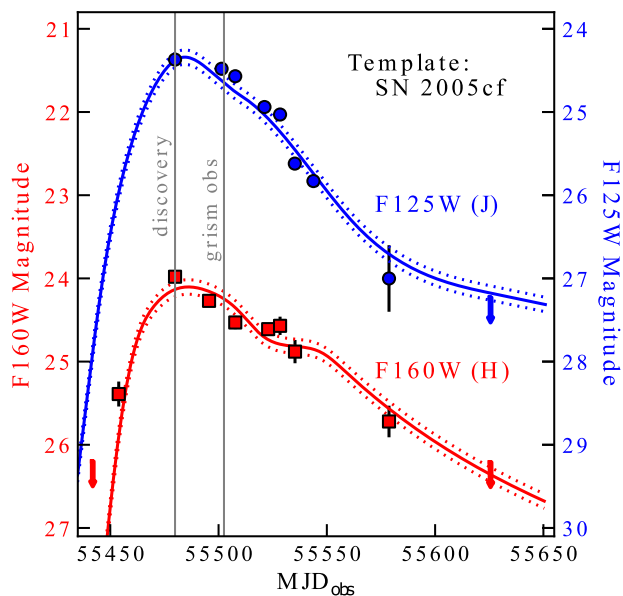


Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Krátké úlohy

A SN Primo

(max. 7 bodů)

Supernovy typu Ia se v astronomii používají jako takzvané „standardní svíčky“. To znamená, že jsme schopni velmi přesně určit, jaká je absolutní hvězdná velikost daného jevu. V této úloze se podíváme na jednu z nejvzdálenějších supernov tohoto typu, která byla pozorována na červeném posuvu $z = 1,55$. Světelnou křivku této supernovy přezdívané SN Primo můžete vidět na obrázku 1.



Obrázek 1: Světelné křivky supernovy SN Primo. Filtry F125W(J) a F160W(H) odpovídají filtrům V a R v klidové soustavě supernovy. Převzato z *Steven A. Rodney et al 2012 ApJ 746 5* (Upraveno).

U supernov typu Ia existuje silná korelace mezi absolutní hvězdnou velikostí M_{\max} v maximu a poklesem Δm_{15} pozorované hvězdné velikosti 15 dní po maximu v klidové soustavě supernovy.

a) Určete číselnou hodnotu parametru $\Delta m_{15}(V)$ pro SN Primo. [2,0 b]

Doba 15 dnů je z kosmologického hlediska zanedbatelná a můžeme tedy zanedbat jevy spojené s rozpínáním vesmíru během erupce. Délka intervalu tak bude roztažena během letu signálu od zdroje k pozorovateli o $1/a = 1 + z$ a parametr $\Delta m_{15}(V)$ tedy musíme změřit v čase

$$t'_{15} = (1 + z)t_{15} = 38,3 \text{ d}$$

po pozorovaném maximu. Jednoduchým označením maxima v grafu a odečtením požadovaného poklesu dostáváme

$$\Delta m_{15}(V) = 0,8 \text{ mag.}$$

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Z parametru $\Delta m_{15}(V)$ je teoreticky možné odvodit absolutní hvězdnou velikost maxima, ale v praxi se častěji používá pokles $\Delta m_{15}(B)$ ve filtru B . Z něj můžeme odvodit absolutní hvězdnou velikost ve filtru V pomocí vztahu [Folatelli et al. (2010)]

$$M_{\max}(V) = -19,12 + 0,95(\Delta m_{15}(B) - 1,1).$$

b) Vypočítejte řádově zářivý výkon supernovy ve viditelném spektru v maximu $L_{\max}(V)$ v jednotkách zářivého výkonu Slunce L_{\odot} . Pro SN Primo byla fitováním světelné křivky odvozena hodnota $\Delta m_{15}(B) = 1,05$ mag. [**2,0 b**]

Jednoduchým dosazením do vztahu ze zadání dostaneme absolutní hvězdnou velikost supernovy

$$M_{\max}(V) = -19,2 \text{ mag}.$$

Porovnáme zářivý výkon Slunce se zářivým výkonem supernovy pomocí Pogsonovy rovnice

$$M_{\max}(V) - M_{\text{bol},\odot} = -2,5 \log \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right),$$

po úpravě dostáváme

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0,4(M_{\text{bol},\odot} - M_{\max}(V))} \doteq 3,66 \cdot 10^9,$$

a tedy $L \approx 10^9 L_{\odot}$.

c) Spočítejte současnou vzdálenost d ke galaxii, v níž byla SN Primo pozorována. Výsledek uveďte číselně v Gpc. [**3,0 b**]

Z grafu vyčteme vizuální hvězdnou velikost supernovy v maximu

$$m_{\max}(V) = 24,3 \text{ mag}.$$

Pomocí Pogsonovy rovnice můžeme dále psát

$$M_{\max}(V) = m_{\max}(V) + 5 - 5 \log \frac{D_L}{\text{pc}},$$

kde D_L značí tzv. luminozitivní vzdálenost. Po úpravě pro ni dostáváme

$$D_L = 10^{0,2(m_{\max}(V) + 5 - M_{\max}(V))}.$$

Z D_L můžeme vyjádřit současnou vzdálenost pomocí červeného posuvu jako

$$d = \frac{D_L}{1+z} = \frac{10^{0,2(m_{\max}(V) + 5 - M_{\max}(V))}}{1+z}.$$

Číselně dostáváme

$$d = 1,85 \text{ Gpc}.$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

B Koronální hmotnost

(max. 8 bodů)

V této úloze bude vaším úkolem odhadnout hmotnost K korony, nejnvnitřnější a nejjasnější části sluneční atmosféry. Ta svítí bílým spojitým světlem, které vzniká Thomsonovým rozptylem záření z povrchu Slunce na volných, extrémně horkých elektronech. Například během úplného zatmění Slunce lze změřit, že zářivý výkon K korony je $L \approx 10^{-6} L_{\odot}$, kde L_{\odot} je zářivý výkon Slunce. Pro jednoduchost v této úloze uvažujte K koronu jako opticky i geometricky tenkou slupku plazmatu (elektronů a protonů) s poloměrem $R = 2R_{\odot}$, kde R_{\odot} je poloměr Slunce.

Elektrická složka záření z povrchu Slunce urychluje elektrony v koruně, které následně jako urychlené náboje vyzařují s průměrným výkonem

$$P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (1)$$

kde e je náboj elektronu, a průměrné zrychlení, ϵ_0 permitivita vakua a c rychlost světla ve vakuu. Dále se vám může hodit, že záření s průměrnou intenzitou elektrického pole E vytváří tok energie (hustotu zářivého toku)

$$\Phi = c\epsilon_0 E^2. \quad (2)$$

Spočítejte celkovou hmotnost K korony, tedy elektronů, které způsobují rozptyl, ale i protonů.

Zrychlení elektronu v elektrickém poli je

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{eE}{m_e},$$

kde m_e je hmotnost elektronu a F elektrická síla zodpovědná za zrychlení. Průměrnou velikost elektrické intenzity vyjádříme z rovnice (2) jako

$$E^2 = \frac{\Phi}{c\epsilon_0}.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme výkon jednoho elektronu

$$P = \frac{e^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m_e^2} = \frac{e^4 \Phi}{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}.$$

Hustotu zářivého toku Slunce určíme jako

$$\Phi = \frac{L_{\odot}}{4\pi(2R_{\odot})^2} = \frac{L_{\odot}}{16\pi R_{\odot}^2}.$$

Celkový výkon K korony je pak roven

$$L = NP = \frac{M}{m_p} P,$$

kde N je počet elektronů v K koruně, m_p hmotnost protonu a M celková hmotnost K korony, kterou vyjádříme jako

$$M = \frac{m_p L}{P} = m_p L \frac{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2}{e^4 \Phi} = \frac{6\pi\epsilon_0^2 c^4 m_e^2 m_p L \cdot 16\pi R_{\odot}^2}{e^4 L_{\odot}} = \frac{96\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 m_e^2 m_p R_{\odot}^2}{e^4} \frac{L}{L_{\odot}},$$

číselně tedy $M \doteq 6 \cdot 10^{14}$ kg.



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Závod s časem

(max. 10 bodů)

Primární kosmické záření (převážně protony) dopadá na horní vrstvy atmosféry Země, kde při srážkách s jádry atomů vznikají spršky sekundárních částic, mimo jiné piony, které se rychle rozpadají na miony. Tyto miony vznikají ve výškách přibližně 10 až 20 km nad zemským povrchem, pro zjednodušení ale předpokládejte, že všechny vznikají v jediné efektivní výšce $h_0 = 15$ km. Uvažujte, že se všechny miony pohybují kolmo k zemskému povrchu směrem dolů rychlostí $v = 0,998c$, kde c je rychlost světla ve vakuu, a jejich klidová doba života je $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$.

Určete, jaká část mionů dosáhne hladiny moře $h_1 = 0$ m, a odhadněte poměr toku mionů ve výšce $h_2 = 8849$ m Mount Everestu k toku na hladině moře. Předpokládejte, že zeslabení toku je způsobeno pouze radioaktivním rozpadem mionů.

Pokud bychom k situaci přistupovali klasicky, bez relativistických efektů, vyšlo by, že téměř žádné miony k hladině moře nedorazí. Doba letu mionu z výšky $h_0 = 15$ km by byla prostě

$$t = \frac{h_0}{v} = \frac{15\,000 \text{ m}}{0,998c} = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}.$$

Klidová doba života mionu je $\tau_0 = 2,2 \mu\text{s}$, takže podíl mionů $\frac{N}{N_0}$, které cestu přežijí, je podle klasické fyziky

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{t}{\tau_0}} = e^{-\frac{50}{2,2}} \doteq 1,3 \cdot 10^{-10}.$$

K hladině moře by tedy dorazil přibližně jeden mion z deseti miliard, tedy prakticky žádný!

Vzhledem k vysokým rychlostem mionů je ale nutné uvažovat relativistické efekty. Na situaci se lze dívat dvěma způsoby: z pohledu pozorovatele na Zemi nebo z pohledu letícího mionu.

Zkusme to nejdříve z pohledu pozorovatele na Zemi. Podle zákona rozpadu počet mionů N klesá exponenciálně s časem. V čase t zbývá z původního počtu N_0 mionů

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

kde τ je střední doba života mionu v soustavě spojené se Zemí, nikoliv klidová doba života τ_0 v jeho vlastní soustavě. Vzhledem k vysoké rychlosti mionů je tato doba života prodloužena podle relativistického vztahu pro dilataci času

$$\tau = \gamma \tau_0, \quad \text{kde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq 15,8$$

je Lorentzův gamma faktor. Z pohledu pozorovatele na Zemi můžeme nejprve určit časy letu mionů. Doba letu na hladinu moře je

$$t_1 = \frac{h_0 - h_1}{v}$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

a doba letu na vrchol Mount Everestu je

$$t_2 = \frac{h_0 - h_2}{v}.$$

Po uplynutí času t_1 zbývá $N(h_1)$ mionů

$$N(h_1) = N_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} = N_0 e^{-\frac{h_0 - h_1}{v\gamma\tau_0}} \doteq 0,24 N_0,$$

analogicky lze spočítat počet přeživších mionů $N(h_2)$ na vrcholu Mount Everestu. Poměr počtu přeživších mionů na vrcholu Mount Everestu a na hladině moře je

$$\frac{N(h_2)}{N(h_1)} = \frac{e^{-\frac{t_2}{\tau}}}{e^{-\frac{t_1}{\tau}}} = e^{\frac{t_1 - t_2}{\tau}} = e^{\frac{h_2 - h_1}{v\gamma\tau_0}} \doteq 2,3.$$

Ekvivalentně bychom mohli úlohu řešit z pohledu letícího mionu. V této soustavě je mion v klidu, takže jeho doba života je rovna klidové hodnotě τ_0 . Naproti tomu atmosféra a Země se pohybují vzhledem k mionu rychlostí v . Vzdálenost mezi místem vzniku mionu a zemským povrchem je proto v této soustavě zkrácena vlivem relativistické kontrakce délek. Zkrácená vzdálenost k hladině moře je

$$h'_1 = \frac{h_0 - h_1}{\gamma}$$

a analogicky bychom napsali vztah pro vzdálenost k vrcholu Mount Everestu h'_2 . Čas, za který Země urazí tyto vzdálenosti rychlostí v , je roven

$$t'_1 = \frac{h'_1}{v},$$

obdobně t'_2 . Po uplynutí času t'_1 zbývá z původního počtu N_0 mionů

$$N(h_1) = N_0 e^{-\frac{t'_1}{\tau_0}}.$$

Obdobný vztah píšeme i pro $N(h_2)$, pro jejich poměr tedy vyjde

$$\frac{N(h_2)}{N(h_1)} = e^{\frac{t'_1 - t'_2}{\tau_0}} = e^{\frac{h_2 - h_1}{v\gamma\tau_0}}.$$

Vidíme, že výsledné vztahy jsou stejné jako ty, co nám vyšly, když jsme úlohu řešili z pohledu pozorovatele na Zemi, číselné výsledky samozřejmě také.



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

D Ring of fire

(max. 10 bodů)

V této úloze se podíváme na úplné zatmění Měsíce z pohledu pozorovatele, který se nachází na povrchu Měsíce (poloměr $R_M = 1737$ km). Uvažujme jedno konkrétní zatmění, kdy se Měsíc nachází v perigeu své dráhy (ve vzdálenosti $r = 358\,800$ km od Země) přesně na ose zemského stínu, tedy na spojnici Slunce–Země. I když jsou v takovéto konfiguraci všechny přímé paprsky od Slunce k Měsíci (které by ho za normálních okolností osvětlovaly) geometricky blokovány Zemí, přesto lze Měsíc v úplné fázi zatmění ze Země pozorovat, a to díky ohybu slunečních paprsků v zemské atmosféře. Ve zbytku úlohy předpokládejme, že atmosférická refrakce u horizontu pro pozorovatele na povrchu Země při hladině moře činí $\rho = 35,4$ arcmin. Uvažujte, že poloměr Země je roven $R_Z = 6\,378$ km.

Astronomové změřili, že plošná hvězdná velikost měsíčního disku v oblastech kolem středu v úplné fázi daného zatmění dosahuje průměrné hodnoty $\mu = 16,1$ mag na jednu úhlovou vteřinu čtvereční povrchu disku. Předpokládejme, že hvězdná velikost měsíčního disku v úplňku v perigeu je rovna $m_u = -12,9$ mag a že jeho pozorovaná plošná jasnost je rovnoměrná. Uvažujme pozorovatele, který se nachází na povrchu Měsíce na spojnici Slunce–Země–Měsíc. Hvězdná velikost Slunce pro pozorovatele na Měsíci je $m_\odot = -26,7$ mag. Předpokládejme rovněž, že v době zatmění se Země nacházela ve vzdálenosti $a_Z = 1,496 \cdot 10^{11}$ m od Slunce (které má poloměr $R_\odot = 6,963 \cdot 10^8$ m).

a) Určete celkovou hvězdnou velikost m_{Ring} prstence, na který se z pohledu tohoto pozorovatele zobrazí Slunce v maximální fázi úplného zatmění Měsíce. Výsledek uveďte číselně v mag. [4,5 b]

Vypočteme nejprve plošnou hvězdnou velikost μ_u Měsíce v úplňku. Označíme-li jako $\Omega \approx \pi(R_M/r)^2$ prostorový úhel, který na obloze vytíná měsíční disk, potom můžeme psát

$$\mu_u = m_u + 2,5 \log \frac{\Omega}{\text{arcsec}^2} = m_u + 5 \log \frac{\sqrt{\pi} R_M / r}{\text{arcsec}} \doteq 3,34 \text{ mag}.$$

Poměr plošných jasností měsíčního disku během úplného zatmění a během úplňku je roven poměru osvětlení dané části měsíčního povrchu během zatmění a úplňku, a tedy poměru pozorovaných jasností Slunce v těchto dvou situacích. V řeči hvězdných velikostí tedy můžeme psát

$$\mu - \mu_u = m_{\text{Ring}} - m_\odot,$$

neboli

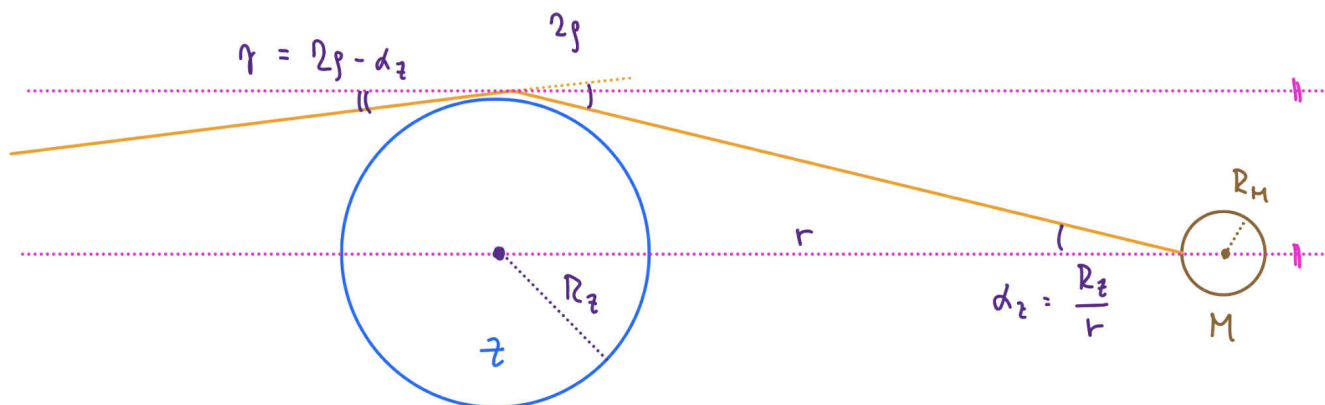
$$m_{\text{Ring}} = m_\odot + (\mu - \mu_u) \doteq -13,9 \text{ mag}.$$

Prstýnek je tedy o něco jasnější než měsíční úplněk pozorovaný ze Země.

b) Určete násobek x povrchu slunečního disku, který tento pozorovatel v principu může vidět. Jinými slovy: určete násobnost x optického zobrazení, které vlivem refrakce paprsků v atmosféře Země zobrazuje sluneční disk do středu měsíčního disku. Jako výsledek uveďte reálné číslo v intervalu $(0, \infty)$. [4,5 b]

Označme $\alpha_\odot = R_\odot/a_Z \doteq 16,0$ arcmin úhlový poloměr Slunce pro pozorovatele na Měsíci (ten je přibližně roven úhlovému poloměru pro pozorovatele na Zemi). Označme rovněž $\alpha_Z = R_Z/r \doteq 61,1$ arcmin úhlový poloměr Země pro pozorovatele na povrchu Měsíce. Úhel, o který se paprsky od Slunce zlomí v zemské atmosféře, závisí na kolmé vzdálenosti

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 2: Ilustrace lomu slunečních paprsků v zemské atmosféře. Znáznorněn je paprsek, u kterého dochází k maximálnímu lomu (o úhel 2ρ).

paprsku od středu Země (tzv. impaktparametru). Úhel lomu se tedy může měnit od 0 (paprsky procházející mimo atmosféru Země) až po 2ρ (paprsky, které se skoro dotknou povrchu Země, viz situace na obrázku 2). Jelikož je atmosféra Země zároveň velmi tenká ve srovnání s poloměrem Země a také máme $\alpha_{\odot}, \alpha_Z \ll 1$, můžeme přibližně uvažovat, že se všechny paprsky lámou ve vzdálenosti R_Z od středu Země v bodě ležícím směrem kolmo na spojnici Slunce–Země–Měsíc.

Vidíme, že okraj slunečního disku se zobrazí na vnější okraj prstence, který bychom pozorovali kolem Země z povrchu Měsíce. Vnitřní okraj prstence je omezen povrchem Země a mohou ho tedy tvořit paprsky, které se zlomily nanejvýš o úhel 2ρ . Jelikož číselně máme $0 < 2\rho - \alpha_Z < \alpha_{\odot}$, pocházejí tyto paprsky z opačné části slunečního disku (viz nákres na obrázku 2). Kruhovou oblast slunečního disku o poloměru $\gamma \equiv 2\rho - \alpha_Z$ tedy pozorovatel na povrchu Měsíce vidí dvakrát. Odtud dostaneme

$$x = 1 + \frac{\gamma^2}{\alpha_{\odot}^2} = 1 + \frac{(2\rho - \alpha_Z)^2}{\alpha_{\odot}^2} \doteq 1,37.$$

c) Uveďte alespoň jeden validní důvod, proč je pozorovaná jasnost měsíčního disku během úplného zatmění Měsíce při pohledu ze Země výrazně nižší než při úplňku. [1,0 b]

Jelikož výsledkem předchozí podúlohy je, že pozorovatel vidí sluneční disk více než jednou, pozorovaná hvězdná velikost m_{Ring} prstýnku by naivně měla být větší než m_{\odot} , a měli bychom tedy Měsíc pozorovat jasnější během zatmění než během úplňku. Ve skutečnosti ale vlivem extinkce v zemské atmosféře dochází k výraznému zeslabení paprsků, které Měsíc osvětluje¹. Významnou roli pak hraje i samotný způsob lomu paprsků v zemské atmosféře: jelikož hustota atmosféry (a tedy i index lomu) s výškou nad povrchem Země

¹Abychom získali odhad velikosti tohoto zeslabení, můžeme např. zjistit hvězdnou velikost Slunce při západu nebo východu pro pozorovatele na Zemi. Hodnoty se pohybují okolo -19 mag, což dává extinkci přibližně 7 mag. Paprsky dopadající na Měsíc zlomené o úhel 2ρ tedy podléhají extinkci okolo $(7 + 7)$ mag = 14 mag, což přibližně odpovídá zeslabení pozorovanému v části a). Pro přesnější výpočet vlivu extinkce by bylo třeba uvážit, že obraz Slunce pozorovaný na Měsíci se skládá z paprsků, které prošly v různých výškách nad povrchem Země, a tedy podléhaly různě míře extinkce.



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

klesá, paprsky procházející dále od povrchu Země se lámou méně. Uvážíme-li tedy kongruenci blízkých paprsků vycházejících z jednoho bodu na povrchu Slunce pod blízkými úhly, má zobrazení atmosférou Země rozbíhavý efekt, což má za následek další zeslabení obrazu Slunce pozorovaného z povrchu Měsíce. Naopak (a možná poněkud překvapivě) nehraje roli fakt, že Země geometricky blokuje přímé paprsky od Slunce k Měsíci.

Dlouhé úlohy

E Kdy budu doma?

(max. 20 bodů)

Po úspěšném pozorování úplného zatmění Slunce na Islandu Vojta nasedl 14.08.2026 do letadla z Reykjavíku (se zeměpisnou šířkou $\phi_R = 64,13^\circ$ s.š. a zeměpisnou délkou $\lambda_R = 21,94^\circ$ z.d.) do Prahy (se zeměpisnou šířkou $\phi_P = 50,11^\circ$ s.š. a zeměpisnou délkou $\lambda_P = 14,26^\circ$ v.d.). Letadlo vzletlo v 19:41 místního času (GMT+0).

Až v letadle ve výšce $H = 11,89$ km si Vojta uvědomil, že neví, v kolik hodin přistane v Praze. V čase $t_L = 69$ min po startu však z letadla pozoroval západ Slunce (které pro něj do té doby bylo nad obzorem). Ze Stellaria zjistil následující informace o poloze Slunce v moment startu z Reykjavíku:

- deklinace byla $\delta_S = 14,13^\circ$,
- výška nad obzorem byla $a_R = 11,72^\circ$,
- hodinový úhel byl $h_R = 06^h 09^m$.

Na základě těchto údajů pomozte Vojtovi určit, za jak dlouho po pozorovaném západu Slunce přistane letadlo v Praze. Výsledek mu stačí vědět s přesností ± 5 minut.

Předpokládejte, že se letadlo pohybuje konstantní rychlostí po hlavní kružnici spojující Reykjavík s Prahou. Atmosférickou refrakci u horizontu uvažujte $\rho = 35'$. Zemi považujte za ideální kouli. Uvažujte rovněž, že deklinace δ_S Slunce se během letu nemění.

Nápověda: při řešení úlohy by se vám mohly hodit následující vztahy platné v obecném sférickém trojúhelníku se stranami a, b, c a protilehlými úhly α, β, γ :

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}, \quad (\text{sinová věta})$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma, \quad (\text{kosinová věta})$$

$$\cos a \sin c = \sin a \cos c \cos \beta + \sin b \cos \alpha. \quad (\text{pravidlo s pěti parametry})$$

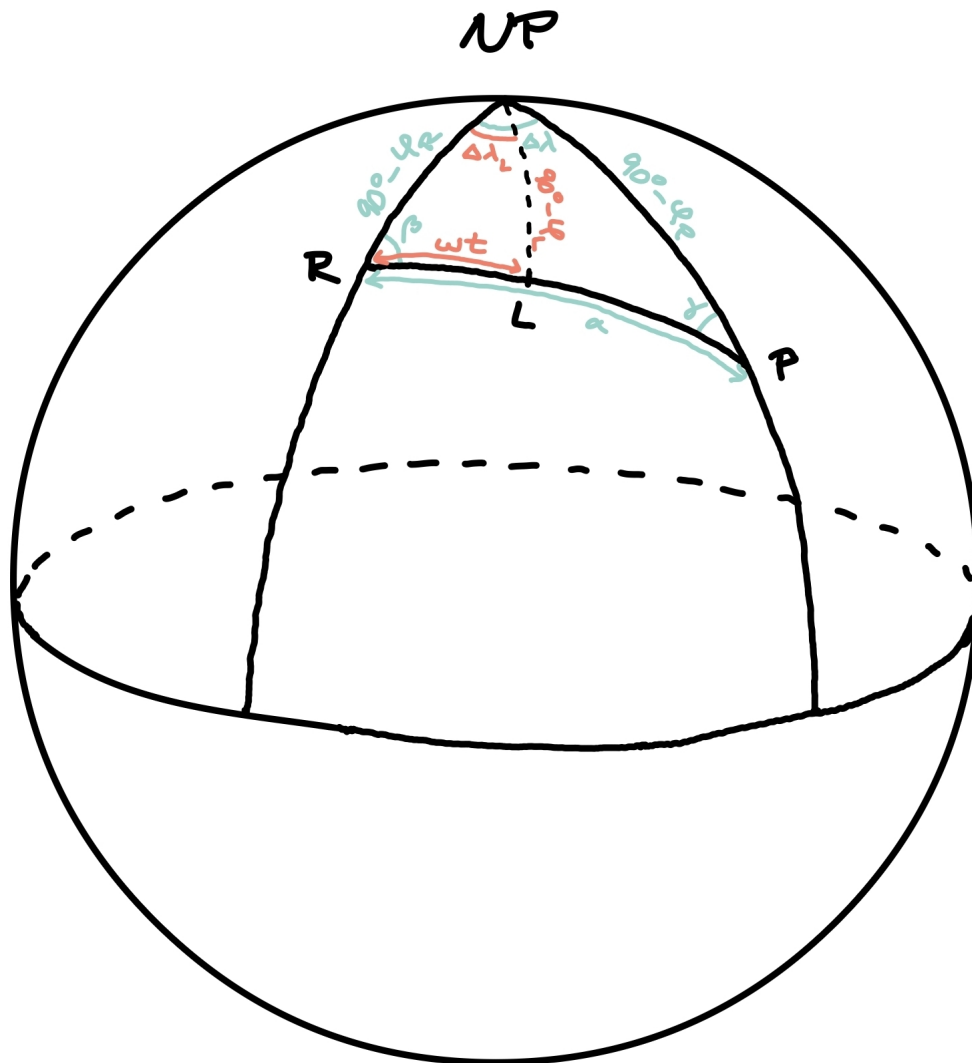
a) Určete úhlovou vzdálenost α mezi Reykjavíkem a Prahou (definujeme jako úhel sevřený polopřímkami vedenými ze středu Země směrem k Reykjavíku a k Praze). Jaká je odpovídající vzdálenost d Reykjavíku od Prahy po povrchu Země? Výsledky uveďte číselně ve stupních a v kilometrech. [2,0 b]

Úhel α lze určit ze sférického trojúhelníku NP–Reykjavík–Praha (zkratka NP značí severní pól) jako

$$\cos \alpha = \sin \phi_R \sin \phi_P + \cos \phi_R \cos \phi_P \cos \Delta \lambda,$$

kde dosazujeme $\Delta \lambda = \lambda_P - \lambda_R \doteq 36,20^\circ$. Číselně dostaneme $\alpha \doteq 23,62^\circ$. Pro vzdálenost obou měst po povrchu Země pak dostaneme $d = R_Z \alpha \doteq 2\,630$ km, kde $R_Z = 6\,378$ km je poloměr Země.

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Parametrizace dráhy letadla.

Když Vojta vidí střed slunečního kotouče přesně na svém pozorovaném horizontu (v čase t_L od startu), nachází se Slunce ve skutečnosti už pod matematickým horizontem (ten definujeme jako hlavní kružnici se středem v zenitu pozorovatele).

b) Určete tuto hloubku χ . Výsledek uveďte číselně ve stupních. [1,0 b]

Vojta se nacházel $H = 11,89$ km nad povrchem, viděl tedy o úhel ν pod obzor. I refrakce mu dovoluje vidět pod obzor, a to o dodatečný úhel ρ . Pokud má Země poloměr R_Z , pak ν určíme ze vztahu

$$\cos \nu = \frac{R_Z}{R_Z + H} \doteq 0,9981,$$

odkud dostaneme $\nu \doteq 3,50^\circ$. Máme tedy $\chi = \nu + \rho \doteq 4,08^\circ$.

K určení času t_r zbývajícího od pozorování západu Slunce do přistání budeme potřebovat zjistit úhlovou rychlost ω letadla vůči Zemi. Pomocí ní bude možné určit souřadnice letadla v závislosti na



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

čase pozorování t_L po startu z Reykjavíku, tedy jeho zeměpisnou délku λ_L a zeměpisnou šířku ϕ_L , respektive rozdíl $\Delta\lambda_L = \lambda_L - \lambda_R$.

c) Napište vztah pro hodinový úhel h_L Slunce, který by Vojta naměřil v čase t_L po startu z Reykjavíku z místa, kde pozoruje západ Slunce. Výsledek uveďte obecně pomocí h_R , $\Delta\lambda_L$ a t_L . [1,0 b]

Hodinový úhel určíme z počátečního hodinového úhlu h_R , změny v zeměpisné délce $\Delta\lambda_L$ a rozdílu pozorovacích časů t_L jako

$$h_L = h_R + t_L + \frac{\Delta\lambda_L}{15^\circ/\text{h}}.$$

Výšku $a_L = -\chi$ Slunce nad matematickým horizontem, kterou by Vojta naměřil z místa se souřadnicemi ϕ_L a λ_L v čase t_L po startu z Reykjavíku, můžeme alternativně určit převodem z rovníkových souřadnic (δ_S, h_L) .

d) Napište obecný vztah pro $\sin a_L$. Výsledek uveďte obecně pomocí h_R , t_L , δ_S a zeměpisných souřadnic ϕ_L , $\Delta\lambda_L$ Vojty v čase t_L . [2,0 b]

Výšku nad obzorem můžeme určit z kosinové věty v trojúhelníku zenit–NCP–Slunce (kde NCP značí severní světový pól) jako

$$\sin a_L = \sin \delta_S \sin \phi_L + \cos \delta_S \cos \phi_L \cos [\Delta\lambda_L + (h_R + t_L)15^\circ/\text{h}]. \quad (3)$$

e) Určete azimut β Prahy pro pozorovatele v Reykjavíku (číselně ve stupních). Azimut měříme směrem od severu. [1,5 b]

Využijeme sférický trojúhelník NP–Reykjavík–Praha (viz obrázek 3). Ze sférické sinové věty můžeme psát vztah

$$\sin \alpha \sin \beta = \sin \Delta\lambda \cos \phi_P, \quad (4)$$

odkud spočteme $\sin \beta \doteq 0,9452$. Jelikož zeměpisná šířka Prahy je menší než zeměpisná šířka Reykjavíku, je zřejmé, že azimut musí vyjít v kvadrantu $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Dostaneme tedy $\beta \doteq 109,1^\circ$.

f) Odvoďte obecné vztahy pro výrazy $\sin \phi_L$, $\cos \phi_L \cos \Delta\lambda_L$ a $\cos \phi_L \sin \Delta\lambda_L$ pomocí veličin ω , t_L , ϕ_R a β . [3,0 b]

Tentokrát využijeme sférický trojúhelník NP–Reykjavík–letadlo (opět viz obrázek 3). Ze sinové věty nejprve píšeme

$$\cos \phi_L \sin \Delta\lambda_L = \sin \omega t_L \sin \beta.$$

Dále můžeme psát kosinové věty

$$\sin \phi_L = \sin \phi_R \cos \omega t_L + \cos \phi_R \sin \omega t_L \cos \beta, \quad (5a)$$

$$\cos \omega t_L = \sin \phi_L \sin \phi_R + \cos \phi_L \cos \phi_R \cos \Delta\lambda_L, \quad (5b)$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

kde dosazením za $\sin \phi_L$ z (5a) do (5b) (nebo použitím pravidla s pěti parametry) dostaneme vztah

$$\cos \phi_L \cos \Delta \lambda_L = \cos \omega t_L \cos \phi_R - \sin \phi_R \sin \omega t_L \cos \beta. \quad (6)$$

Celkem tedy máme vztahy

$$\sin \phi_L = \sin \phi_R \cos \omega t_L + \cos \phi_R \sin \omega t_L \cos \beta, \quad (7a)$$

$$\cos \phi_L \sin \Delta \lambda_L = \sin \omega t_L \sin \beta, \quad (7b)$$

$$\cos \phi_L \cos \Delta \lambda_L = \cos \omega t_L \cos \phi_R - \sin \phi_R \sin \omega t_L \cos \beta. \quad (7c)$$

g) Vztah pro $\sin a_L$ z části d) přepište do tvaru

$$\sin a_L = f(\delta_S, \phi_R, h_R, t_L) \cos \omega t_L + g(\delta_S, \phi_R, h_R, t_L, \beta) \sin \omega t_L. \quad (8)$$

Napište obecné výsledky pro koeficienty f a g v termínech proměnných $\delta_S, \phi_R, h_R, t_L$ a β . Určete rovněž číselné hodnoty f a g . [4,0 b]

Pro účel dalších manipulací se nám bude hodit vztah (3) pro $\sin a_L$ přepsat pomocí součtového vzorce pro kosinus jako

$$\sin a_L = \sin \delta_S \sin \phi_L + \cos \delta_S \left[\cos \phi_L \cos \Delta \lambda_L \cos(h_R + t_L) \frac{15^\circ}{h} + \right. \\ \left. - \cos \phi_L \sin \Delta \lambda_L \sin(h_R + t_L) \frac{15^\circ}{h} \right]. \quad (9)$$

Všimněme si, že zeměpisné souřadnice Vojty v čase t_L vystupují pouze v kombinacích $\sin \phi_L, \cos \phi_L \cos \Delta \lambda_L$ a $\cos \phi_L \sin \Delta \lambda_L$. Dosazením vztahů (7a), (7b) a (7c) do (9) získáme

$$f = \sin \delta_S \sin \phi_R + \cos \phi_R \cos \delta_S \cos \tau \doteq 0,0784, \\ g = (\cos \phi_R \sin \delta_S - \sin \phi_R \cos \delta_S \cos \tau) \cos \beta - \cos \delta_S \sin \tau \sin \beta \doteq -0,9939,$$

kde jsme označili $\tau = (h_R + t_L) \frac{15^\circ}{h}$.

h) Hodnotu úhlové vzdálenosti ωt_L od Reykjavíku místa, odkud Vojta pozoroval západ Slunce, nalezněte jako číselné řešení rovnice (8). Výsledek uveďte ve stupních. Napište také číselnou hodnotu úhlové rychlosti ω letadla (ve stupních za hodinu). Dopočítejte rovněž číselné hodnoty zeměpisných souřadnic ϕ_L a λ_L (ve stupních). [4,0 b]

Rovnici (8) nejprve přepíšeme do tvaru

$$\frac{\sin a_L}{\sqrt{f^2 + g^2}} = \sin \xi \cos \omega t_L + \cos \xi \sin \omega t_L = \sin(\omega t_L + \xi),$$

kde parametr ξ je definován vztahy

$$\sin \xi = \frac{f}{\sqrt{f^2 + g^2}} \doteq 0,07865, \quad \cos \xi = \frac{g}{\sqrt{f^2 + g^2}} \doteq -0,99690.$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Vidíme, že ξ musí ležet v kvadrantu $90^\circ < \xi < 180^\circ$, takže dostaneme $\xi \doteq 175,490^\circ$.
Můžeme tedy psát (pro ωt_L očekáváme řešení v kvadrantu $0^\circ < \omega t_L < 90^\circ$)

$$\omega t_L = -\xi + \arcsin \frac{\sin a_L}{\sqrt{f^2 + g^2}} \doteq 8,603^\circ.$$

To dává $\omega \doteq 7,480^\circ \cdot \text{h}^{-1}$. Pravé strany vztahu (7a), (7b) a (7c) pak lze vyčíslit jako

$$\begin{aligned} \sin \phi_L &\doteq 0,868\,35, \\ \cos \phi_L \sin \Delta\lambda_L &\doteq 0,141\,38, \\ \cos \phi_L \cos \Delta\lambda_L &\doteq 0,475\,37, \end{aligned}$$

odkud dostaneme řešení $\phi_L \doteq 60,27^\circ$ a $\Delta\lambda_L \doteq 16,56^\circ$. Vojta tedy pozoruje západ Slunce na místě se souřadnicemi $(\phi_L, \lambda_L) = (60,27^\circ \text{ s.š.}, 5,38^\circ \text{ z.d.})$.

i) Určete zbývající dobu t_r letu. Výsledek uveďte číselně v minutách. [1,5 b]

Pro zbývající dobu letu můžeme psát

$$t_r = \frac{\alpha}{\omega} - t_L,$$

číselně dostaneme $t_r \doteq 120 \text{ min.}$

Alternativní řešení úlohy pomocí analytické geometrie: Nejprve napíšeme vztah pro hodinový úhel h_G Slunce, který by naměřil pozorovatel v Greenwich ($\lambda = 0^\circ$) v čase t_L , kdy Vojta z letadla pozoruje západ Slunce. Tento hodinový úhel určíme z počátečního hodinového úhlu h_R , zeměpisné délky Reykjavíku $\Delta\lambda_R$ a rozdílu pozorovacích časů t_L jako

$$h_G = h_R + t_L - \frac{\lambda_R}{15^\circ/\text{h}} \doteq 131,44^\circ.$$

Nyní můžeme zavést *Earth-centered, Earth-fixed (ECEF) systém souřadnic, který nám umožní převést zeměpisné souřadnice na 3D vektory. Budeme ho definovat tak, že počátek leží ve středu Země, osa x míří směrem k ($\lambda = 0^\circ, \phi = 0^\circ$), osa y k ($\lambda = 90^\circ, \phi = 0^\circ$) a osa z k severnímu pólu ($\phi = 90^\circ$). Napíšeme vztahy pro převod souřadnic (λ, ϕ) na (x, y, z) v systému ECEF za předpokladu, že budeme uvažovat jen vektory ležící na kouli o poloměru 1. Dostaneme*

$$(x, y, z) = (\cos \lambda \cos \phi, \sin \lambda \cos \phi, \sin \phi). \quad (11)$$

Vyčíslíme také jednotkové vektory \vec{S}_z (směr od středu Země ke Slunci v době, kdy Vojta pozoroval západ Slunce), \vec{R} (směr od středu Země k Reykjavíku) a \vec{P} (směr od středu Země k Praze) v soustavě ECEF. Po dosazení do výše odvozeného vztahu (11) dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{R} &\doteq (0,404\,73, -0,163\,03, 0,899\,79), \\ \vec{P} &\doteq (0,621\,56, 0,157\,97, 0,767\,28). \end{aligned}$$

Pro pozici Slunce je důležité si uvědomit, že δ_S odpovídá zeměpisné šířce, nad kterou se Slunce nachází, a h_G odpovídá záporné zeměpisné délce. Dostaneme pak

$$\vec{S}_z \doteq (-0,641\,81, -0,726\,97, 0,244\,12).$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Vojta se pohybuje po hlavní kružnici, celá jeho trasa tedy leží v jedné rovině definované koncovými body cesty a středem Země. Vojtovu pozici tedy můžeme parametrizovat jako pohyb po kružnici. Parametrizujme nyní pozici bodu pohybujícího se po jednotkové kružnici v rovině $z = 0$ jako

$$(x, y, z) = (f_1(\rho), g_1(\rho), 0),$$

kde ρ je úhel mezi směrem k bodu a osou x , měřený v protisměru hodinových ručiček. Pokud máme zadané bázevé vektory $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$ a $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$, přepíšeme tento vztah jako

$$(x, y, z) = f_2(\rho)\vec{e}_x + g_2(\rho)\vec{e}_y + h_2(\rho)\vec{e}_z.$$

Skutečně pro pohyb po kružnici můžeme psát

$$(x, y, z) = (\cos \rho, \sin \rho, 0).$$

Do bázevých vektorů lze tento výsledek rozložit jako

$$(x, y, z) = \vec{e}_x \cos \rho + \vec{e}_y \sin \rho + 0 \cdot \vec{e}_z.$$

Tento vztah platí pro libovolné kolmé bázevé vektory pro pohyb z pozice \vec{e}_x směrem k pozici \vec{e}_y . Můžeme tedy parametrizovat pohyb po kružnici i mimo rovinu $z = 0$. Jelikož chceme popsat Vojtovu cestu z Reykjavíku do Prahy, nabízí se jako \vec{e}_x zvolit vektor \vec{R} a jako \vec{e}_y jednotkový vektor \vec{T} kolmý na \vec{R} a mířící ve směru k \vec{P} (a tedy i ležící v rovině určené \vec{R} a \vec{P}). Vyjádříme nyní \vec{T} pomocí α , \vec{P} , a \vec{R} . Bude se nám hodit vektorová identita

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Jelikož chceme část vektoru \vec{P} kolmou na \vec{R} , můžeme od \vec{P} odečíst jeho projekci na \vec{R} . Tím se zbavíme všech komponentů ve směru \vec{R} a musí nám tedy zůstat jen komponenty kolmé na \vec{R} . Píšeme tedy

$$\vec{T} = \frac{\vec{P} - (\vec{P} \cdot \vec{R})\vec{R}}{\|\vec{P} - (\vec{P} \cdot \vec{R})\vec{R}\|} = \frac{\vec{P} - \cos(\alpha)\vec{R}}{\|\vec{P} - \cos(\alpha)\vec{R}\|} = \frac{\vec{P} - \cos(\alpha)\vec{R}}{\sin(\alpha)}.$$

Alternativně bychom mohli najít kolmici na \vec{R} a \vec{P} a poté kolmici na tento vektor a \vec{R} . Tím dostaneme vektor kolmý na \vec{R} a na normálu roviny definované \vec{R} a \vec{P} , tedy

$$\vec{T} = \frac{\vec{R} \times (\vec{P} \times \vec{R})}{\|\vec{R} \times (\vec{P} \times \vec{R})\|} = \frac{(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{P} - (\vec{R} \cdot \vec{P})\vec{R}}{\|(\vec{R} \cdot \vec{R})\vec{P} - (\vec{R} \cdot \vec{P})\vec{R}\|} = \frac{\vec{P} - \cos(\alpha)\vec{R}}{\sin(\alpha)}.$$

Numericky dostaneme $\vec{T} \doteq (0,62579, 0,76707, -0,14258)$. Vztah pro zenitovou vzdálenost z_L Slunce, kterou Vojta pozoruje, zapíšeme ve tvaru

$$\cos z_L = f(\vec{R}, \vec{T}, \vec{S}_z) \cos \omega t_L + g(\vec{R}, \vec{T}, \vec{S}_z) \sin \omega t_L. \quad (12)$$

Skutečně můžeme zkombinovat výsledky předchozích podúloh a získat vztah pro Vojtovu polohu $\vec{V}(\omega t_L)$ jako

$$\vec{V}(\omega t_L) = \vec{R} \cos \omega t_L + \vec{T} \sin \omega t_L.$$

Tento vektor současně míří ve směru Vojtova zenitu. Zenitovou vzdálenost tedy můžeme určit jako úhel mezi $\vec{V}(\omega t_L)$ a \vec{S}_z , neboli

$$\cos z_L = \sin a_L = \vec{V}(\omega t_L) \cdot \vec{S}_z = (\vec{R} \cdot \vec{S}_z) \cos(\omega t_L) + (\vec{T} \cdot \vec{S}_z) \sin(\omega t_L).$$

Pak $f(\vec{R}, \vec{T}, \vec{S}_z) = \vec{R} \cdot \vec{S}_z \doteq 0,0784$ a $g(\vec{R}, \vec{T}, \vec{S}_z) = \vec{T} \cdot \vec{S}_z \doteq -0,9941$. Řešením rovnice (12) určíme ω , zbývající čas letu t_r , a souřadnice ϕ_L a λ_L , ze kterých Vojta západ Slunce viděl. Postupujeme již stejně, jako v částech h) a i).

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
F The Final Twist
(max. 25 bodů)

Na začátku 20. století Albert Einstein přišel s revoluční myšlenkou – obecnou teorií relativity (OTR), která popisuje gravitaci nikoli jako sílu, ale jako zakřivení prostoročasu způsobené přítomností hmoty nebo energie. O více než sto let později jsou předpovědi OTR stále testovány s pozoruhodnou přesností, přičemž jedním z jejich nejpozoruhodnějších důsledků je existence gravitačních vln – vlnění prostoročasu vytvářeného hmotnými kompaktními zrychlujícími objekty, jako jsou např. binární systémy černých děr nebo neutronových hvězd. Vzájemná vzdálenost, ve které tyto objekty obíhají, se v důsledku vyzařování energie pomocí gravitačních vln zmenšuje, dokud nedojde ke splynutí objektů. Gravitační vlny byly poprvé přímo detekovány v roce 2015 observatoří LIGO, později doplněnou evropským detektorem VIRGO pro lepší triangulaci zdrojů a analýzu signálu a v roce 2020 i japonskou observatoří KAGRA. Jedním z nejdůležitějších potenciálně měřitelných parametrů u gravitačních vln je jejich frekvence těsně před splynutím objektů. Jejím výpočtem se budeme v této úloze zabývat.

Dle OTR můžeme popsat gravitaci tzv. Einsteinovými polními rovnicemi. První přesné a nejjednodušší řešení Einsteinových rovnic poskytl Karl Schwarzschild pouhých 20 dní po zveřejnění Einsteinovy práce o obecné relativitě. Schwarzschildova metrika, jak se řešení nazývá, popisuje geometrii prostoročasu vně jednoho sféricky symetrického, nerotujícího, nenabitého tělesa, jako je například černá díra. Jak uvidíme níže, analýza pohybu těles v takovémto prostoročasu nás přivede k odvození vztahu pro maximální frekvenci gravitačních vln, kterou naměříme před splynutím složek binárního systému tvořeného černými dírami.

Uvažujme ale nejprve pohyb v *klasické mechanice*. Konkrétně abychom usnadnili popis pohybu těles v obecném centrálním poli, zavádíme takzvanou efektivní potenciální energii $V_{\text{eff}}(r)$, která je definována vztahem

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + V_{\text{eff}}(r), \quad (1)$$

kde $E = \text{konst.}$ je celková mechanická energie, m je hmotnost tzv. testovacího tělesa (těleso, které svou přítomností neovlivňuje pole, ve kterém se pohybuje), v_r je radiální složka rychlosti \vec{v} testovacího tělesa vzhledem k centru pole a r je vzdálenost testovacího tělesa od centra. Všimněme si, že ve vztahu (1) pro celkovou mechanickou energii explicitně vystupuje pouze kinetická energie radiálního pohybu, kinetickou energii úhlového pohybu jsme s využitím zákona zachování momentu hybnosti absorbovali do efektivní potenciální energie $V_{\text{eff}}(r)$.

Vztah (1) můžeme interpretovat tak, že radiální složka (jinak trojrozměrného) pohybu testovacího tělesa je efektivně popsána v termínech pohybu částice v jednorozměrném silovém poli s odpovídající potenciální energií $V_{\text{eff}}(r)$. Úhlovou složku pohybu můžeme následně dopočítat pomocí zákona zachování momentu hybnosti.

Pro ilustraci nejprve uvažujme newtonovský popis pohybu v gravitačním poli v situaci, kde testovací těleso o hmotnosti m obíhá v centrálním gravitačním poli kolem tělesa o hmotnosti $M \gg m$. Celková mechanická energie takového testovacího tělesa je rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{konst.}, \quad (2)$$

kde v je velikost rychlosti testovacího tělesa a G je Newtonova gravitační konstanta. Zákon zachování momentu hybnosti navíc implikuje, že orbita testovacího tělesa je rovinná křivka (pohyb se odehrává

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

v tzv. invariantní rovině). Velikost L momentu hybnosti přitom můžeme zapsat jako

$$L = mr^2\omega = \text{konst.}, \quad (3)$$

kde ω je okamžitá úhlová rychlost pohybu testovacího tělesa.

a) Úpravou vztahu (2) do tvaru (1) napište vztah pro efektivní potenciální energii $V_{\text{eff}}(r)$ testovacího tělesa v centrálním gravitačním poli v rámci newtonovského popisu. Výsledek vyjádřete obecně pomocí G , M , m , L a r . Načrtněte průběh funkce $V_{\text{eff}}(r)$. [3,0 b]

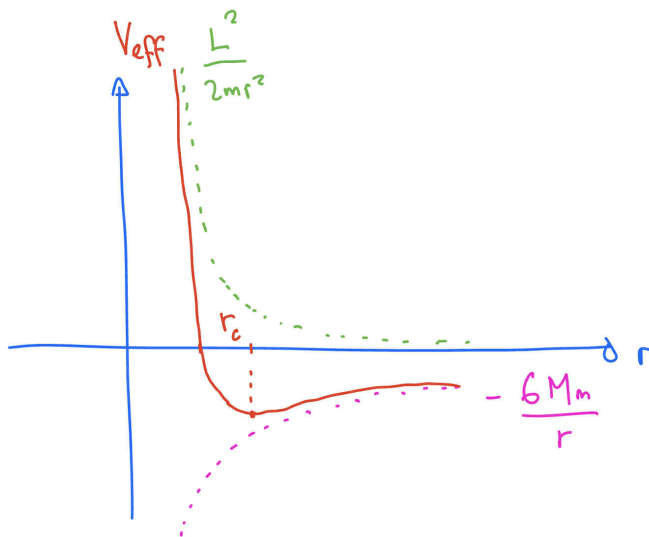
Jelikož je orbita tělesa rovinná křivka, můžeme obecně psát $v^2 = v_r^2 + v_t^2$, kde $v_t = \omega r$ je tečná složka rychlosti testovacího tělesa (tj. složka kolmá na průvodič). Máme pak

$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}m\omega^2r^2 - \frac{GMm}{r}.$$

Druhý člen můžeme také vyjádřit pomocí velikosti $L = mr^2\omega$ momentu hybnosti. Po porovnání s rovnicí (1) dostaneme

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Abychom načrtli průběh funkce $V_{\text{eff}}(r)$, uvědomíme si, že pro velká r dominuje příspěvek $-GMm/r$ gravitačního potenciálu, zatímco pro malá r převáží odstředivá bariéra $L^2/(2mr^2)$. Funkce $V_{\text{eff}}(r)$ tedy musí vypadat jako na obrázku 4. Konkrétně můžeme pozorovat minimum v bodě $r = r_c$.



Obrázek 4: Tvar efektivního potenciálu pro newtonovský popis pohybu testovacího tělesa v gravitačním poli.

Zaměříme se nyní na popis situace, kdy kolem sebe obíhají dvě tělesa o hmotnostech M_1 a M_2 , které jsou srovnatelné. Celková mechanická energie v takovémto systému je dána vztahem

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}M_1V_1^2 + \frac{1}{2}M_2V_2^2 - \frac{GM_1M_2}{r} = \text{konst.}, \quad (4)$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

kde V_1 a V_2 jsou velikosti rychlostí těles a r je jejich vzájemná vzdálenost. V soustavě spojené s hmotným středem musí rychlosti \vec{V}_1 a \vec{V}_2 obou těles zároveň splňovat

$$M_1 \vec{V}_1 + M_2 \vec{V}_2 = \vec{0}. \quad (5)$$

Vektory \vec{V}_1 a \vec{V}_2 jsou tedy rovnoběžné a míří opačnými směry.

b) Ukažte, že vztah (4) pro celkovou mechanickou energii \mathcal{E} lze přepsat jako

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM\mu}{r},$$

kde $v = V_1 + V_2$ je velikost vzájemné rychlosti obou těles, $\mathcal{M} = M_1 + M_2$ je celková hmotnost systému a $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$ je tzv. redukovaná hmotnost. [2,0 b]

Nejprve si všimněme, že lze psát

$$M_1 M_2 = \mathcal{M} \mu,$$

odkud plyne rovnost příspěvku gravitační potenciální energie do obou vztahů pro \mathcal{E} . Z „pákové rovnováhy“ $M_1 V_1 = M_2 V_2$ (důsledek vztahu (5)) a definice $v = V_1 + V_2$ dále plynou vztahy

$$V_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} v, \quad V_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 &= \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 v^2 + \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 v^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (M_2 + M_1) v^2 \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2, \end{aligned}$$

dostáváme tedy rovnost obou vztahů i pro příspěvky od kinetické energie.

c) Ukažte, že velikost

$$\mathcal{L} = (M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2) \omega = \text{konst.}$$

celkového momentu hybnosti soustavy (kde R_1 a R_2 jsou vzdálenosti obou těles od hmotného středu) lze zapsat obecně pomocí μ , r a ω . [1,5 b]

Z definice hmotného středu dále plyne vztah $M_1 R_1 = M_2 R_2$. V kombinaci se vztahem $r = R_1 + R_2$ pro vzdálenost r obou těles dostaneme

$$R_1 = \frac{M_2}{M_1 + M_2} r, \quad R_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} r.$$

Celkem tedy máme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= M_1 \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 r^2 \omega + M_2 \left(\frac{M_1}{M_1 + M_2} \right)^2 r^2 \omega \\ &= \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (M_2 + M_1) r^2 \omega \\ &= \mu r^2 \omega. \end{aligned}$$

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Na základě tvaru vztahů pro \mathcal{E} a \mathcal{L} , které jsme odvodili v částech b) a c), si můžeme všimnout, že systému dvou těles o srovnatelných hmotnostech M_1 a M_2 můžeme rozumět v termínech pohybu testovacího tělesa o hmotnosti μ v centrálním gravitačním poli tělesa o hmotnosti \mathcal{M} .

d) Napište efektivní potenciální energii $\mathcal{V}_{\text{eff}}(r)$ popisující pohyb těles M_1 a M_2 . Výsledek uveďte obecně pomocí G , \mathcal{M} , μ , r a \mathcal{L} . [1,0 b]

Porovnáním s výsledkem části b) dostaneme

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(r) = -\frac{G\mathcal{M}\mu}{r} + \frac{\mathcal{L}^2}{2\mu r^2}.$$

Uvažujme nyní popis pohybu testovacího tělesa o hmotnosti m v gravitačním poli centrálního tělesa o hmotnosti $M \gg m$ v rámci *obecné teorie relativity*. Obecně-relativistické efekty začnou hrát roli pro orbity, v nichž je velikost r průvodiče testovacího tělesa srovnatelná se Schwarzschildovým poloměrem $r_S = 2GM/c^2$. Podobně jako v newtonovském případě můžeme celkovou mechanickou energii $E = \text{konst.}$ zapsat v obecném tvaru (1), kde v_r nyní představuje tzv. *vlastní* radiální rychlost, tedy míru změny radiální souřadnice r vztaženou k vlastnímu času τ testovacího tělesa (tedy času, který by měřil pozorovatel spojený s testovacím tělesem). Pro odpovídající efektivní potenciální energii $V_{\text{eff}}(r)$ vstupující do vztahu (1) platí v relativistickém případě téměř totožný vztah jako v newtonovské limitě, liší se pouze přítomností korekčního členu

$$\Delta V_{\text{eff}}(r) = -\frac{L^2}{2mr^2} \frac{r_S}{r} \quad (6)$$

(který přestává hrát roli v limitě $r \gg r_S$). Velikost celkového momentu hybnosti spočteme jako $L = mr^2\omega = \text{konst.}$, kde ω je nyní *vlastní* úhlová rychlost (tedy opět vztažená k vlastnímu času testovacího tělesa).

e) Napište úplnou obecnou formu relativistické efektivní potenciální energie V_{eff} v závislosti na r pomocí m , c , r_S a délkového parametru $a = L/mc$. [1,5 b]

Postupnými úpravami můžeme relativistickou efektivní potenciální energii přepsat jako

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}mc^2 \left[-\frac{r_S}{r} + \frac{a^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \right] = \frac{1}{2}mc^2 \left[\left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{r_S}{r} \right) - 1 \right].$$

f) Určete velikost $F_{\text{eff}}(r)$ efektivní síly působící v radiálním směru na testovací těleso obíhající v gravitačním poli centrálního tělesa o hmotnosti M v rámci obecně relativistického popisu. Výsledek vyjádřete obecně jako funkci r pomocí m , c , r_S a délkového parametru a . [2,0 b]

Nápověda: Obecně můžeme efektivní sílu $F_{\text{eff}}(r)$ působící na testovací těleso v radiálním směru určit jako *mínus sklon grafu funkce* $V_{\text{eff}}(r)$, neboli jako *mínus derivaci* $V_{\text{eff}}(r)$ *vzhledem k* r . Sklon měříme jako tangens úhlu, který svírá tečna ke grafu funkce v daném bodě. Sklon grafu mocninné funkce Ar^n v bodě r spočteme jako Anr^{n-1} . Sklon grafu součtu funkcí spočteme jako součet sklonů grafů jednotlivých funkcí.

Aplikací pravidel v nápovědě dostaneme

$$F_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{r} \left(-\frac{r_S}{r} + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{r_S a^2}{r^3} \right) = \frac{1}{3} \frac{mc^2}{r} \left[\left(1 + 3\frac{a^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{3r_S}{2r} \right) - 1 \right].$$



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Speciálním případem pohybu testovacího tělesa m kolem centra je oběh po kruhové dráze. Jelikož v takovémto případě nedochází k pohybu v radiálním směru, musí kruhové dráhy odpovídat extrémům efektivní potenciální energie (kde na testovací těleso v radiálním směru nepůsobí síla).

g) Naleznete poloměry r_c všech možných kruhových drah v násobcích r_S jako funkce parametru $\alpha = a/r_S$. Pro různé hodnoty parametru α rozhodněte, které jsou stabilní a které nestabilní. Existují hodnoty α , pro které neexistuje žádná stabilní kruhová dráha? [4,0 b]

Nápověda: může pro vás být instruktivní načrtnout průběh funkce $V_{\text{eff}}(r)$ pro různé hodnoty α .

Aby dráha byla kruhová, musí být výsledná efektivní síla v radiálním směru nulová. Poloměr r_c tedy musí splňovat

$$F_{\text{eff}}(r_c) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{r_c} \left(-\frac{r_S}{r_c} + 2 \frac{a^2}{r_c^2} - 3 \frac{r_S a^2}{r_c^3} \right) = 0.$$

První řešení dostáváme, položíme-li zlomek před závorkou roven nule. V takovém případě by se r muselo limitně blížit nekonečnu, kde spolu tělesa již neinteragují. Pro další dvě řešení musíme vyřešit kvadratickou rovnici

$$r_S r^2 - 2a^2 r + 3r_S a^2 = 0,$$

což nám dává

$$(r_c)_{\pm} = \frac{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 12a^2 r_S^2}}{2r_S} = \alpha^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{\alpha^2}} \right) r_S = (\alpha^2 \pm \alpha \sqrt{\alpha^2 - 3}) r_S. \quad (7)$$

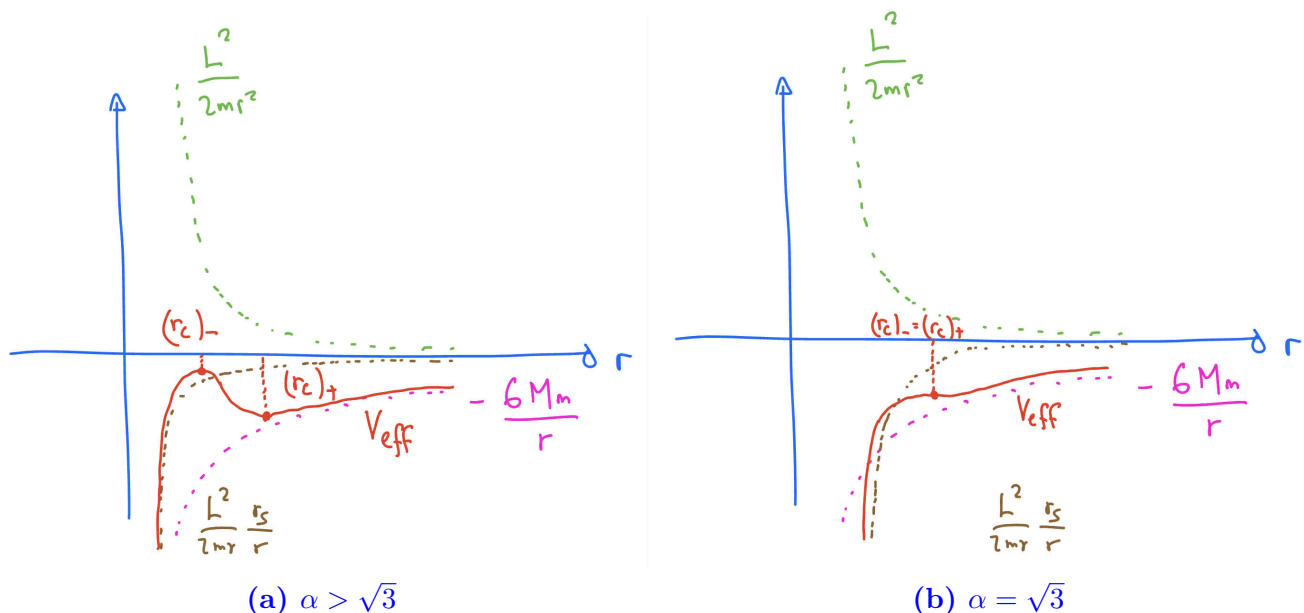
Vidíme, že kruhové dráhy existují pouze pokud $\alpha \geq \sqrt{3}$. Pokud je tato podmínka splněna, zbývá rozhodnout, které z odpovídajících dvou řešení (pokud nějaké) je stabilní. To můžeme rozhodnout na základě šetření průběhu grafu funkce $V_{\text{eff}}(r)$. Vidíme, že pro velká r převáží příspěvek $-(1/2)mc^2(r_S/r)$, zatímco pro malá r dominuje člen $-(1/2)mc^2(r_S/r)(a/r)^2$. Má-li tedy mít (spojitá) funkce $V_{\text{eff}}(r)$ na intervalu $0 < r < \infty$ zároveň dva extrémy ($\alpha > \sqrt{3}$), potom jediný možný průběh je ten, který vidíme na obrázku 5a. Odtud plyne, že řešení $(r_c)_+$ odpovídá minimu V_{eff} a daná kruhová dráha je tedy stabilní, zatímco $(r_c)_-$ odpovídá maximu efektivní potenciální energie a daná kruhová dráha je nestabilní. V hraničním případě $\alpha = \sqrt{3}$ máme pouze jeden extrém (viz obrázek 5b), který odpovídá metastabilní kruhové dráze, která je stabilní vůči zvyšování poloměru, ale nestabilní vůči snižování. Můžeme tedy uzavřít, že pro hodnoty $\alpha \leq \sqrt{3}$ neexistuje žádná stabilní kruhová dráha, zatímco pro hodnoty $\alpha > \sqrt{3}$ existuje právě jedna stabilní kruhová dráha pro danou hodnotu α .

Alternativně můžeme stabilitu vyšetřit zkoumáním znaménka efektivní síly $F_{\text{eff}}(r)$ na okolí bodů $(r_c)_{\pm}$. Pro hodnotu $r = \alpha^2 r_S$ (mezi oběma řešeními, tj. $(r_c)_- < r < (r_c)_+$) dostáváme

$$F_{\text{eff}}(\alpha^2 r_S) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{a^2} r_S \left(-\frac{r_S^2}{a^2} + 2 \frac{r_S^2}{a^2} - 3 \frac{r_S^4}{a^4} \right) = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{r_S} \frac{1}{\alpha^4} \left(1 - \frac{3}{\alpha^2} \right).$$

Aby však řešení byla reálná, musí být nutně $\alpha^2 > 3$, proto je znaménko síly mezi řešeními kladné. Pokračujme situaci pro $r > (r_c)_+$. Můžeme volit hodnotu $r = 2\alpha^2 r_S$, neboť zjevně

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 5: Tvar relativistické efektivní potenciální energie $V_{\text{eff}}(r)$.

máme $(r_c)_+ < 2\alpha^2 r_S$ pro jakékoliv hodnoty α . Dostaneme

$$F_{\text{eff}}(2\alpha^2 r_S) = \frac{1}{4} \frac{mc^2}{a^2} r_S \left(-\frac{1}{2} \frac{r_S^2}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{r_S^2}{a^2} - \frac{3}{8} \frac{r_S^4}{a^4} \right) = -\frac{3}{32} \frac{mc^2}{r_S} \frac{1}{\alpha^6} < 0.$$

Nakonec vyšetříme případ $r < (r_c)_-$. Pro jednoduchost volme $r \rightarrow 0$. Potom dominuje člen

$$(1/2)(mc^2/r)(-3r_S a^2/r^3) < 0.$$

Budeme-li tedy uvažovat kruhovou orbitu pro kladné řešení $(r_c)_+$ a vychýlíme jej o malé Δr směrem dále od centrálního tělesa, efektivní radiální síla bude mít záporné znaménko, bude mít tendenci těleso zpomalit a tedy vrátit do původní hodnoty poloměru $(r_c)_+$. Naopak pokud jej vychýlíme směrem k centrálnímu tělesu, efektivní radiální síla bude kladná a vrátí těleso zpět do $(r_c)_+$. Řešení $(r_c)_+$ je tedy stabilní. Naopak pro orbitu $(r_c)_-$ bude síla při vychýlení směrem od centrálního tělesa kladná a bude tedy těleso dále vychylovat směrem pryč. Stejně tak při vychýlení směrem k centru se k němu těleso bude vlivem záporné efektivní radiální síly přibližovat. Toto řešení je tedy nestabilní. Konečně v limitním případě, kdy $\alpha = \sqrt{3}$, a tedy $(r_c)_+ = (r_c)_- = 3r_S$, bude při kladných i záporných výchylkách poloměru síla záporná. To znamená, že pro kladné výchylky bude mít tendenci těleso vracet zpět na původní poloměr, zatímco záporné výchylky bude amplifikovat. Jedná se tedy o metastabilní poloměr.

h) Určete poloměr r_{ISCO} tzv. nejvnitřnější stabilní kruhové dráhy testovacího tělesa (*innermost stable circular orbit – ISCO*), tedy stabilní kruhové dráhy s nejmenším možným poloměrem. Výsledek uveďte v násobcích r_S . V kontextu akrečních disků kolem černých děr je ISCO považována za vnitřní okraj disku. Oblast pod ní vyzařuje minimum záření, což ji činí tmavou ve srovnání s akrečním diskem mimo ISCO. Stručně vysvětlete důvod. [2,0 b]



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nejvnitřnější možná stabilní kruhová dráha odpovídá minimální hodnotě $(r_c)_+$, což odpovídá situaci, kdy se odmocnina ve vztahu (7) rovná nule. Potom tedy $r_{\text{ISCO}} = a^2/r_S$ a zároveň $a^2 = 3r_S^2$ kvůli požadavku na nulovost odmocniny ve vztahu (7). Proto dostaneme

$$r_{\text{ISCO}} = 3r_S.$$

Všimněme si, že striktně vzato je tato dráha metastabilní, nejvnitřnější stabilní kruhová dráha nastává pro poloměry, které se shora limitně blíží k r_{ISCO} .

Kruhové orbity s poloměrem $r \leq r_{\text{ISCO}}$ jsou vždy nutně nestabilní. Po malém radiálním vychýlení tedy obíhající materiál buď spirálovitě klesá směrem k centrálnímu tělesu, nebo uniká směrem od černé díry.² Proto téměř žádný materiál na poloměrech pod r_{ISCO} nevidíme, neexistuje zde totiž žádná stabilní orbita.

i) Existují kruhové dráhy s poloměrem menším než ISCO? Pokud ano, určete jejich minimální poloměr r_{ICO} (*innermost circular orbit*) v násobcích r_S . [**2,0 b**]

Nápověda: Může se vám hodit lineární aproximace odmocniny

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2},$$

kde $|x| \ll 1$.

Spodní limit pro stabilní kruhové dráhy je sice r_{ISCO} , avšak pod ISCO stále mohou existovat nestabilní kruhové dráhy s poloměrem $(r_c)_-$. Minimální hodnota poloměru $(r_c)_-$, kterou budeme značit r_{ICO} , odpovídá limitě $\alpha \rightarrow \infty$, neboť $(r_c)_-$ je jako funkce α striktně klesající. Proto můžeme odmocninu ve vztahu (7) lineárně aproximovat a psát

$$r_{\text{ICO}} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [(r_c)_-(\alpha)] = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[\alpha^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{3}{\alpha^2} \right) r_S \right] = \frac{3}{2} r_S.$$

Limita $\alpha \rightarrow \infty$ odpovídá nekonečné hodnotě momentu hybnosti na jednotku hmotnosti testovacího tělesa. Takové situaci odpovídají fotony, proto se tato orbita také nazývá fotonová sféra. Pod tímto poloměrem už ani pro fotony neexistuje žádná kruhová dráha.

Dále se nám bude hodit vědět, že interval $\Delta\tau$ vlastního času testovacího tělesa odpovídá intervalu Δt času, který by naměřil pozorovatel nacházející se velmi daleko od centrálního tělesa M (v klidu vzhledem k M), přičemž platí

$$\left(1 - \frac{r_S}{r} \right) \Delta t = \sqrt{1 + \frac{2E}{mc^2}} \Delta\tau, \quad (8)$$

kde E je celková mechanická energie pohybu testovacího tělesa.

j) Napište vztah pro vlastní úhlovou rychlost ω_{ISCO} pohybu testovacího tělesa po kruhové dráze o poloměru r_{ISCO} . Výsledek vyjádřete obecně pomocí r_S a c . [**2,0 b**]

²Pokud poloměr $(r_c)_-$ kruhové dráhy leží v intervalu $2r_S < (r_c)_- < 3r_S$, potom může materiál uniknout pouze do konečné vzdálenosti, protože $V_{\text{eff}}((r_c)_-) < V_{\text{eff}}(\infty) = 0$.



Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Velikost L celkového momentu hybnosti splňuje

$$L = mr_{\text{ISCO}}^2 \omega_{\text{ISCO}} = 9mr_{\text{S}}^2 \omega_{\text{ISCO}}.$$

Zároveň ale máme $L = mca = \alpha mcr_{\text{S}}$, kde v případě ISCO pokládáme $\alpha = \sqrt{3}$. Celkem tedy máme

$$\sqrt{3}mcr_{\text{S}} = 9mr_{\text{S}}^2 \omega_{\text{ISCO}},$$

odkud vyjádříme

$$\omega_{\text{ISCO}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{c}{r_{\text{S}}}.$$

k) Napište rovněž vztah pro odpovídající úhlovou rychlost Ω_{ISCO} pohybu testovacího tělesa po kruhové dráze o poloměru r_{ISCO} , kterou by naměřil pozorovatel nacházející se velmi daleko od centrálního tělesa. Výsledek opět vyjádřete obecně pomocí r_{S} a c . [2,0 b]

Ze vztahu (8) v zadání dostaneme převod mezi úhlovými rychlostmi vztahenými k pozorovateli na ISCO a k pozorovateli v nekonečnu v klidu vzhledem k M jako

$$\Omega_{\text{ISCO}} = \frac{1 - \frac{r_{\text{S}}}{r_{\text{ISCO}}}}{\sqrt{1 + \frac{2E_{\text{ISCO}}}{mc^2}}} \omega_{\text{ISCO}}.$$

Jelikož se jedná o kruhovou orbitu, platí

$$E_{\text{ISCO}} = V_{\text{eff}}(r_{\text{ISCO}}) = \frac{1}{2}mc^2 \left[\left(1 + \frac{3}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) - 1 \right] = -\frac{1}{18}mc^2.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\Omega_{\text{ISCO}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} \frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{c}{r_{\text{S}}} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \frac{c}{r_{\text{S}}}.$$

Podobně jako v newtonovské mechanice lze i v obecné teorii relativity převést problém pohybu dvou těles o hmotnostech M_1 a M_2 na řešení úlohy pohybu testovacího tělesa, které má hmotnost $\mu = M_1 M_2 / (M_1 + M_2)$, ve sféricky symetrickém zakřiveném prostoročasu. Na rozdíl od analogické situace v klasické mechanice ovšem tento prostoročas obecně nelze přesně identifikovat se Schwarzschildovým prostoročasem centrálního tělesa o hmotnosti $\mathcal{M} = M_1 + M_2$: je nutné jej korigovat dalšími členy, které jsou úměrné kladným mocninám parametru $\nu = \mu / \mathcal{M}$. Tento přístup k řešení problému dvou těles v obecné teorii relativity se nazývá *Effective one-body formalism* a byl rozvinut koncem 90. let minulého století italskou fyzičkou Alessandrou Buonanno a francouzským fyzikem Thibaultem Damourem.

Ve zbytku úlohy pro jednoduchost předpokládejme, že výše popsané korekce lze zanedbat a tedy, že pohyb dvou těles M_1 a M_2 je ekvivalentní pohybu testovacího tělesa o redukované hmotnosti μ ve Schwarzschildově prostoročasu centrálního tělesa o celkové hmotnosti \mathcal{M} .

l) Napište vztah pro výpočet maximální frekvence $f_{\text{GW,max}}$ gravitačních vln pozorovaných těsně před srážkou dvou obíhajících se černých děr o hmotnostech M_1 a M_2 . Výsledek napište obecně pomocí M_1 , M_2 , G a c . Vypočtěte rovněž číselnou hodnotu $f_{\text{GW,max}}$ (v Hz) pro vůbec první detekovanou událost

Finále 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

GW150914, při které se srazily dvě černé díry o hmotnostech $35,6 M_{\odot}$ a $30,6 M_{\odot}$. Kosmologický červený posuv i radiální rychlost zdroje vůči pozorovateli zanedbejte. [2,0 b]

Nápověda: binární systém s orbitální frekvencí f_{orb} emituje gravitační vlny o frekvenci $f_{\text{GW}} = 2f_{\text{orb}}$.

Maximální orbitální frekvence binární systém dosáhne, pokud odpovídající kruhová orbita testovacího tělesa v ekvivalentním Effective one-body prostoročasu dosáhne ISCO. Uvažujeme-li přibližně, že tento prostoročas je dán Schwarzschildovým prostoročasem centrálního tělesa o hmotnosti $M_1 + M_2$, potom vzdálený pozorovatel naměří maximální frekvenci gravitačních vln

$$f_{\text{GW,max}} = 2f_{\text{orb,max}} = \frac{\Omega_{\text{ISCO}}}{\pi} = \frac{1}{6\sqrt{6}\pi} \frac{c^3}{G(M_1 + M_2)}.$$

Pro událost GW150914 číselně dostaneme $f_{\text{GW,max}} \doteq 67$ Hz.

V této úloze jsme odhadli úhlovou frekvenci dvou kolidujících černých děr na jejich poslední stabilní orbitě. Pokud bychom uvažovali větší vzájemnou vzdálenost, díry budou obíhat po kruhových drahách, avšak postupně se k sobě budou přibližovat z důvodu ztrát energie v podobě gravitačních vln. Této fázi se přezdívá inspiral. Jakmile se dostanou přibližně pod r_{ISCO} , přechází do merger fáze. Během té dosáhne intenzita i frekvence gravitačních vln svého maxima. Tato fáze trvá extrémně krátkou dobu – protože zde neexistují stabilní orbity, pohyb černých děr směrem k sobě se urychlí. Po splynutí děr nastává konečná relaxační fáze, ringdown, při které nová černá díra emituje gravitační vlny, čímž se stává stabilnější. Prakticky se hmotnost objektů určuje na základě celého průběhu frekvence gravitačních vln, především její změny v čase (tzv. chirp mass).

Autory úlohy A jsou David Kománek a Matouš Mišta, autorem úlohy B je David Kománek, autorem úlohy C je Radka Křížová, autorem úlohy D je Jakub Vošmera, autorem úlohy E je Martin Kudrna, autory úlohy F jsou Tomáš Patsch a Jakub Vošmera.