# Krajské kolo 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

**Krajské kolo je nutné odevzdat pomocí online formuláře do 12:00 SEČ 17. 3. 2023!**

## A Přehledový test (online)

*(max. 30 bodů)*

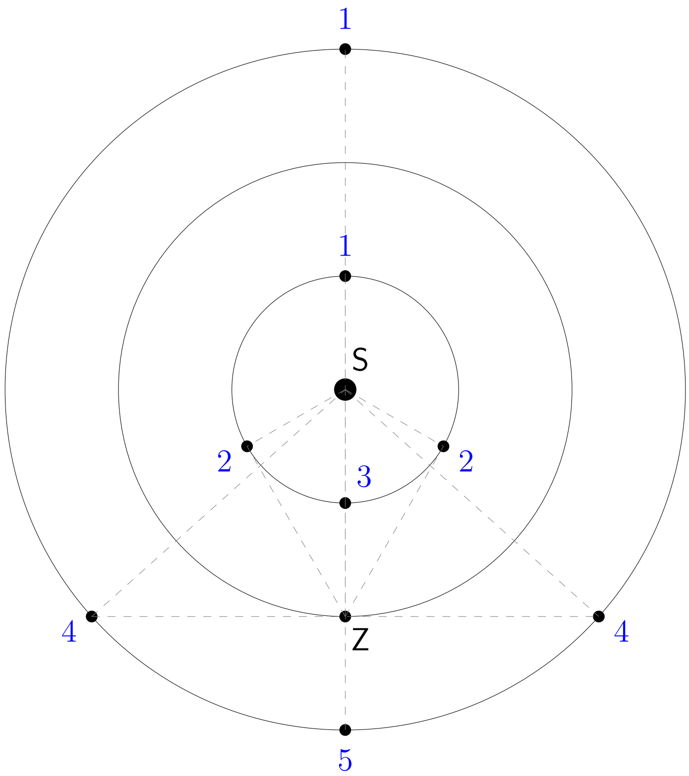
**POKYNY:** U každé otázky vyber **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

## B Aspekty planet

*(max. 15 bodů)*

Aspekt planety označuje nějakou její význačnou polohu vzhledem ke Slunci a Zemi.

**a)** Do obrázku 1 přiřaď k číslům 1 až 5 následující aspekty: opozice, horní konjunkce, dolní konjunkce, elongace, kvadratura. Písmena S a Z v obrázku označují po řadě Slunce a Zemi.




**Obrázek 1:** Aspekty planet.

1 – horní konjunkce, 2 – elongace, 3 – dolní konjunkce, 4 – kvadratura, 5 – opozice

**b)** U následujících otázek zakroužkuj správnou odpověď.

i. Může se vnější planeta, např. Jupiter, někdy nacházet v konjunkci (ať už horní či dolní) se Sluncem při pozorování ze Země?

# Krajské kolo 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

ano – ne

ii. Může se vnitřní planeta, např. Venuše, nacházet v opozici se Sluncem při pozorování ze Země?

ano – ne

K popisu oběhu planet kolem Slunce využijeme veličinu zvanou úhlová rychlost, kterou budeme označovat písmenem $\omega$. Vyjadřuje, jakou úhlovou vzdálenost těleso urazí na oběžné dráze za určitý časový úsek. Vezmeme-li jako tento časový úsek oběžnou dobu $T$ tělesa, zjevně vykoná jeden celý oběh, tedy 360°. Úhlovou rychlost můžeme tedy spočítat jako $\omega = \frac{360°}{T}$. V celé úloze budeme uvažovat, že Země i Mars obíhají kolem Slunce po kruhových drahách konstantní úhlovou rychlostí.

Při pozorování Marsu ze Země uplynulo mezi jeho dvěma po sobě jdoucími opozicemi $T_{\mathrm{syn}} = 780\,\mathrm{d}$. Tento čas se označuje jako synodická oběžná doba a jedná se o dobu, která uplyne mezi dvěma stejnými postaveními planety vůči Slunci na obloze. Obě planety obíhají kolem Slunce stejným směrem, jedna druhou jakoby dohání a jejich vzájemná úhlová rychlost, tedy synodická úhlová rychlost $\omega_{\mathrm{syn}}$, je proto menší než tzv. siderická úhlová rychlost planety, která se vztahuje vůči vzdáleným hvězdám. Pro synodickou úhlovou rychlost tak můžeme psát $\omega_{\mathrm{syn}} = \omega_{\mathrm{Z,sid}} - \omega_{\mathrm{M,sid}}$, kde $\omega_{\mathrm{Z,sid}}$ a $\omega_{\mathrm{M,sid}}$ značí siderickou úhlovou rychlost Země resp. Marsu. Příslušné siderické oběžné doby pak budeme značit $T_{\mathrm{Z,sid}}$ a $T_{\mathrm{M,sid}}$.

**c)** Ze zadané synodické oběžné doby Marsu $T_{\mathrm{syn}} = 780\,\mathrm{d}$ vypočti jeho siderickou oběžnou dobu $T_{\mathrm{M,sid}}$. Výsledek uveď ve dnech s přesností na celé dny.

Do zadaného vztahu

$$\omega_{\mathrm{syn}} = \omega_{\mathrm{Z,sid}} - \omega_{\mathrm{M,sid}}$$

dosadíme za úhlové rychlosti $\omega = \frac{360°}{T}$. Dostáváme tedy

$$\frac{360°}{T_{\mathrm{syn}}} = \frac{360°}{T_{\mathrm{Z,sid}}} - \frac{360°}{T_{\mathrm{M,sid}}}\,,$$

odkud zkrácením 360° dostaneme vztah

$$\frac{1}{T_{\mathrm{syn}}} = \frac{1}{T_{\mathrm{Z,sid}}} - \frac{1}{T_{\mathrm{M,sid}}}\,.$$

Konečně můžeme vyjádřit

$$T_{\mathrm{M,sid}} = \frac{T_{\mathrm{Z,sid}} T_{\mathrm{syn}}}{T_{\mathrm{syn}} - T_{\mathrm{Z,sid}}}\,.$$

Číselně dostáváme $T_{\mathrm{M,sid}} \doteq 687\,\mathrm{d}$.

**d)** S využitím výsledku předchozí části vypočti ze 3. Keplerova zákona velkou poloosu $a_{\mathrm{M}}$ (tedy pro kruhovou dráhu poloměr) dráhy Marsu. Výsledek uveď v astronomických jednotkách s přesností na dvě desetinná místa; poloměr / velká poloosa dráhy Země je $a_{\mathrm{Z}} = 1$ au.

Ze 3. Keplerova zákona můžeme psát

$$\left(\frac{T_{\mathrm{M,sid}}}{T_{\mathrm{Z,sid}}}\right)^2 = \left(\frac{a_{\mathrm{M}}}{a_{\mathrm{Z}}}\right)^3 .$$

Odtud tedy lze vyjádřit

$$a_{\mathrm{M}} = a_{\mathrm{Z}} \left(\frac{T_{\mathrm{M,sid}}}{T_{\mathrm{Z,sid}}}\right)^{\frac{2}{3}} .$$

Číselně $a_{\mathrm{M}} \doteq 1{,}52\,\mathrm{au}$.

## C Dvojhvězda $\beta$ Aur

*(max. 30 bodů)*

V této úloze se budeme zabývat objekty, kterým říkáme *spektroskopické dvojhvězdy*. Jedná se o hvězdné soustavy obsahující dvě hvězdy, které jsme ale zpravidla schopni rozlišit pouze na základě pozorování kombinovaného spektra záření, které k nám od systému přichází.

Jak jsme se již dozvěděli ve školním kole, v důsledku tzv. *Dopplerova jevu* se pozorovaná vlnová délka záření, které k nám přichází od pohybujících se objektů, mění v závislosti na vzájemné rychlosti pozorovatele (nás) a zářícího objektu. Jelikož jednotlivé hvězdy v rámci dvojhvězdného systému obíhají kolem barycentra, projeví se tento pohyb na změnách polohy čar v kombinovaném spektru obou složek, které pozorujeme.

Na obrázku 2 níže vidíme časovou posloupnost spekter dvojhvězdy $\beta$ Aur. Zachycena je konkrétně oblast spektra kolem čáry H$\alpha$, jejíž laboratorní vlnová délka je rovna $\lambda_{\mathrm{lab}} = 656{,}281\,\mathrm{nm}$. Spektra byla pořízena přístrojem Lhires III. Tento systém je zároveň zákrytovou proměnnou hvězdou, jejíž světelnou křivku, pořízenou družicí WIRE, vidíme na obrázku 3. V obou případech je časová závislost nahrazena závislostí na tzv. *fázi* oběhu: jedná se o číselnou hodnotu, která se v rámci jedné oběžné periody rovnoměrně mění od 0 do 1 a kde hodnoty 0 a 1 odpovídají okamžikům primárního minima. Z obou druhů měření plyne hodnota oběžné periody dvojhvězdy $P = 3{,}960\,\mathrm{d}$.

V následujících úkolech budeme předpokládat, že hvězdy rovnoměrně obíhají kolem barycentra po kruhových drahách a že směr k pozorovateli leží v rovině oběhu složek (v systému dochází k zákrytům).

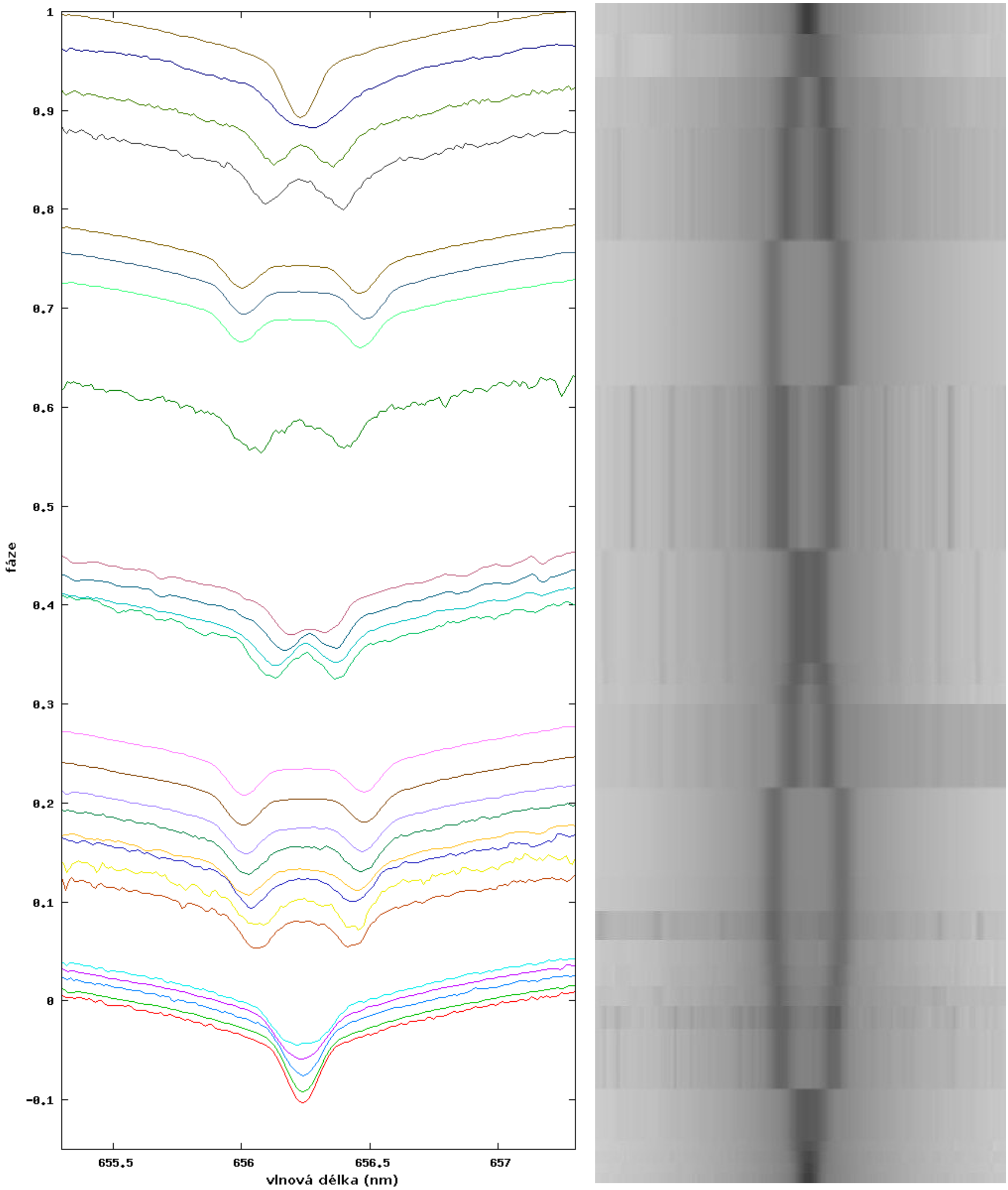
**a)** Urči střední hodnotu $\lambda_0$ vlnové délky, kolem které oba obrazy spektrální čáry H$\alpha$ v čase oscilují. Výsledek uveď v nm s přesností na dvě desetinná místa.

Z obrázku 2 si můžeme všimnout, že spektrální čára se rozdvojuje symetricky kolem jisté střední hodnoty $\lambda_0$. Tu můžeme určit buď jako vlnovou délku čáry v okamžiku odpovídajícím fázi 0 nebo 1, nebo jako aritmetický průměr vlnových délek obrazů rozdvojené čáry v libovolný okamžik. Z měření minim spektrální hustoty na obrázku 2 pak dostaneme hodnotu

$$\lambda_0 \doteq 656{,}24\,\mathrm{nm} .$$

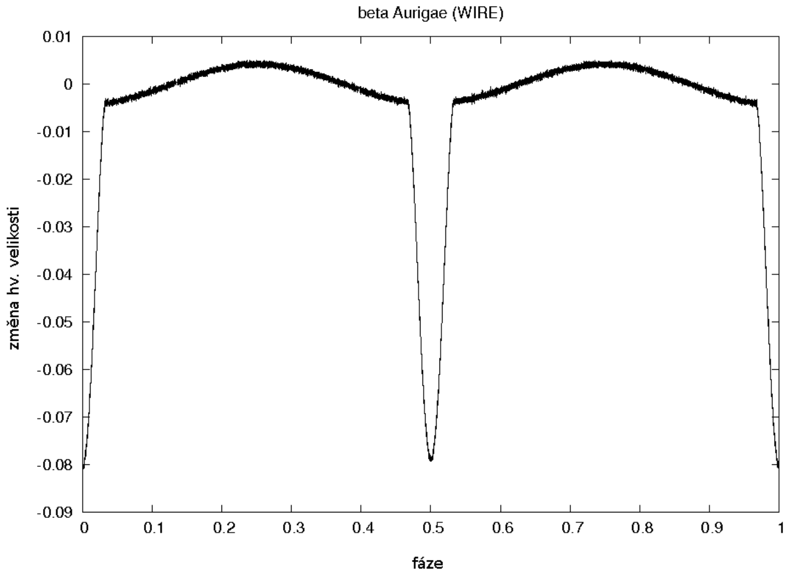
**b)** Rozhodni, zda se barycentrum systému od pozorovatele vzdaluje, nebo se k němu přibližuje.

## Krajské kolo 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení




(a) (b)

**Obrázek 2:** Časová posloupnost spekter naměřených pro systém $\beta$ Aur. Na obrázku (a) jsou spektra znázorněna pomocí závislosti intenzity záření na vlnové délce (vodorovná osa). Na svislé ose je vynesena fáze oběhu dvojhvězdy, ve které bylo dané spektrum pořízeno. Na obrázku (b) vidíme odpovídající snímky spekter.




**Obrázek 3:** Závislost změn hvězdné velikosti na fázi oběhu dvojhvězdy $\beta$ Aur.

Vidíme, že $\lambda_0 < \lambda_{\text{lab}}$. Ve spektru tedy dochází k modrému posuvu, což znamená, že se systém k pozorovateli přibližuje.

**c)** Urči velikost $v_{\text{r}}$ rychlosti vzdalování, resp. přibližování systému k pozorovateli. Výsledek uveď v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ s přesností na dvě platné číslice.

Z Dopplerovského vztahu dostaneme

$$v_{\text{r}} = \frac{\lambda_{\text{lab}} - \lambda_0}{\lambda_{\text{lab}}}\, c \doteq 19\,\text{km} \cdot \text{s}^{-1}\,.$$

**d)** Urči maximální velikost $\Delta\lambda$ odchylky polohy obrazů spektrální čáry od střední polohy $\lambda_0$. Výsledek uveď v nm s přesností na dvě desetinná místa.

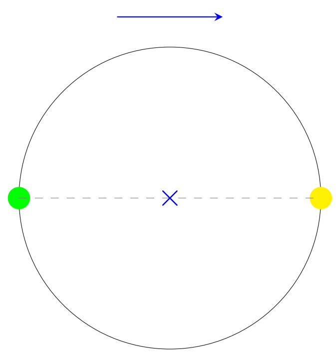
Z obrázku 2 vidíme, že k maximálnímu rozštěpení dochází v okolí hodnot fáze 0,25 a 0,75. Hodnotu $\Delta\lambda$ pak určíme tak, že ze spektra odečteme hodnoty vlnových délek obou obrazů spektrální čáry pro tyto okamžiky a vezmeme polovinu jejich rozdílu. Dostaneme pak

$$\Delta\lambda \doteq 0{,}24\,\text{nm}\,.$$

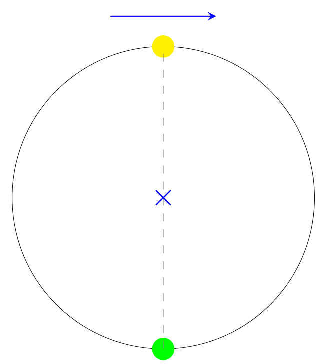
**e)** Proveď schematické nákresy zachycující dvojhvězdný systém v okamžicích odpovídajících fázím 0, 0,25, 0,5 a 0,75 při pohledu kolmo na rovinu oběhu. Do každého z nákresů vyznač směr k pozorovateli, polohy obou hvězd v daném okamžiku, polohu barycentra systému a průvodiče obou složek. Co můžeš říct o poměru hmotností obou složek?

Z obrázku 2 vidíme, že obrazy spektrální čáry se v čase rozštěpují symetricky na obě strany od střední polohy. Na základě Dopplerova jevu tedy můžeme říct, že složky rychlostí obou hvězd ve směru pozorovatele jsou v každý okamžik stejně velké, ale míří opačným směrem. Ze zadání rovněž víme, že hvězdy mají obíhat rovnoměrně po kruhových drahách se společným středem, který musí v každý okamžik ležet na spojnici obou hvězd. Zkombinováním těchto informací dostaneme, že oběžné rychlosti a poloměry kruhových drah obou hvězd musí být stejné. Odpovídající schematické nákresy vidíme na obrázku 4.

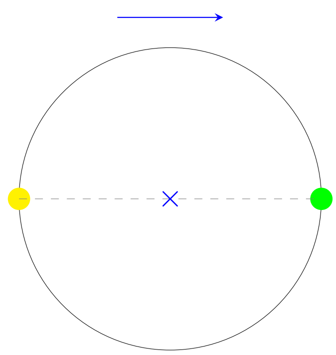
Jelikož společný střed obou kruhových drah musí souhlasit s barycentrem systému, ten se tudíž nachází vždy přesně uprostřed spojnice obou hvězd. Hvězdy tedy musí mít stejnou hmotnost.



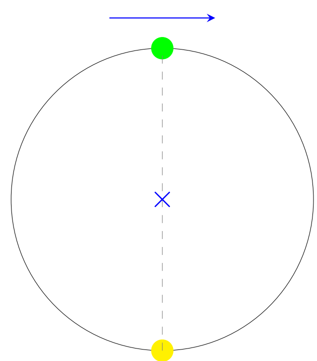
**(a)** Fáze 0.



**(b)** Fáze 0,25.



**(c)** Fáze 0,5.



**(d)** Fáze 0,75.

**Obrázek 4:** Schematické nákresy zachycující dvojhvězdný systém v okamžicích odpovídajících jednotlivým fázím. Šipka označuje směr k pozorovateli, barycentrum je vyznačeno křížkem.

**f)** Vypočti maximální velikost $v_\mathrm{m}$ složek rychlostí jednotlivých hvězd směrem k pozorovateli. Výsledek udej v $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$ s přesností na tři platné číslice.

Maximální velikost složky rychlosti jednotlivých hvězd vzhledem k pozorovateli odpovídá okamžiku maximálního rozštěpení obrazu čar. Označme jako $\lambda_+$ a $\lambda_-$ hodnoty vlnové délky obou obrazů spektrální čáry v tento okamžik (kde $\lambda_+ > \lambda_-$). Potom platí

$$v_\mathrm{r} + v_\mathrm{m} = \frac{\lambda_\mathrm{lab} - \lambda_-}{\lambda_\mathrm{lab}}\,c\,,$$
$$v_\mathrm{r} - v_\mathrm{m} = \frac{\lambda_\mathrm{lab} - \lambda_+}{\lambda_\mathrm{lab}}\,c\,.$$

Odečtením rovnic pak dostaneme

$$v_\mathrm{m} = \frac{\lambda_+ - \lambda_-}{2\lambda_\mathrm{lab}}\,c = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\mathrm{lab}}\,c\,.$$

Číselně máme $v_\mathrm{m} \doteq 110\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

**g)** Urči velikost $v_\mathrm{o}$ oběžných rychlostí obou složek.

Je zřejmé, že za předpokladu, že směr k pozorovateli leží v rovině oběhu systému, platí

$$v_\mathrm{o} = v_\mathrm{m}\,.$$

**h)** Urči poloměr $r$ oběžných drah hvězd kolem barycentra. Výsledek uveď číselně v au s přesností na dvě desetinná místa.

Za dobu odpovídající jedné oběžné periodě urazí každá z hvězd dráhu $v_\mathrm{o}P$. Ta odpovídá obvodu kruhové oběžné dráhy $2\pi r$. Dostáváme tedy

$$r = \frac{v_\mathrm{o}P}{2\pi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_\mathrm{lab}}\frac{cP}{2\pi} \doteq 0{,}04\,\mathrm{au}\,.$$

**i)** Urči velikost $a_\mathrm{d}$ dostředivého zrychlení působícího na jednotlivé hvězdy v systému. Výsledek vyjádři obecně pomocí $v_\mathrm{o}$ a $r$.

Dostáváme

$$a_\mathrm{d} = \frac{v_\mathrm{o}^2}{r}\,.$$

Z 2. Newtonova zákona víme, že dostředivé zrychlení např. první z hvězd musí být rovno gravitační síle na jednotku hmotnosti (první hvězdy), kterou na ni působí druhá hvězda.

**j)** Urči hmotnost $M$ každé z hvězd jako násobek hmotnosti Slunce. Výsledek uveď číselně s přesností na dvě platné číslice.

Jelikož z předchozího víme, že obě hvězdy musí mít stejnou hmotnost, dostáváme

$$\frac{v_\mathrm{o}^2}{r} = a_\mathrm{d} = \frac{GM}{(2r)^2}\,.$$

Odtud získáme

$$M = \frac{4v_\mathrm{o}^2 r}{G} = \frac{2v_\mathrm{o}^3 P}{\pi G} = \frac{2c^3 P}{\pi G}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\mathrm{lab}}\right)^3 \doteq 2{,}2M_\odot\,.$$

**Krajské kolo 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení**

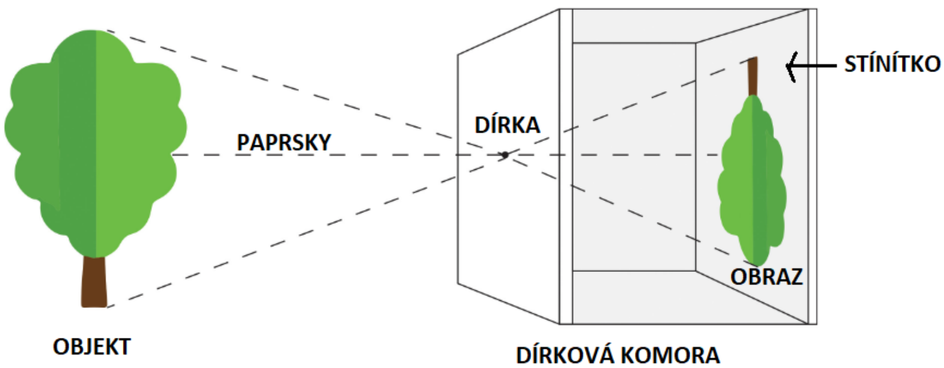
# D Dírková komora

*(max. 25 bodů)*

**POKYNY:** Doporučujeme pozorování neodkládat na poslední chvíli před uzávěrkou (hlavně kvůli počasí). U problémů s řešením oznámených po začátku března bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. **Řešení (nebo alespoň snaha o řešení) pozorovací úlohy je nutnou podmínkou pro postup do finále Astronomické olympiády. Všechny potřebné výpočty zapiš, pouhý správný výsledek bez postupu neuznáváme!**

Cílem této úlohy bude sestavení zařízení zvaného dírková komora a jeho využití k změření úhlového průměru Slunce.

V podstatě se jedná o krabici s malou dírkou v jedné stěně. Světlo z objektu vně krabice, které touto dírkou projde, vytvoří na protější stěně krabice obraz objektu. Toho v minulosti využívali například malíři, kteří pak vzniklý obraz mohli jednoduše obkreslit. Dírková komora tak byla jistým předchůdcem fotoaparátu. Schéma dírkové komory ukazuje obrázek 5.




**Obrázek 5:** Schéma dírkové komory.

### a) Sestav si vlastní dírkovou komoru.

Budeš k tomu potřebovat dlouhou rovnou rouru, jejíž délka by měla být alespoň 80 cm a průměr alespoň 4 cm. Materiál roury musí být takový, aby do něj bylo možno poblíž jednoho konce udělat otvor.

Ten by měl být tak velký, aby skrz něj bylo možné zevnitř vidět většinu koncového otvoru roury. Tento konec roury zaslep kusem milimetrového papíru tak, aby skrz udělaný otvor byla vidět jeho strana potištěná čtvercovou sítí. Rovina milimetrového papíru by měla být kolmá na osu roury.

Dále ustřihni dostatečně velký kousek alobalové folie a upevni ho na druhý (otevřený) konec roury tak, aby rovina folie byla kolmá na osu roury (tedy totéž, co platilo pro rovinu milimetrového papíru). Je důležité napnout fólii tak, aby byla rovná a hladká. Přesně do středu folie udělej co nejmenší dírku. Vhodné je použít tenkou jehlu. Dírka by měla být pokud možno kruhová s co nejčistšími okraji.

**Hotovou dírkovou komoru vyfotografuj a fotografii nezapomeň přiložit k řešení.**

# Krajské kolo 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

**b) Pozoruj dírkovou komorou obraz Slunce.**

Dírková komora je nyní připravena k pozorování. Do Slunce se NEDÍVEJ přímo, pouze sleduj jeho obraz na milimetrovém papíře otvorem vystřiženým v rouře.

Nejlepší je stát ke Slunci zády s dírkovou komorou přes rameno, a to tak, že konec s milimetrovým papírem máme před sebou, zatímco konec s dírkou je za naším ramenem přibližně směrem ke Slunci. Pro přesnější namíření sleduj stín roury na zemi před sebou. Aby byla dírka natočena přímo ke Slunci, měl by být co nejmenší. Jakmile se ti povede komoru správně nasměrovat, měl bys vidět na milimetrovém papíře malý světlý kotouček. Natáčej komoru, dokud obraz nebude vycentrovaný na střed papíru.

Až obraz Slunce najdeš, zkus změřit jeho velikost tak, že spočítáš počet čar na milimetrovém papíře, které obraz Slunce překrývá. Zajímá nás průměr obrazu, tedy počet čar od okraje kotoučku k jeho protějšímu okraji. Pro větší přesnost proveď měření alespoň třikrát a průměr obrazu Slunce vypočti jako aritmetický průměr jednotlivých naměřených hodnot.

**c) Urči úhlový průměr Slunce.**

Pro určení úhlového průměru Slunce budeš kromě již změřené velikosti jeho obrazu potřebovat znát délku roury, tedy vzdálenost od dírky po střed stínítka. Označíme-li tuto vzdálenost $d$ a průměr obrazu Slunce $D$, můžeme úhlový průměr $\delta$ Slunce na obloze v radiánech vypočítat ze vztahu

$$\delta = \frac{D}{d}\,.$$

Vypočti úhlový průměr Slunce na obloze v úhlových minutách.

**d) Urči fyzický průměr Slunce.**

Z vypočteného úhlového průměru Slunce $\delta$ a známé vzdálenosti $a$ Země–Slunce lze vypočítat fyzický průměr Slunce $D_\odot$. Platí

$$D_\odot = \delta a\,.$$

Stejně jako v předchozí části dosazujeme $\delta$ v radiánech. Vypočti fyzický průměr Slunce a výsledek uveď jako násobek průměru Země. Můžeš předpokládat, že vzdálenost Země od Slunce je známa.