Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **27. 1. 2023** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Rozpadající se měsíc

(max. 20 bodů)

Plynní obři ve sluneční soustavě mají poměrně velkou hmotnost a generují silné gravitační pole, které jim umožňuje udržet si desítky měsíců. Blíže u planety může být její gravitace tak silná, že způsobí rozpad celého měsíce, čímž vznikne prstenec. V této úloze bude úkolem najít mezní vzdálenost měsíce a planety, ve které se začne měsíc rozpadat.

Uvažujme planetu o poloměru R a hustotě ρ_{p} a její měsíc o poloměru r a hustotě ρ_{m}. Dále budeme zkoumat dva případy rotace měsíce: nerotující měsíc a měsíc s vázanou rotací. Vzhledem ke složitosti úlohy budeme uvažovat několik zjednodušení. Předpokládejme, že hmotnost měsíce je mnohem menší než hmotnost planety, planeta zůstává v klidu a měsíc ji obíhá po kruhové trajektorii o poloměru d (Vzdálenost d je tedy vzdáleností středů planety a měsíce. Dále předpokládejme, že měsíc je tuhá homogenní koule a gravitace planety jej nebude deformovat. Nakonec budeme uvažovat, že poloměr měsíce je mnohem menší než poloměr jeho trajektorie, tedy $r \ll d$.

a) Načrtněte planetu s měsícem a označte bod na povrchu měsíce, který je nejblíže planetě, písmenem A. Bod A se pohybuje po kruhové trajektorii okolo planety: určete její poloměr v obou případech rotace měsíce.

V případě vázané rotace je zřejmé, že bod A opisuje kružnici o poloměru $d - r$. V případě nerotujícího měsíce se pohybují všechny jeho body po kružnici o stejném poloměru d. Alternativně si můžeme rozmyslet, že na začátku je bod A ve vzdálenosti $d - r$ od středu planety a za půl periody je ve vzdálenosti $d + r$. Pohybuje-li se bod A po kružnici, pak její poloměr musí být $(d - r + d + r)/2$.

b) Určete kvadrát ω^2 úhlové rychlosti bodu A v obou případech rotace měsíce. Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin a gravitační konstanty.

Úhlová rychlost je určena rovností gravitačního zrychlení planety a dostředivého zrychlení měsíce neboli

$$\omega^2 d = \frac{GM}{d^2}\,,$$

a tedy

$$\omega^2 = \frac{GM}{d^3}\,.$$

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Hmotnost planety M vyjádříme pomocí jejího poloměru a hustoty, čímž získáme

$$\omega^2 = \frac{4\pi R^3 \rho_\mathrm{p} G}{3d^3}\,.$$

Úhlová rychlost bodu A je v obou případech rotace stejná.

c) Představte si, že v bodě A povrchu měsíce nejblíže planetě se nachází pozorovatel. Jaké tíhové zrychlení v bodě A pozoruje (například tak, že upustí předmět volným pádem na povrch měsíce)? Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin a gravitační konstanty. Uvažujte oba případy rotace. V případě nerotujícího měsíce se omezte pouze na okamžik, kdy se pozorovatel nachází na povrchu měsíce v bodě A, který je nejblíže planetě.

Začneme případem nerotujícího měsíce. Výsledné tíhové zrychlení (směrem ke středu měsíce) je součtem gravitačního zrychlení měsíce, odstředivého zrychlení pohybu po kružnici, od kterých odečítáme gravitační zrychlení planety

$$a = \omega^2 d + \frac{Gm}{r^2} - \frac{GM}{(d-r)^2}\,.$$

Po dosazení za ω^2 a hmotnosti planety a měsíce získáme

$$a = \frac{4\pi R^3 \rho_\mathrm{p} G}{3d^2} + \frac{4\pi r \rho_\mathrm{m} G}{3} - \frac{4\pi R^3 \rho_\mathrm{p} G}{3(d-r)^2}\,.$$

Po vytknutí konstant získáme

$$a = \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{d^2} + r\rho_\mathrm{m} - \frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{(d-r)^2}\right)\,.$$

V případě měsíce rotujícího vázanou rotací upravíme výraz pro odstředivé zrychlení a získáme

$$a = \omega^2 (d-r) + \frac{Gm}{r^2} - \frac{GM}{(d-r)^2}\,.$$

Po dosazení za ω^2 a hmotnosti planety a měsíce vyjde

$$a = \frac{4\pi R^3 \rho_\mathrm{p} G (d-r)}{3d^3} + \frac{4\pi r \rho_\mathrm{m} G}{3} - \frac{4\pi R^3 \rho_\mathrm{p} G}{3(d-r)^2}\,.$$

Po vytknutí konstant získáme

$$a = \frac{4\pi G}{3}\left(\frac{R^3\rho_\mathrm{p}(d-r)}{d^3} + r\rho_\mathrm{m} - \frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{(d-r)^2}\right)\,.$$

d) Představte si, že parametry planety a měsíce jsou konstantní, a že měsíc se působením vnějších vlivů přibližuje k planetě (poloměr d jeho kruhové trajektorie se velmi pomalu zmenšuje). V jaké vzdálenosti d se začne rozpadat? Uvažujte oba případy rotace.

Nápověda: Tíhové zrychlení položte rovné nule a využijte aproximace $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pro $x \ll 1$.

Nyní začněme případem vázané rotace, protože nerotující měsíc bude zjednodušením tohoto případu. Podmínku nulovosti tíhového zrychlení (aneb v případě nulového tíhového zrychlení již měsíc nedrží pohromadě)

$$\frac{R^3\rho_\mathrm{p}(d-r)}{d^3} + r\rho_\mathrm{m} - \frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{(d-r)^2} = 0$$

upravíme tak, aby členy obsahující vzdálenost d byly na jedné straně rovnice, tedy

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{(d-r)^2} - \frac{(d-r)}{d^3}\,.$$

Nyní upravíme výraz na pravé straně tak, aby bylo možné použít aproximaci, tedy

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{d^2}\left[\left(1-\frac{r}{d}\right)^{-2} - \left(1-\frac{r}{d}\right)\right]\,.$$

Zřejmě platí, že $r/d \ll 1$ a můžeme tedy použít aproximaci z nápovědy. Získáme

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{d^2}\left[1+\frac{2r}{d} - 1 + \frac{r}{d}\right]\,.$$

Zajímavostí je, že poloměr měsíce lze v rovnici vykrátit a vzdálenost d můžeme vyjádřit jako

$$d = \sqrt[3]{\frac{3R^3\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{m}}}\,.$$

V případě nerotujícího měsíce můžeme vyjádřit podmínku nulovosti tíhového zrychlení jako

$$\frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{d^3} + r\rho_\mathrm{m} - \frac{R^3\rho_\mathrm{p}}{(d-r)^2} = 0\,.$$

Dále pokračujeme separací vzdálenosti d

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{(d-r)^2} - \frac{1}{d^2}$$

a přípravou pro použití aproximace

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{d^2}\left[\left(1-\frac{r}{d}\right)^{-2} - 1\right]\,.$$

Nakonec využitím aproximace získáme

$$\frac{r\rho_\mathrm{m}}{R^3\rho_\mathrm{p}} = \frac{1}{d^2}\left[1+\frac{2r}{d} - 1\right]\,.$$

Mezní vzdálenost d v případě nerotujícího měsíce vyjde

$$d = \sqrt[3]{\frac{2R^3\rho_\mathrm{p}}{\rho_\mathrm{m}}}\,.$$

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Jak horko je uvnitř hvězdy?

(max. 20 bodů)

Většinu hvězd tvoří oblaka horkého ionizovaného plynu, které vyzařují světlo i po miliardy let díky *termonukleární fúzi*, která probíhá v jejich centrálních částech, konkrétně slučováním vodíku na helium. V této úloze se budete zabývat určitými aspekty tohoto procesu.

Hvězdu budeme považovat za kouli tvořenou z čistě ionizovaného vodíku (protony a elektrony mají ve hvězdě stejné zastoupení), který se přibližně chová jako ideální plyn. Z pohledu klasické fyziky k fúzi dvou jader vodíku (coby bodových objektů) dojde tehdy, pokud se jejich vzájemná vzdálenost zmenší na $d = 10^{-15}$ m. To je škála, na které silná interakce začne být dominantní, a odpudivá Coulombovská interakce už nemůže zabránit fúzi jader.

a) Za předpokladu, že se protony pohybují se střední kvadratickou rychlostí $v_{\mathrm{kvad,p}}$, odhadněte minimální teplotu T ideálního plynu, aby se jádra přiblížila na vzdálenost $d = 10^{-15}$ m. Vyjděte ze zákona zachování energie, navíc můžete ignorovat brzdné záření spojené s přibližováním částic k sobě.

Na počátku se částice pohybují každá s rychlostí $v_{\mathrm{kvad,p}}$, přitom předpokládáme, že jsou od sebe dostatečně daleko na to, aby se dala jejich vzájemná potenciální energie ignorovat: máme tedy celkovou energii

$$E_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_{\mathrm{kvad,p}}^2 \,.$$

Protony se mají k sobě dostat na vzdálenost d, přitom budou na počátku oba v klidu (to plyne z toho, že hledáme nejmenší teplotu). V takové situaci bude celková energie rovna

$$E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \,.$$

Budeme předpokládat, že se veškerá počáteční kinetická energie přeměnila na potenciální (tedy $E_0 = E$), potom dostaneme

$$2 \cdot \frac{1}{2} m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{kvad,p}}^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} \,.$$

Zároveň pro ideální plyn tvořený z jednoduchých částic (žádné jiné stupně volnosti pohybu než translace nejsou přítomny) platí podle ekvipartičního teorému rovnost

$$\frac{1}{2} m_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{kvad,p}}^2 = \frac{3}{2} kT.$$

Odtud dostáváme

$$T = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 k d} = 5{,}6 \cdot 10^9 \ \mathrm{K} \,,$$

kde jsme za konstanty dosadili hodnoty $q = 1{,}602 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}$, $\epsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$, $k = 1,381 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}}$. Celkový výsledek jsme pak uvedli jen na dvě platné cifry, protože se jedná pouze o odhad skutečné hodnoty (nejrelevantnější je pro nás řád).

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Předchozí výpočet teploty byl proveden na základě úvah klasické fyziky (tj. kvantový aspekt částic nebyl vzat v potaz). Abychom rozhodli, zda tento výpočet (ne)dává rozumný odhad teploty uvnitř hvězdy, potřebujeme spočítat tuto teplotu ještě jiným nezávislým způsobem.

K tomu využijeme podmínku hydrostatické rovnováhy hvězdy: hvězda jako masa ionizovaného plynu je v klidu a jejímu gravitačním smrštění zabraňuje gradient tlaku, který kompenzuje gravitační sílu kdekoliv uvnitř hvězdy. Klíčová pro nás bude rovnice hydrostatické rovnováhy

$$-\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2},$$

kde na levné straně stojí (mínus) gradient tlaku, na pravé gravitační síla. Interval s krajními body r a $r + \Delta r$ vymezuje tenkou kulovou slupku o tloušťce $\Delta r \ll R$ se středem uprostřed hvězdy, přitom R je poloměr hvězdy, $m(r)$ je hmotnost koule pod touto slupkou, $\rho(r)$ je hustota plynu ve slupce a $\Delta P = P_{\mathrm{out}} - P_{\mathrm{in}}$ je rozdíl v tlacích působících na vrstvu ze shora (odpovídající síla míří do centra hvězdy) a zdola (odpovídající síla míří ven od centra hvězdy). Nakonec G je gravitační konstanta.

b) Využijte rovnici hydrostatické rovnováhy k *řádovému odhadu* teploty ideálního plynu T ve středu hvězdy. Výsledek bude záviset pouze na hmotnosti a poloměru hvězdy a fyzikálních konstantách. Očekává se, že najdete obecný výraz, nikoliv číselnou hodnotu. Ignorujte složitou strukturu hvězdy.

K získání řádového odhadu teploty bude stačit předpokládat, že jedna vrstva je rovna poloměru hvězdy, tedy $\Delta r = R$. Pokud je tlak uvnitř hvězdy P a hustota ρ, bude v této aproximaci platit $\Delta P = -P$, $\rho(r) \approx \rho$, navíc $m(r) = M$. Z rovnice hydrostatické rovnováhy tak dostaneme

$$P = \frac{GM\rho}{R}\,.$$

Je dobře známo, že tlak, hustota a střední kvadratická rychlost ideálního plynu spolu souvisí skrze vztah

$$P = \frac{1}{3}\rho v_{\mathrm{kvad}}^2\,.$$

Protože platí, že

$$v_{\mathrm{kvad}}^2 = \frac{3kT}{m}\,,$$

dostáváme pro tlak

$$P = \frac{kT\rho}{m} = nkT\,,$$

kde n je počet částic o hmotnosti m v jednotce objemu. Všimněme si, že tlak tak nezávisí na druhu částic, jen na jejich množství v jednotce objemu a jejich teplotě. Ve hvězdě máme dva druhy částic, protony a elektrony, a podílí se na tlaku stejnou měrou, neboť je jich ve hvězdě stejně. Máme tedy

$$P = P_{\mathrm{p}} + P_{\mathrm{e}} = 2P_{\mathrm{p}} = 2n_{\mathrm{p}}kT = 2\frac{\rho kT}{m_{\mathrm{p}}}\,,$$

přitom hustota Slunce je de facto určena pouze hustotou protonů, neboť elektrony mají významně menší hmotnost. Konečně můžeme spojit oba předchozí vztahy pro tlak dohromady. Dostáváme

$$2\frac{\rho kT}{m_{\mathrm{p}}} = \frac{GM\rho}{R}\,,$$

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

odkud plyne

$$T = \frac{GMm_\mathrm{p}}{2kR}\,.$$

c) S pomocí předchozího výsledku najděte poměr M/R pouze jako funkci teploty a fundamentálních konstant.

Snadno dostaneme

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT}{Gm_\mathrm{p}}\,.$$

d) V prvním bodě úlohy jste určili spodní hranici na hodnotu T z klasických úvah, což po dosazení do vztahu pro M/R dává v principu $(M/R)_\mathrm{min}$. Dosaďte do vztahu z předchozího bodu úlohy tuto teplotu a vyčíslete. Srovnejte číselně s $M_\mathrm{Slunce}/R_\mathrm{Slunce}$. Co tento výsledek znamená? Stručně komentujte.

Dosazením za teplotu a konstanty do předešlého výsledku dostáváme

$$\frac{M}{R} = \frac{2kT}{Gm_\mathrm{p}} = 1{,}4 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}\,,$$

což dává hodnotu $(M/R)_\mathrm{min}$. Přitom $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ a $m_\mathrm{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Dále spočítáme poměr pro známé hodnoty hmotnosti $M_\mathrm{Slunce} = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R_\mathrm{Slunce} = 6{,}963 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$ Slunce. Dostaneme

$$\frac{M_\mathrm{Slunce}}{R_\mathrm{Slunce}} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg \cdot m^{-1}}\,.$$

Dostali jsme se tedy k výsledku, že

$$M_\mathrm{Slunce}/R_\mathrm{Slunce} \ll (M/R)_\mathrm{min}\,.$$

Toto je zjevně problém a svědčí to o tom, že teplota, kterou jsme spočítali v prvním bodě úlohy, tedy $T = 5{,}6 \cdot 10^{9}\,\mathrm{K}$, je (minimálně) o tři řády větší než by měla být. Musíme se proto smířit s tím, že klasický popis je nevyhovující a je potřeba zohlednit kvantovou povahu mikrosvěta. Jak dále uvidíme, klíčovou roli bude hrát vlnový charakter částic.

Teď se myšlenkově vrátíme k prvnímu bodu zadání. Pokusíme se odhadnout minimální teplotu pro běh termonukleární reakce uvnitř hvězdy za uvážení vlnové povahy částic (čistě kvantově mechanický efekt).

Označme de Broglieho vlnovou délku částice o rychlosti $v_\mathrm{kvad,p}$ jako λ_p. Pak vězte, že vzdálenost, na kterou se částice musí k sobě dostat, aby mohla nastat fúze, už nebude $10^{-15}\,\mathrm{m}$ (jak jsme uvažovali v čistě klasickém výpočtu), ale $d = \lambda_\mathrm{p}/\sqrt{2}$ – poté nastává kvantové tunelování. Tedy vzdálenost, na kterou se mají částice k sobě přiblížit, je až na číselný faktor rovna de Broglieho vlnového délce, kterou částice měly při rychlosti $v_\mathrm{kvad,p}$.

e) Určete obecný předpis pro teplotu T potřebnou k fúzi a najděte její číselnou hodnotu. Využijte opět zákona zachování energie.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Stále platí vztah

$$T = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 kd}\,,$$

kde jenom za d dosadíme

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{p}}{\sqrt{2}}\,,$$

kde λ_p je určena vztahem

$$\lambda_\mathrm{p} = \frac{h}{m_\mathrm{p} v_\mathrm{kvad,p}}\,.$$

Snadno pak dostaneme

$$T = \frac{q^4 m_\mathrm{p}}{24\pi^2\epsilon_0^2 kh^2}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $T = 9{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{K}$.

f) Proveďte analogický výpočet tomu v úloze d), tzn. určete obecně poměr M/R a pak ho vyčíslete. Je výsledek shodný s tím, co jsme dostali, když jsme přemýšleli klasicky? Stručně komentujte.

Dosadíme do vztahu pro M/R z d) a najdeme

$$\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 G\epsilon_0^2 h^2}\,.$$

Číselně pak máme

$$\frac{M}{R} = 2{,}4 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}\,.$$

Tento číselný výsledek se dobře shoduje s tím, co jsme našli pro Slunce

$$\frac{M_\mathrm{Slunce}}{R_\mathrm{Slunce}} = 2{,}9 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}\,.$$

Kvantová úvaha tak vede na lepší výsledek než jsme dostali na začátku, kdy jsme přemýšleli klasicky. Tehdy jsme předpokládali, že silná interakce musí převážit Coulombovskou interakci a nebrali jsme v potaz kvantové tunelování.

V předchozím kroku jste přišli na to, že M/R lze vyjádřit pouze pomocí fundamentálních konstant. Alespoň to platí pro hvězdy spalující vodík, například Slunce. Zdálo by se tak, že hmotnost hvězdy může být libovolná, dokud ve hvězdě probíhá termonukleární fúze. To není ale úplně pravda, jak se dále přesvědčíte.

Aby bylo možné hvězdu považovat za ideální plyn, musí být střední vzdálenost mezi částicemi, které ji tvoří, větší než jejich de Broglieho vlnová délka.

g) Ukažte, že elektrony s $v_\mathrm{kvad,e}$ mají větší de Broglieho vlnovou délku než protony s $v_\mathrm{kvad,p}$.

Pro ideální plyn tvořený z částic o hmotnosti m snadno nalezneme

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3kTm}}\,.$$

Protože elektrony mají 1836krát menší hmotnost než protony, budou mít cca 43krát větší vlnovou délku.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Střední vzdálenost mezi elektrony d_e musí být větší než je jejich de Broglieho vlnová délka λ_e, konkrétně uvažujte $d_\mathrm{e} \geq \lambda_\mathrm{e}/\sqrt{2}$. Pokud by toto mělo být porušeno, byl by plyn elektronů degenerovaný a ten má jiné vlastnosti než má plyn ideální, který jsme předpokládali.

h) Použijte tuto informaci, abyste odvodili minimální hmotnost a minimální poloměr hvězdy, aby elektrony bylo možné stále považovat za ideální. Výsledky uveďte v násobcích poloměru a hmotnosti Slunce.

Má platit

$$d_\mathrm{e} \geq \frac{\lambda_\mathrm{e}}{\sqrt{2}} .$$

Nejprve odvodíme vztah pro d_e. Dostáváme

$$d_\mathrm{e} = \left(\frac{3M}{4\pi R^3 m_\mathrm{p}}\right)^{-1/3} .$$

Dále připojíme vztahy, které jsme už dříve odvodili, nebo je snadno z již odvozených vztahů dostaneme:

$$T = \frac{q^4 m_\mathrm{p}}{24\pi^2\epsilon_0^2 k h^2} , \qquad \frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 G\epsilon_0^2 h^2} , \qquad \lambda_\mathrm{e} = \sqrt{8}\pi\frac{\epsilon_0 h^2}{q^2\sqrt{m_\mathrm{e} m_\mathrm{p}}} .$$

Kombinací posledních čtyř vztahů lze odvodit

$$R \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\epsilon_0^{1/2} h^2}{q m_\mathrm{e}^{3/4} m_\mathrm{p}^{5/4} G^{1/2}} .$$

Číselně dostaneme $R \geq 0{,}10 R_\mathrm{Slunce}$. Ze vztahu pro M/R dostaneme

$$M \geq \frac{1}{12\sqrt{2}\pi^2}\frac{q^3}{\epsilon_0^{3/2} G^{3/2} m_\mathrm{e}^{3/4} m_\mathrm{p}^{5/4}} .$$

Číselně máme $M \geq 0{,}09 M_\mathrm{Slunce}$. Nejmenší a nejméně hmotná hvězda z uvažované třídy hvězd tedy má poloměr $R = 0{,}10 R_\mathrm{Slunce}$ a hmotnost $M = 0{,}09 M_\mathrm{Slunce}$.

D Rozbřesk a soumrak: sféry a kuropění

(max. 30 bodů)

V této úloze se pokusíte určit vaši zeměpisnou šířku pozorováním východů a západů Slunce. Nejprve určíte svou zeměpisnou šířku z délky trvání bílého dne a následně ji určíte z délky trvání západu Slunce.

a) Změřte čas východu Slunce t_1 a západu Slunce t_2 v jeden den. Nezapomeňte si poznamenat a ve vašem řešení uvést místa, odkud proběhla měření a datum pozorování. Určte délku bílého dne Δ v hodinách. K řešení přiložte fotku sebe při pozorování, například selfie se západem Slunce. Nezapomeňte užít adekvátní ochrany očí!

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

b) Odvoďte vztah pro trvání bílého dne Δt, tj. čas který Slunce stráví nad obzorem, v závislosti na deklinaci Slunce δ a zeměpisné šířce pozorovatele ϕ. V tomto okamžiku neuvažujte úhlový rozměr Slunce na obloze. Nakonec vyjádřete zeměpisnou šířku jako funkci délky bílého dne a deklinace Slunce.

Nápověda: užijte tzv. nautického sférického trojúhelníku, ve kterém uvažujte nulovou výšku nad obzorem.

Nechť φ je zeměpisná šířka, δ deklinace Slunce, h výška Slunce nad obzorem a t jeho hodinový úhel. Užitím kosinové věty ve sférickém trojúhelníku na stranu spojující zenit a Slunce na obzoru, dostáváme

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos\left(t\right) ,$$

a tedy

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t\,.$$

Dále si vyjádříme hodinový úhel při východu, resp. západu Slunce

$$\cos t = -\tan\phi \tan\delta\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že délka bílého dne je $\Delta = 2t$. Vyjádříme tedy

$$\Delta = 2 \arccos\left(-\tan\phi \tan\delta\right)\,.$$

Konečně vyjádříme do tvaru, který nám bude užitečný v následující části

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\cos t}{\tan\delta}\right).$$

c) Z délky bílého dne, kterou jste naměřili v části a), určete zeměpisnou šířku místa pozorování, pomocí výsledků z části b). Nezapomeňte uvést odhad nejistoty. Deklinaci Slunce v den měření si můžete najít.

d) Změřte délku trvání jednoho západu Slunce, tedy čas mezi okamžikem kontaktu horního a dolního limbu s obzorem. Uveďte místo pozorování a fotografii.

.

e) Odvoďte vztah pro rozdíl času mezi horním a dolním kontaktem Slunce.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Podobně jako v části b) můžeme vyjádřit hodinový úhel horního kontaktu t_h

$$\cos t_\mathrm{h} = \frac{\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

a dolního kontaktu

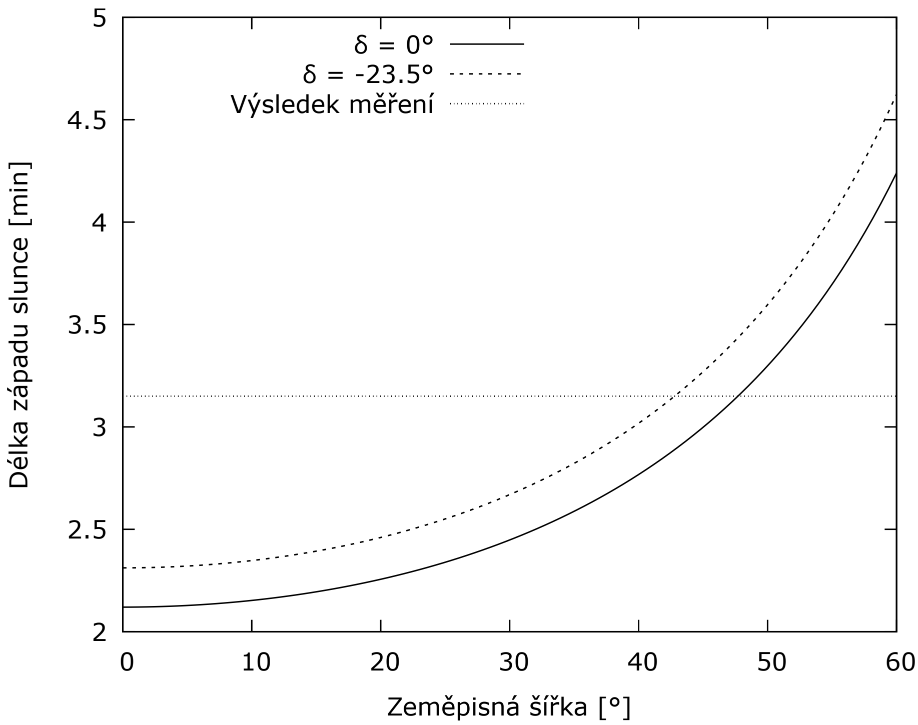
$$\cos t_\mathrm{d} = \frac{-\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\,.$$

Rozdíl času mezi dolním a horním kontaktem pak bude

$$\tau = \left(\arccos\frac{-\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} - \arccos\frac{\sin\rho - \sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\right)\frac{12\,\mathrm{h}}{\pi}\,.$$

f) Určete zeměpisnou šířku pozorovatele dosazením měřené délky západu do teoretického vztahu. Výslednou rovnici řešte graficky, například pomocí Desmos nebo Geogebra. Nezapomeňte na odhad nejistoty měření.

Nakreslíme si graf závislosti τ na φ společně s konstantní funkcí výsledku měření. Průsečík křivek bude řešení.



g) Diskutujte vliv atmosférické refrakce a reálného horizontu, porovnejte výsledek získaný z délky dne s výsledkem určeným pomocí délky západu. Zamyslete se nad tím, co jsou podstatné zdroje nejistot měření a zkuste navrhnout, jak by šlo experiment vylepšit za účelem zmenšení nejistot.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Refrakce prodlužuje den, tudíž v první části vlivem zanedbání dostaneme o trochu vyšší zeměpisnou šířku. Reálný horizont je ale výš než $h = 0°$, což naopak zkracuje délku dne a snižuje výslednou zeměpisnou šířku. V druhé části by k příliš výrazné chybě dojít nemělo. Refrakce délku západu Slunce trochu prodlužuje, zatímco reálný horizont jde zase proti. Pokud by ale vliv vyššího horizontu byl větší než vliv refrakce, došlo by také k prodloužení délky západu. Porovnání výsledků a diskuze chyb .