

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)**Identifikace**

Nezapomeňte na každý list dolů napsat svoje jméno. Neoznačené listy nebudou opraveny!

Student

jméno: _____ příjmení: _____

email: _____

Škola

název: _____

město: _____

PSČ: _____

Hodnocení**A** _____ **B** _____ **C** _____ **D** _____ **Σ** (100 b.) _____

Účast v AO se řídí organizačním řádem. Spolu s propozicemi aktuálního ročníku je k nalezení na olympiada.astro.cz.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítáme vás u řešení úloh krajského kola kategorie AB 23. ročníku Astronomické olympiády!

Stejně jako v minulých letech na vás čeká přehledový online test (úloha A), dvě teoretické úlohy (B a C) a jedna praktická (úloha D). Vaše řešení budete i letos odevzdávat elektronicky skrze webové rozhraní.

Neformální dění okolo olympiády můžete sledovat na naší [Facebookové stránce](#) a také na [Instagramu](#). Prostřednictvím zpráv je zde možné klást dotazy přímo Ústřední komisi.

I letos stojí za to si připomenout celou řadu astronomických událostí a pokud tak učiníte kliknutím na přiložené odkazy, jistě se něco zajímavého dozvíte! Některé se staly inspirací pro zadání úloh tohoto kola:

- 17. října 2025 uplynulo 205 let od narození francouzského astronoma a matematika [Édouarda Roche](#), který je známý svými příspěvky k nebeské mechanice.
- V roce 2025 oslavujeme 100 let od objevu [kvantové mechaniky](#). Ten byl iniciován přelomovým článkem [Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen](#) německého fyzika [Wernera Heisenberga](#), který byl následován neméně důležitými pracemi [Pascuala Jordana](#) a [Maxe Borny](#). 1. února 2026 si rovněž připomene 50 let od Heisenbergova úmrtí.

Z předpověditelných astronomických úkazů v roce 2026 zmiňme především zatmění Slunce, které nastane 12. srpna a které bude z ČR pozorovatelné ve večerních hodinách jako částečné. V maximální fázi bude měsíční kotouč zakrývat 86 procent disku Slunce. Úplná fáze zatmění bude pozorovatelná především ze Španělska, ale také z Islandu a Grónska. Do roku 2030 se dočkáme ještě dalších 3 částečných zatmění Slunce, počínaje následujícím rokem (2. srpna 2027).

Přejeme vám bystrou mysl a mnoho příjemných chvil při řešení všech úloh! ☺

Ústřední komise Astronomické olympiády

Důležité kontakty:

- Internetové stránky a e-mail Astronomické olympiády:
<http://olympiada.astro.cz>, olympiada@astro.cz
- Webová adresa se základními pokyny ke krajskému kolu:
<https://olympiada.astro.cz/aktualni-rocnik/krajske-kolo>

Termín odeslání: 14. 1. 2026

Celkem lze v krajském kole získat maximálně **100 bodů**. Do celostátního kola postupuje 20 nejlepších řešitelů krajských kol, kteří získali nenulový počet bodů z praktické úlohy.

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)**A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **7. 1. 2026** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Rotující hvězda*(max. 20 bodů)*

V této úloze budeme zkoumat tvar rotujících hvězd. Oprostité se tedy od často zaváděného zjednodušujícího předpokladu, že hvězdy mají tvar ideálních koulí a zaměříme se na odchylky od sféricnosti v důsledku působení odstředivé síly v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotující hvězdou. Příkladem hvězdy, u které se pozorovalo výrazné zploštění z důvodu její rychlé rotace, je Achernar ze souhvězdí Eridanu. Obecné výsledky, které odvodíme v první části úlohy, následně využijeme k výpočtu rotační periody této hvězdy.

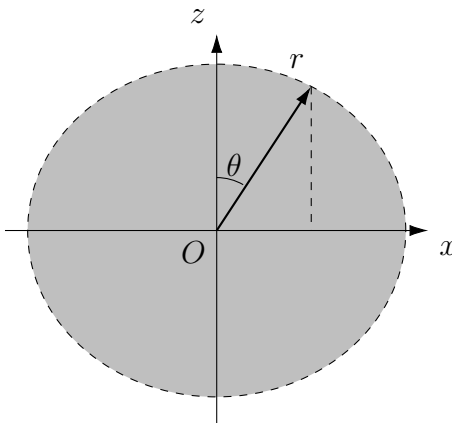
Hvězdy jsou komplikované systémy skládající se z ionizovaného plynu, jehož fyzikální vlastnosti (hustota, teplota, tlak apod.) jsou obecně funkcí vzdálenosti od středu hvězdy. Abychom si naši analýzu co nejvíce ulehčili, budeme hvězdy modelovat na základě několika zjednodušujících předpokladů.

1. Budeme uvažovat, že většina hmoty hvězdy je koncentrována v oblastech kolem středu, kde můžeme její rozložení považovat za sférické. Označíme-li tedy jako M hmotnost hvězdy, můžeme její gravitační pole v libovolné vzdálenosti od středu dle Gaussovy věty velmi dobře přiblížit gravitačním polem hmotného bodu o stejné hmotnosti M . Tvar povrchu hvězdy pak bude formován *atmosférou*, jejíž příspěvek do celkové hmotnosti hvězdy budeme zanedbávat.
2. Budeme rovněž předpokládat, že hvězda rotuje uniformně a zanedbáme komplikace spojené s diferenciální rotací.
3. Rotující hvězdu budeme pokládat za stacionární systém. Výslednice gravitační a odstředivé síly působící v soustavě rotující s hvězdou na libovolný element ionizovaného plynu je tedy přesně vyrovnána gradientem tlaku. V důsledku tohoto předpokladu nepůsobí podél povrchu hvězdy (plocha konstantního tlaku $p = 0$) žádná síla a jedná se tedy o plochu konstantní potenciální energie ve výsledném poli gravitační a odstředivé síly.

K popisu polohy v rámci hvězdy budeme používat souřadnice zavedené na obr. 1.

a) Vyjádřete potenciální energii E_p částice o hmotnosti m v atmosféře hvězdy v neinerciální rotující soustavě pomocí vzdálenosti x od osy rotace, hmotnosti M hvězdy, úhlové rychlosti ω rotace a souřadnice z . Uvažujte referenční hladinu $E_p = 0$ potenciální energie v nekonečné vzdálenosti od středu hvězdy podél osy rotace. [4 b]

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)



Obrázek 1: Rotující hvězda se zavedenými souřadnicemi.

Pro přehlednost nyní bude výhodné, pokud vztah pro celkovou potenciální energii přepíšeme pomocí bezrozměrných veličin. Konkrétně veličiny s jednotkami energie, resp. vzdálenosti můžeme měřit v násobcích charakteristické energie

$$\mathcal{E} = m(GM\omega)^{\frac{2}{3}},$$

resp. charakteristického poloměru

$$\mathcal{R} = \left(\frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Níže uvidíme, jak lze tyto dvě veličiny (které jsme utvořili vhodnými kombinacemi veličin M , ω charakterizujících systém a Newtonovy gravitační konstanty G) fyzikálně interpretovat. Prozatím je použijeme k zavedení bezrozměrné celkové potenciální energie $e_p = E_p/\mathcal{E}$ a bezrozměrných souřadnic $\xi = x/\mathcal{R}$ a $\zeta = z/\mathcal{R}$.

b) Vyjádřete e_p jako funkci ξ a ζ . [2 b]

c) Pomocí vhodného programu nakreslete křivky konstantní celkové bezrozměrné potenciální energie e_p v rovině (ξ, ζ) pro hodnoty ξ, ζ v rozmezí od -2 do 2 (neboli „vrstevnice“ funkce $e_p(\xi, \zeta)$). V grafu identifikujte lokální maxima a minima, případně sedlové body. [4 b]

d) Pro dané ω a M určete maximální hodnotu R_{pol}^* polárního poloměru R_{pol} hvězdy takovou, aby se hvězda vlivem rotace nerozpadla. Jaká je odpovídající maximální hodnota R_{eq}^* rovníkového poloměru R_{eq} ? Odpovědi uveďte v násobcích charakteristického poloměru $\mathcal{R}$. [3 b]

e) Určete poměr $\eta = R_{\text{pol}}/R_{\text{eq}}$ polárního poloměru R_{pol} hvězdy vůči rovníkovému poloměru R_{eq} obecně jako funkci R_{eq} s parametrem $\mathcal{R}$. Jaká je minimální hodnota η^* parametrů η pro stabilní hvězdy? [4 b]

f) Hvězda Achernar má hmotnost $M = 6,0M_{\odot}$, pozorovaný rovníkový poloměr $R_{\text{eq}} = 9,2R_{\odot}$ a pozorovaný polární poloměr $R_{\text{pol}} = 6,8R_{\odot}$ (tyto hodnoty již byly opraveny o sklon rotační osy vůči směru k pozorovateli). Vypočtěte parametr η , charakteristický poloměr $\mathcal{R}$ a periodu P rotace Achernaru kolem jeho osy. Výsledné hodnoty diskutujte. [3 b]

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

C Degenerovaný plyn

(max. 20 bodů)

Většina hvězd se nachází ve stavu hydrostatické rovnováhy. To znamená, že tlakový gradient uvnitř hvězdy vyrovnává gravitační sílu, která se snaží hmotu hvězdy přitahovat směrem ke středu. Tato rovnováha zajišťuje, že hvězda zůstává stabilní a nesmršťuje se ani se nerozpíná. Za normálních podmínek je tlak určen teplotou: čím vyšší teplota, tím větší tlak. Když je však hmota stlačena do stavu extrémní hustoty, částice se dostanou tak blízko, že už se nemohou chovat jako klasický plyn a začnou být důležité kvantové jevy. Podle Pauliho vylučovacího principu dva fermiony (částice s poločíselným spinem, např. elektrony nebo neutrony) nemohou být ve stejném kvantovém stavu. Z tohoto kvantového omezení vzniká tzv. degenerační tlak, který nezávisí na termodynamické teplotě určené náhodným pohybem částic. Takovou extrémní formu hmoty nazýváme degenerovaný plyn a právě na něj se v této úloze podíváme podrobněji.

V klasické mechanice lze každý stav volné částice jednoznačně popsat její polohou (x, y, z) a hybností (p_x, p_y, p_z) . Naproti tomu v kvantové mechanice nedokážeme zároveň určit polohu a hybnost částice s libovolnou přesností: čím přesněji lokalizujeme částici, tím méně přesně máme šanci změřit její hybnost. Konkrétně: je-li volná částice plynu uvězněna v oblasti o objemu V , můžeme její hybnost měřit nanejvýš po kvantech

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \frac{h}{V^{1/3}},$$

kde h je Planckova konstanta. Jinými slovy: na každý kvantový stav volné částice připadá oblast spektra (p_x, p_y, p_z) hybností o objemu

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{V}.$$

Jelikož se zároveň dva elektrony dle Pauliho vylučovacího principu nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu, mohou se v libovolné oblasti o objemu $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$ nacházet maximálně dva elektrony (jeden se spinem nahoru a druhý se spinem dolů).

Uvažujme, že plyn elektronů o N částicích je uzavřen v objemu V při velmi nízké termodynamické teplotě, můžeme tedy zanedbat termální pohyb elektronů. Budeme předpokládat, že hybnosti elektronů se v tomto takzvaném *degenerovaném plynu* rozloží jednak v souladu s Pauliho vylučovacím principem a zároveň tak, aby plyn minimalizoval celkovou energii (která je úměrná velikosti hybnosti $\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$). Předpokládejme rovněž, že částice plynu se chovají izotropně, tedy že se pohybují do všech směrů se stejnou pravděpodobností. Potom elektrony ve spektru hybností rovnoměrně obsadí objem koule se středem v nulové hybnosti $p_x = p_y = p_z = 0$ o poloměru p_F takovém, aby celkový počet obsazených kvantových stavů odpovídal celkovému počtu N částic plynu. Tedy aby bylo splněno

$$N = 2 \frac{\frac{4}{3}\pi p_F^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} = \frac{8}{3}\pi V \left(\frac{p_F}{h}\right)^3,$$

kde faktor 2 v první rovnosti odpovídá dvěma možným spinovým stavům elektronu (nahoru a dolů). Velikost hybnosti p_F ohraničující oblast spektra obsazenou elektrony nazýváme *Fermiho hybnost*. Odpovídající oblasti ve spektru hybností pak říkáme *Fermiho koule*.

a) Vyjádřete Fermiho hybnost p_F pomocí střední objemové hustoty elektronů $n = N/V$ a Planckovy konstanty h . [1 b]



Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

b) Vyjádřete Fermiho energii E_F pomocí n , h a hmotnosti elektronu m_e . Jedná se o kinetickou energii elektronu s hraniční hybností p_F . Uvažujte, že je plyn nerelativistický, tj., že $p_F \ll m_e c$. Vyjádřete také odpovídající Fermiho teplotu T_F pomocí n , h , m_e a Boltzmannovy konstanty k_B . Fermiho teplota je teplota, při které by tepelná energie elektronu $k_B T$ byla srovnatelná s Fermiho energií. [3 b]

Za chvíli uvidíme, že v některých astrofyzikálních objektech najdeme degenerovaný plyn složený z elektronů, jejichž typická kinetická energie řádově převyšuje jejich klidovou energii: jinými slovy nám ze vztahu nalezeného v části a) vyjde Fermiho hybnost $p_F \gg m_e c$. Takovým elektronům říkáme ultrarelativistické a jejich kinetická energie E je vztažena k hybnosti p jako $E = pc$.

c) Najděte vztahy pro Fermiho energii E_F a Fermiho teplotu T_F v případě, že většina elektronů v degenerovaném plynu obsadila hybnosti p , které splňují $p \gg m_e c$. Vaše výsledky vyjádřete pomocí n , h , c a k_B . [2 b]

Nyní se podíváme, jaká je situace u reálných astrofyzikálních objektů, a odhadneme, zda je plyn v nich degenerovaný. Nejprve použijeme známé hodnoty typické hmotnosti a poloměru různých typů hvězd k odhadu hustoty počtu částic. Dále spočteme Fermiho hybnost a rozhodneme, jestli by degenerovaný plyn elektronů v daném objektu byl popsán klasicky nebo ultrarelativisticky. Konečně spočteme odpovídající Fermiho teplotu a porovnáme ji s termodynamickou teplotou daného objektu, což nám pomůže rozhodnout, jestli je elektronový plyn v daném objektu degenerovaný: vyjde-li Fermiho teplota srovnatelná nebo větší než termodynamická teplota uvnitř objektu, znamená to, že degenerační tlak bude hrát důležitou roli v udržení hydrostatické rovnováhy. Uvažujme čtyři případy: Slunce, Jupiter, bílého trpaslíka a neutronovou hvězdu.

d) Spočítejte hustoty počtu elektronů $n_\odot$ pro Slunce (teplota v centru řádově 10^6 K až 10^7 K), n_J pro Jupiter (teplota v centru řádově 10^4 K), n_t pro bílého trpaslíka (hmotnost $M_t = M_\odot$, poloměr $R_t = 0,008 R_\odot$, teplota v centru řádově 10^5 K) a hustotu počtu neutronů n_n pro neutronovou hvězdu (hmotnost $M_n = 1,4 M_\odot$, poloměr $R_n = 10$ km, teplota v centru řádově 10^6 K). Dále na základě odhadu Fermiho teplot $T_{F,\odot}$, $T_{F,J}$, $T_{F,t}$ a $T_{F,n}$ u každého objektu rozhodněte, jestli je v něm plyn degenerovaný. Předpokládejte pro jednoduchost, že v případě Slunce, Jupiteru a bílého trpaslíka je plyn úplně ionizovaný. [4 b]

Ve zbytku úlohy se zaměříme na bílé trpaslíky, kde degenerační tlak elektronového plynu zajišťuje rovnováhu proti gravitačnímu kolapsu. Pro jednoduchost budeme bílé trpaslíky modelovat jako homogenní koule. Budeme také uvažovat, že hvězda se pro danou hmotnost M ustálí ve stavu s poloměrem R , pro který bude součet E celkové kinetické energie E_{kin} elektronového plynu a celkové mechanické energie E_{nuc} nukleonů minimální. Uvážením obsazenosti jednotlivých hybností elektrony bychom mohli vypočítat, že střední kinetická energie jednoho elektronu je v klasickém případě rovna $(3/5)E_F$, zatímco v ultrarelativistickém případě by byla rovna $(3/4)E_F$. Naproti tomu celkovou mechanickou energii E_{nuc} díky viriálové větě spočteme jako polovinu celkové gravitační potenciální energie (zanedbáváme příspěvek elektronů, protože $m_e \ll m_p$), tedy

$$E_{\text{nuc}} = -\frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

pro homogenní kouli o hmotnosti M a poloměru R .

e) Napište vztah pro celkovou kinetickou energii E_{kin} všech elektronů v bílém trpaslíkovi v nerelativistickém případě. Vyjádřete ji pomocí M , R , h , m_e a m_p . Předpokládejte, že na dva nukleony

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

připadá jeden elektron, tedy $M = 2Nm_p$. To odpovídá bílým trpaslíkům složeným z uhlíku a kyslíku (produkty 3-alfa reakce v závěrečném stadiu vývoje hvězdy). [2 b]

f) Najděte vztah mezi hmotností M a poloměrem R bílého trpaslíka. Výsledek vyjádřete ve tvaru

$$R = \alpha M^\beta,$$

kde koeficient α určete pomocí h , G , m_e , m_p a koeficient β zapište jako bezrozměrové číslo. Uvažujte nejprve, že elektronový plyn je nerelativistický. Pro jaké hmotnosti M bílého trpaslíka se jedná o dobrý předpoklad? [4 b]

Nápověda: napište celkovou energii E jako funkci R a najděte hodnotu R , pro kterou je E minimální. Mohlo by vám pomoci vhodné doplnění na čtverec.

Z vašich výsledků předchozí části by mělo být patrné, že pro velké hmotnosti M bílého trpaslíka je třeba brát elektronový plyn jako relativistický.

g) Napište celkovou energii E bílého trpaslíka jako funkci poloměru R pro danou fixní hmotnost M v případě, že elektronový plyn je ultrarelativistický. Co se stane, když je hmotnost hvězdy příliš velká a převládne gravitace? Odvoďte z odpovídající nerovnosti maximální možnou hmotnost M^* bílého trpaslíka. Výsledek vyjádřete pomocí m_p a Planckovy hmotnosti

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}.$$

Uveďte také číselnou hodnotu M^* v jednotkách hmotnosti Slunce. Opět předpokládejte, že na dva nukleony připadá jeden elektron, tedy $M = 2Nm_p$. Hodnotu M^* porovnejte se známou hodnotou Chandrasekharovy meze a diskutujte možné zdroje odchylek. [4 b]

D Pozorování Jupiteru

(max. 30 bodů)

POZOR!!! Je důležité, abyste pozorovali po celou dobu krajského kola. Nenechávejte pozorovací úlohu na poslední chvíli, nepodaří se vám napozorovat kýžený jev.

Dne 10. ledna 2026 bude planeta Jupiter v opozici. V průběhu krajského kola pozorujte polohu Jupiteru na obloze a zakreslujte ji do hvězdné mapky na obrázku 2 (nebo si vyrobte vlastní mapku). Využijte pak pozorování provedená okolo 10. ledna, abyste spočítali úhlovou rychlost pohybu Jupiteru po obloze v opozici a následně poloměr a_J dráhy Jupiteru jako násobek poloměru a_Z dráhy Země. Oběžné dráhy Země i Jupiteru můžete považovat za kruhové, pro výpočet můžete použít 3. Keplerův zákon ve tvaru

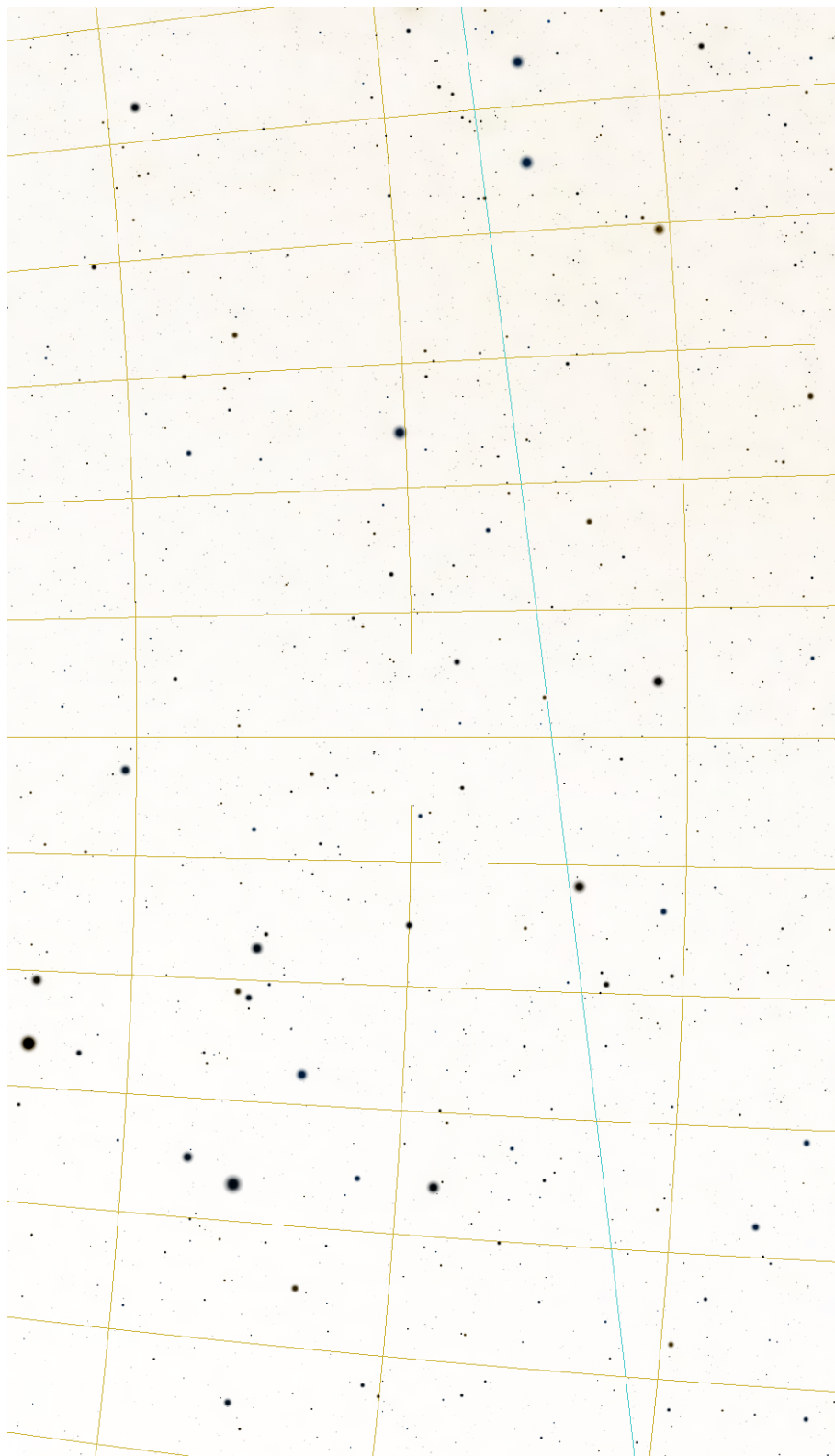
$$\left(\frac{a_J}{a_Z}\right)^3 = \left(\frac{P_J}{P_Z}\right)^2,$$

kde P_J , resp. P_Z jsou siderické oběžné periody Jupiteru, resp. Země. Předpokládejte pouze znalost hodnoty P_Z .

Autorem testu A je kolektiv autorů AO. Úlohu B navrhli Daniel Čtvrtečka a Jakub Vošmera, úlohu C navrhli David Kománek, Radka Křížová a Jakub Vošmera, úlohu D navrhl Jindřich Jelínek.



Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)



Obrázek 2: Mapa oblasti souhvězdí Blíženců, kde se v době konání krajského kola bude vyskytovat Jupiter. Je vyznačena ekliptika a rovníková síť souřadnic s krokem 5° v deklinaci a 0^h10^m v rektascenzi.