) Jak dlouho bude trvat věži cesta na políčko **X**? Výsledek uveď v milionech roků a zaokrouhli na 4 platné číslice.

Nejkratší vzdálenost je nejprve radiálně a pak azimutálně, tj. celkově

$$d_{\text{věž}} = 8 \cdot \Delta R + 8 \cdot \Delta\phi \cdot 4{,}0\,\text{kpc} = 8\,\text{kpc} + \frac{8\pi}{16} \cdot 4{,}0\,\text{kpc} = 14{,}28\,\text{kpc}$$

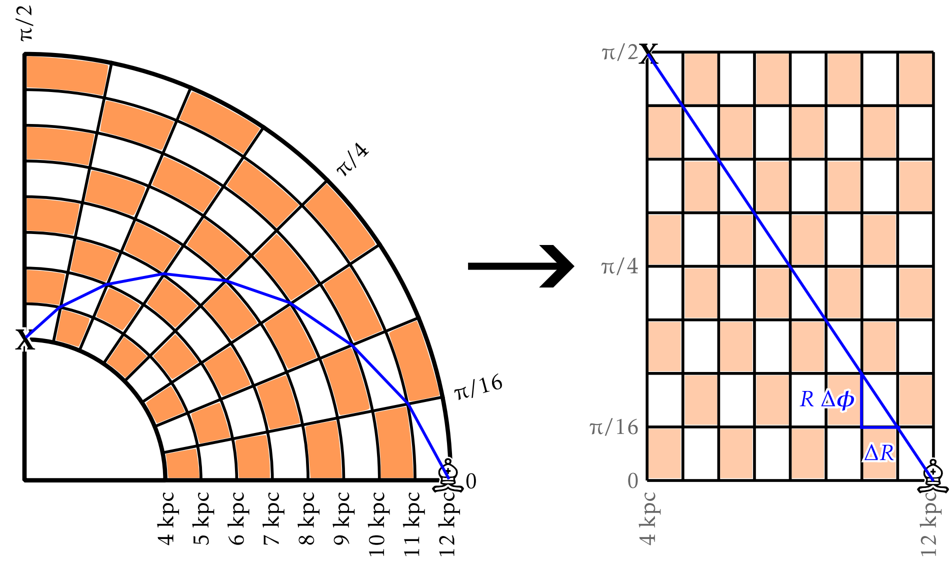
A celková doba pohybu je (pozor, převodní vztah není v kpc, ale v pc!)

$$t_{\text{věž}} = \frac{d_{\text{věž}}}{v} = \frac{14{,}28\,\text{kpc}}{1{,}023\,(\text{pc/Myr})/(\text{km/s}) \cdot 200{,}0\,\text{km/s}} = \frac{14{,}28 \cdot 10^3\,\text{pc}}{204{,}6\,\text{pc/Myr}} = 69{,}79\,\text{Myr}$$

d) Jak dlouho bude trvat cesta na políčko **X** střelci? Výsledek uveď v milionech roků a zaokrouhli na 4 platné číslice. *Nápověda: Můžeš počítat s aproximací malých úhlů.*

Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Jako první je třeba si uvědomit, po jaké trajektorii se pohybuje střelec v prostoru (R, ϕ). Považujeme-li úhly za malé, nejjednodušší je si zakřivenou mřížku převést to pravoúhlé sítě (viz obrázek); jen je třeba mít na paměti, že každá svislá čára v síti má jinou délku závislou na R, tj. $R\Delta\phi$.



Trajektorie střelce se pak skládá z osmi přepon s velikostmi $\sqrt{(\Delta R)^2 + (R\Delta\phi)^2}$, kde je vždy $\Delta R = 1\,\mathrm{kpc}$ a $\Delta\phi = \pi/16$, ale R se mění.

Celkově tedy

$$\frac{d_{\text{střelec}}}{\text{kpc}} = \sqrt{1 + \left(\frac{11\pi}{16}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{10\pi}{16}\right)^2} + \cdots + \sqrt{1 + \left(\frac{5\pi}{16}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi}{16}\right)^2} = 14{,}39\,\text{kpc}$$

A celková doba pohybu je (pozor, převodní vztah není v kpc, ale v pc!)

$$t_{\text{střelec}} = \frac{d_{\text{střelec}}}{v} = \frac{14{,}39\,\text{kpc}}{1{,}023\,(\text{pc/Myr})/(\text{km/s}) \cdot 200{,}0\,\text{km/s}} = \frac{14{,}39 \cdot 10^3\,\text{pc}}{204{,}6\,\text{pc/Myr}} = 70{,}33\,\text{Myr}$$

Poznámka: Trajektorie střelce je ve skutečnosti dokonce o cca 5 % delší; aproximace malými úhly je jen spodní odhad. Z nákresu v řešení části b) ji např. lze změřit.

e) Kdo z galaktických bytostí vyhraje závod na políčko **X** a o kolik milionů let tam bude dříve? Napiš **VĚŽ** nebo **STŘELEC** a číselný výsledek zaokrouhli na 2 platné číslice.

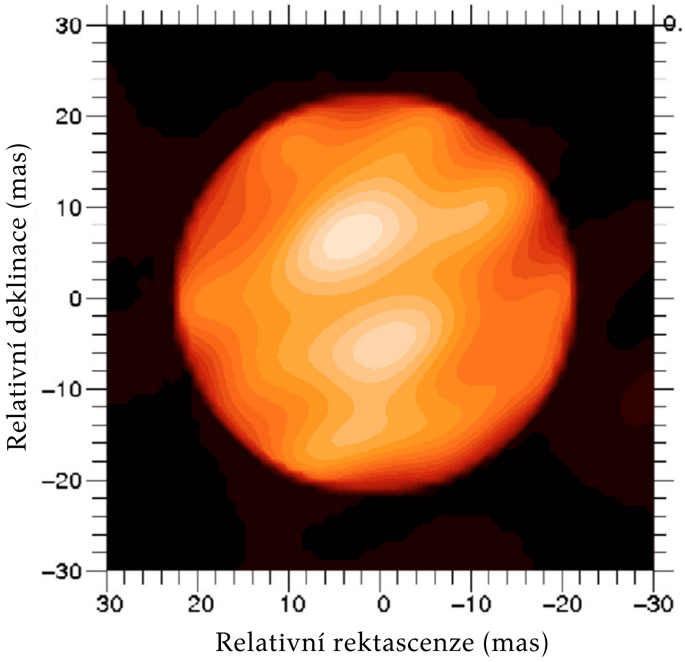
VĚŽ tam bude o 0,47 Myr dříve

Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

D Betelgeuze

(max. 13 bodů)

Jedním z nejbližších hvězdných obrů k našemu Slunci je Betelgeuze (α Ori). Má pozorovanou hvězdnou velikost $m = 0{,}50$ mag a absolutní hvězdnou velikost $M = -5{,}85$ mag. Pomocí interferometrie je dokonce možné pozorovat povrch této hvězdy (viz obrázek).



Obrázek 1: Povrch Betelgeuze v blízké infračervené oblasti získaný pomocí interferometru IOTA. Rozměry jsou udány v tisícinách úhlových vteřin (*milliarcsecond*, neboli „mas“). Zdroj: 2009 Haubois/Perrin (LESIA, Observatoire de Paris)

a) Zjisti z obrázku úhlovou velikost Betelgeuze v tisícinách úhlových vteřin, hodnotu zapiš jako „$\theta = \ldots$ mas“ s přesností na celé číslo.

$\theta = 44$ mas (akceptovat hodnoty v rozmezí 42 až 46 mas)

b) Na základě uvedených hodnot vypočítej vzdálenost k Betelgeuze. Uveď ji v parsecích s přesností na 3 platné číslice.

Použijeme z tabulek AO modul vzdálenosti

$$m - M = 5 \log\left(D_{\mathrm{pc}}\right) - 5\,, \text{ neboli } D = 10^{(m-M+5)/5}\,\mathrm{pc}$$

Dosadíme (pozor na znaménko u M)

$$D = 10^{(0{,}50+5{,}85+5)/5} = 186\,\mathrm{pc}$$

c) Jaký má Betelgeuze průměr v astronomických jednotkách? Uveď s přesností na 3 platné číslice.

Nejprve převedeme úhlovou velikost Betelgeuze na radiány.

$$\theta = 44\,\mathrm{mas} = \frac{4{,}4 \cdot 10^{-2}}{3600} \cdot \frac{\pi}{180}\mathrm{rad} = 2{,}13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad}$$

(případně $2{,}04 \cdot 10^{-7}$ rad pro 42 mas a $2{,}23 \cdot 10^{-7}$ rad pro 46 mas)

Použijeme vlastnost malých úhlů

$$\theta \approx \frac{d}{D} \quad \Rightarrow \quad d = D\,\theta = 186 \cdot 2{,}13 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{pc} = 3{,}96 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{pc}\ (\text{příp. } 3{,}97 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{pc})$$

(případně $3{,}79 \cdot 10^{-5}$ pc pro 42 mas a $4{,}15 \cdot 10^{-5}$ pc pro 46 mas)

Převedeme na au

$$d = 3{,}96 \cdot 10^{-5} \cdot 206\,265\,\mathrm{au} = 8{,}17\,\mathrm{au}\ (\text{příp. } 8{,}19\,\mathrm{au})$$

(případně 7,83 au pro 42 mas a 8,55 au pro 46 mas)

d) Kdybychom umístili Betelgeuze na místo Slunce, některé planety by skončily uvnitř ní. Která planeta by byla první nepohlcená?

Porovnáme poloměr Betelgeuze s hlavními poloosami planet Sluneční soustavy. Nezapomeň, že jsme až dosud počítali s průměrem Betelgeuze! Poloměr je $r = d/2 \approx 4{,}1$ au, tedy první nepohlcená planeta by byl **Jupiter** ($a = 5{,}2$ au). (případně 3,9 au pro 42 mas a 4,3 au pro 46 mas, ale planeta se nezmění)

E Obyvatelná zóna

(max. 25 bodů)

Obyvatelná zóna je taková teoretická vzdálenost od hvězdy, ve které je optimální teplota pro život. Představ si, že máme dvě planetární soustavy. Planeta **A** obíhá okolo obří hvězdy $\boldsymbol{\alpha}$, planeta **B** obíhá okolo trpasličí hvězdy $\boldsymbol{\beta}$. Obě hvězdy $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ mají stejnou efektivní povrchovou teplotu $T_\alpha = T_\beta = 3\,500\,\mathrm{K}$, ale jiné poloměry ($R_\alpha = 100{,}0\,R_\odot$, $R_\beta = 0{,}200\,R_\odot$) a jiné hmotnosti ($M_\alpha = 1{,}50\,M_\odot$, $M_\beta = 0{,}120\,M_\odot$). Obě planety obíhají uprostřed obyvatelných zón (podobně jako Země), takže přijímají stejný tok záření jako Země, tj. $1\,361\,\mathrm{W/m^2}$.

Zářivý výkon hvězdy určuje tzv. Stefanův–Boltzmannův zákon

$$L_\star = 4\pi R_\star^2 \sigma T_\star^4\,,$$

kde $R_\star$ je poloměr hvězdy, $T_\star$ její teplota a σ je Stefanova–Boltzmannova konstanta (viz tabulky).

a) Spočítej zářivý výkon hvězd $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$. Výsledek uveď ve vědeckém formátu ve wattech a zaokrouhli na 3 platné číslice.

Finále 2024/25, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Nejprve převedeme poloměry hvězd na metry, kde $R_\odot = 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ je z tabulek AO:

$$R_\alpha = 100\,R_\odot = 100 \cdot 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 6{,}96 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$$

$$R_\beta = 0{,}2\,R_\odot = 0{,}2 \cdot 6{,}96 \cdot 10^8\,\mathrm{m} = 1{,}39 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

Využijeme dvakrát Stefanův–Boltzmannův zákon.

$$L_\alpha = 4\pi R_\alpha^2 \sigma T_\alpha^4 = 4\pi \cdot (6{,}96 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m})^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \cdot (3\,500\,\mathrm{K})^4 = 5{,}18 \cdot 10^{29}\,\mathrm{W}$$

$$L_\beta = 4\pi R_\beta^2 \sigma T_\beta^4 = 4\pi \cdot (1{,}39 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m})^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}} \cdot (3\,500\,\mathrm{K})^4 = 2{,}07 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}$$

b) Spočítej, v jaké vzdálenosti od středu hvězd $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou středy jejich obyvatelných zón. Výsledek uveď v metrech, ve vědeckém formátu, zaokrouhlený na 3 platné číslice.

Využijeme znalosti z krajského kola, že zářivý výkon klesá s rostoucím povrchem sféry, do které je světlo vyzařováno, neboli

$$F = \frac{L_\star}{4\pi d^2}\,.$$

Dosadíme-li za F sluneční konstantu (střed obyvatelné zóny), vyjde nám pro obě hvězdy:

$$d_\alpha = \sqrt{\frac{L_\alpha}{4\pi F}} = \sqrt{\frac{5{,}18 \cdot 10^{29}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 1\,361\,\mathrm{W/m^2}}} = 5{,}50 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$$

$$d_\beta = \sqrt{\frac{L_\beta}{4\pi F}} = \sqrt{\frac{2{,}07 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}}{4\pi \cdot 1\,361\,\mathrm{W/m^2}}} = 1{,}10 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$$

c) Ačkoliv mají obě hvězdy stejnou teplotu, jejich obyvatelné zóny jsou jinak daleko. Vysvětli jednou větou proč.

Uznatelná vysvětlení by měla zahrnovat něco na tento způsob:

– Červený obr má mnohem větší povrch, a proto vyzařuje mnohem více energie.

– Zářivý výkon závisí na R^2T^4, takže při stejném T určuje výkon hvězdy její velikost.

d) Spočítej oběžné periody planet **A** a **B** na kruhových drahách. Uveď je ve dnech, zaokrouhlené na 3 platné číslice.

Převedeme hmotnosti hvězd na kg:

$$M_\alpha = 1{,}50 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 2{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

$$M_\beta = 0{,}120 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 2{,}39 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}$$

Vyjdeme ze 3. Keplerova zákona

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\star}{4\pi^2}\,,$$

kde za a dosadíme d_α nebo d_β. Periody planet pak jsou

$$T_\mathrm{A} = 2\pi\sqrt{\frac{d_\alpha^3}{GM_\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{(5{,}50 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 2{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}}} = 5{,}74 \cdot 10^9\,\mathrm{s} = 66\,400\,\mathrm{d}$$

$$T_\mathrm{B} = 2\pi\sqrt{\frac{d_\beta^3}{GM_\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}10 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}} \cdot 2{,}39 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}}} = 1{,}82 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 21{,}0\,\mathrm{d}$$