

**Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení****A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

**POKYNY:** Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **18. 1. 2026** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

**B Rotující hvězda***(max. 20 bodů)*

V této úloze budeme zkoumat tvar rotujících hvězd. Oprostíme se tedy od často zaváděného zjednodušujícího předpokladu, že hvězdy mají tvar ideálních koulí a zaměříme se na odchylky od sféricnosti v důsledku působení odstředivé síly v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotující hvězdou. Příkladem hvězdy, u které se pozorovalo výrazné zploštění z důvodu její rychlé rotace, je Achernar ze souhvězdí Eridanu. Obecné výsledky, které odvodíme v první části úlohy, následně využijeme k výpočtu rotační periody této hvězdy.

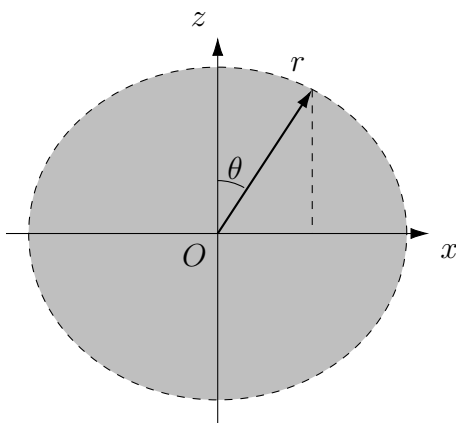
Hvězdy jsou komplikované systémy skládající se z ionizovaného plynu, jehož fyzikální vlastnosti (hustota, teplota, tlak apod.) jsou obecně funkcí vzdálenosti od středu hvězdy. Abychom si naši analýzu co nejvíce ulehčili, budeme hvězdy modelovat na základě několika zjednodušujících předpokladů.

1. Budeme uvažovat, že většina hmoty hvězdy je koncentrována v oblastech kolem středu, kde můžeme její rozložení považovat za sférické. Označíme-li tedy jako  $M$  hmotnost hvězdy, můžeme její gravitační pole v libovolné vzdálenosti od středu dle Gaussovy věty velmi dobře přiblížit gravitačním polem hmotného bodu o stejné hmotnosti  $M$ . Tvar povrchu hvězdy pak bude formován *atmosférou*, jejíž příspěvek do celkové hmotnosti hvězdy budeme zanedbávat.
2. Budeme rovněž předpokládat, že hvězda rotuje uniformně a zanedbáme komplikace spojené s diferenciální rotací.
3. Rotující hvězdu budeme pokládat za stacionární systém. Výslednice gravitační a odstředivé síly působící v soustavě rotující s hvězdou na libovolný element ionizovaného plynu je tedy přesně vyrovnána gradientem tlaku. V důsledku tohoto předpokladu nepůsobí podél povrchu hvězdy (plocha konstantního tlaku  $p = 0$ ) žádná síla a jedná se tedy o plochu konstantní potenciální energie ve výsledném poli gravitační a odstředivé síly.

K popisu polohy v rámci hvězdy budeme používat souřadnice zavedené na obr. 1.

**a)** Vyjádřete potenciální energii  $E_p$  částice o hmotnosti  $m$  v atmosféře hvězdy v neinerciální rotující soustavě pomocí vzdálenosti  $x$  od osy rotace, hmotnosti  $M$  hvězdy, úhlové rychlosti  $\omega$  rotace a souřadnice  $z$ . Uvažujte referenční hladinu  $E_p = 0$  potenciální energie v nekonečné vzdálenosti od středu hvězdy podél osy rotace. [4 b]

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



**Obrázek 1:** Rotující hvězda se zavedenými souřadnicemi.

V souladu s předpoklady budeme gravitační pole v atmosféře hvězdy považovat za gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti  $M$  umístěného ve středu hvězdy (Newtonův slupkový teorém nebo také Gaussova věta). Gravitační síla působící na částici o hmotnosti  $m$  ve vzdálenosti  $r$  od středu je pak rovna (působí směrem do středu)

$$F_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{x^2 + z^2}.$$

Tato síla odpovídá potenciální energii

$$E_{\text{grav}} = -\frac{GMm}{\sqrt{z^2 + x^2}}.$$

Na částici v rotující soustavě rovněž působí odstředivá síla o velikosti

$$F_{\text{ods}} = m\omega^2 x$$

ve směru od osy rotace. Potenciální energii odpovídající této síle můžeme spočítat jako práci vykonanou na přenesení částice od osy rotace  $x = 0$  do obecné vzdálenosti  $x$  od osy. Za využití vzorce pro obsah trojúhelníku (plocha pod grafem velikosti  $F_{\text{ods}}$  odstředivé síly jako funkce  $x$ ) dostaneme

$$E_{\text{ods}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Celkem tedy dostáváme potenciální energii

$$E_p = E_{\text{grav}} + E_{\text{ods}} = -\frac{GMm}{\sqrt{z^2 + x^2}} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Pro přehlednost nyní bude výhodné, pokud vztah pro celkovou potenciální energii přepíšeme pomocí bezrozměrných veličin. Konkrétně veličiny s jednotkami energie, resp. vzdálenosti můžeme měřit v násobcích charakteristické energie

$$\mathcal{E} = m(GM\omega)^{\frac{2}{3}},$$

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

resp. charakteristického poloměru

$$\mathcal{R} = \left( \frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Níže uvidíme, jak lze tyto dvě veličiny (které jsme vytvořili vhodnými kombinacemi veličin  $M$ ,  $\omega$  charakterizujících systém a Newtonovy gravitační konstanty  $G$ ) fyzikálně interpretovat. Prozatím je použijeme k zavedení bezrozměrné celkové potenciální energie  $e_p = E_p/\mathcal{E}$  a bezrozměrných souřadnic  $\xi = x/\mathcal{R}$  a  $\zeta = z/\mathcal{R}$ .

**b)** Vyjádřete  $e_p$  jako funkci  $\xi$  a  $\zeta$ . [2 b]

Vydělením vztahu pro  $E_p$ , který jsme odvodili v předchozí části, charakteristickou energií  $\mathcal{E}$  dostaneme

$$e_p(\xi, \zeta) = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} - \frac{1}{2}\xi^2.$$

**c)** Pomocí vhodného programu nakreslete křivky konstantní celkové bezrozměrné potenciální energie  $e_p$  v rovině  $(\xi, \zeta)$  pro hodnoty  $\xi, \zeta$  v rozmezí od  $-2$  do  $2$  (neboli „vrstevnice“ funkce  $e_p(\xi, \zeta)$ ). V grafu identifikujte lokální maxima a minima, případně sedlové body. [4 b]

Požadovaný graf vidíme na obrázku 2. V rovníkové rovině  $\zeta = 0$  vidíme dva sedlové body pro hodnoty  $\xi = \pm 1$ . Lokální maxima ani minima v grafu nepozorujeme, směrem k počátku  $(\xi, \zeta) = (0, 0)$  funkce nekontrolovaně klesá, ale není v tomto bodě definována.

**d)** Pro dané  $\omega$  a  $M$  určete maximální hodnotu  $R_{\text{pol}}^*$  polárního poloměru  $R_{\text{pol}}$  hvězdy takovou, aby se hvězda vlivem rotace nerozpadla. Jaká je odpovídající maximální hodnota  $R_{\text{eq}}^*$  rovníkového poloměru  $R_{\text{eq}}$ ? Odpovědi uveďte v násobcích charakteristického poloměru  $\mathcal{R}$ . [3 b]

Na obrázku 2 pozorujeme, že pro malé hodnoty polárního poloměru  $r_{\text{pol}} = R_{\text{pol}}/\mathcal{R}$  je hmota hvězdy uvězněná v potenciálové jámě sféroidního tvaru: tvar povrchu je dán plochou konstantní hodnoty  $e_p$ , která protíná osu  $\zeta$  v hodnotě  $r_{\text{pol}}$ . Maximální povolená hodnota  $r_{\text{pol}}^*$  bude odpovídat situaci, kdy se povrch hvězdy dotýká sedlových bodů celkové potenciální energie v rovníkové rovině v bodech  $\xi = \pm 1$ . V takových bodech je výslednice sil působících na testovací částici nulová a hmota hvězdy tudíž může unikat do prostoru. Hodnota  $\xi = 1$  tedy udává maximální možnou hodnotu

$$R_{\text{eq}}^* = \mathcal{R} = \left( \frac{GM}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

rovníkového poloměru, pro kterou hvězda ještě drží pohromadě. Skutečně: výslednice sil má v rovníkové rovině pro testovací částici o hmotnosti  $m$  velikost

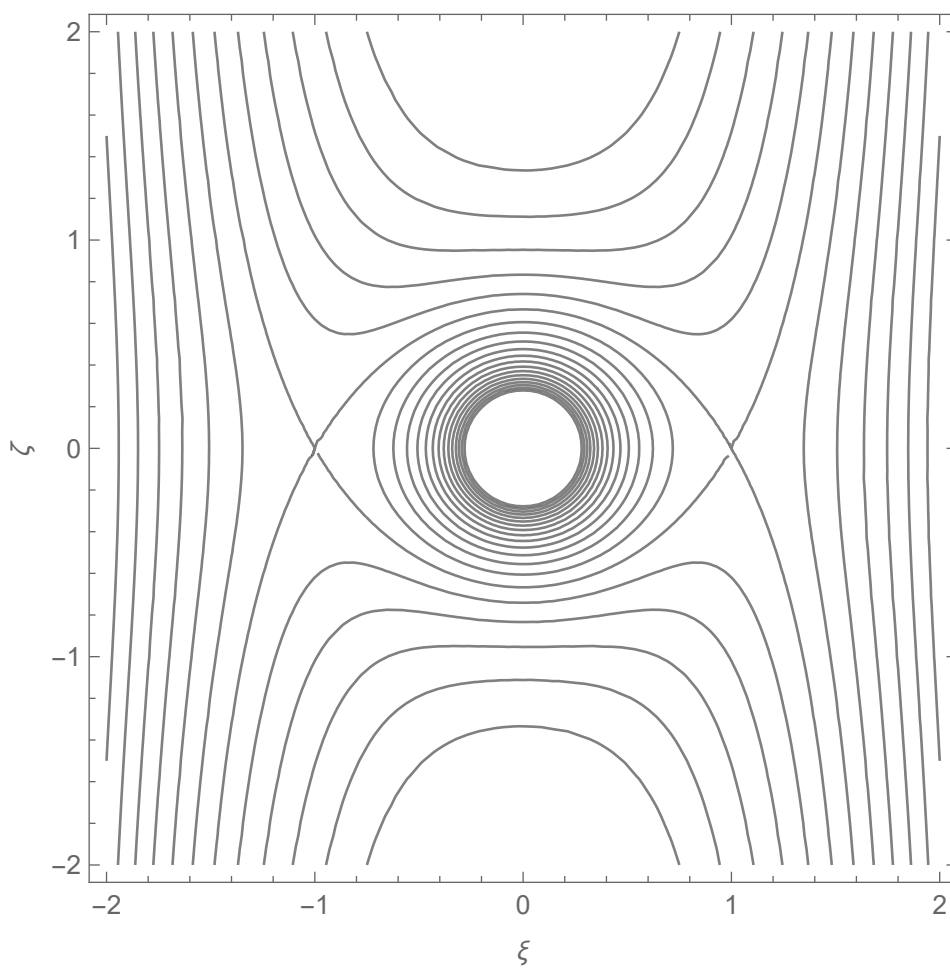
$$F_p = -\frac{GMm}{x^2} + m\omega^2 x$$

a je tedy nulová pro  $x = \mathcal{R}$ . Kritickému povrchu, který prochází body  $\xi = \pm 1$  a  $\zeta = 0$ , odpovídá celková bezrozměrná potenciální energie

$$e_p(\xi = \pm 1, \zeta = 0) = -\frac{3}{2},$$



Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 2: Křivky konstantní hodnoty  $e_p$  v rovině  $(\xi, \zeta)$ .



## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

tedy celková potenciální energie  $-\frac{3}{2}\mathcal{E}$ . Maximální hodnota  $r_{\text{pol}}$  tedy bude dána řešením rovnice (dosazujeme  $\xi = 0$ ,  $\zeta = r_{\text{pol}}$ )

$$-\frac{3}{2} = -\frac{1}{r_{\text{pol}}},$$

odkud dostaneme maximální hodnotu  $r_{\text{pol}}^* = \frac{2}{3}$  a tedy maximální polární poloměr

$$R_{\text{pol}}^* = \frac{2}{3}\mathcal{R} = \frac{2}{3}\left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

e) Určete poměr  $\eta = R_{\text{pol}}/R_{\text{eq}}$  polárního poloměru  $R_{\text{pol}}$  hvězdy vůči rovníkovému poloměru  $R_{\text{eq}}$  obecně jako funkci  $R_{\text{eq}}$  s parametrem  $\mathcal{R}$ . Jaká je minimální hodnota  $\eta^*$  parametrů  $\eta$  pro stabilní hvězdy? [4 b]

Uvažujme povrch konstantní potenciální energie definovaný rovnicí

$$E_{\text{p}}(x, z) = -\frac{GMm}{\sqrt{z^2 + x^2}} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = C,$$

kde  $C$  je nějaká konstantní hodnota celkové potenciální energie  $E_{\text{p}}$ . Pro povrch stabilní hvězdy máme  $C < -\frac{3}{2}\mathcal{E}$ . V rovině rovníku máme na povrchu hvězdy  $x = R_{\text{eq}}$  a  $z = 0$ , tedy

$$C = -\frac{GMm}{R_{\text{eq}}} - \frac{1}{2}m\omega^2 R_{\text{eq}}^2,$$

zatímco na pólu máme  $x = 0$  a  $z = R_{\text{pol}}$ , tedy

$$C = -\frac{GMm}{R_{\text{pol}}}.$$

Porovnáním výrazu pro celkovou potenciální energii na rovníku a na pólu hvězdy tedy získáme vztah

$$-\frac{GMm}{R_{\text{pol}}} = -\frac{GMm}{R_{\text{eq}}} - \frac{1}{2}m\omega^2 R_{\text{eq}}^2,$$

který můžeme upravit do tvaru

$$\eta(R_{\text{eq}}) = \frac{R_{\text{pol}}}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 R_{\text{eq}}^3}{2GM}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R_{\text{eq}}}{\mathcal{R}}\right)^3}.$$

Vidíme, že  $\eta(R_{\text{eq}})$  je klesající funkcí  $R_{\text{eq}}$ . Minimální hodnotu  $\eta^*$  tedy dostaneme dosazením  $R_{\text{eq}}^* = \mathcal{R}$  neboli

$$\eta^* = \eta(R_{\text{eq}}^*) = \frac{2}{3}.$$

f) Hvězda Achernar má hmotnost  $M = 6,0M_{\odot}$ , pozorovaný rovníkový poloměr  $R_{\text{eq}} = 9,2R_{\odot}$  a pozorovaný polární poloměr  $R_{\text{pol}} = 6,8R_{\odot}$  (tyto hodnoty již byly opraveny o sklon rotační osy vůči směru k pozorovateli). Vypočtete parametr  $\eta$ , charakteristický poloměr  $\mathcal{R}$  a periodu  $P$  rotace Achernaru kolem jeho osy. Výsledné hodnoty diskutujte. [3 b]

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Zadaným hodnotám odpovídá hodnota  $\eta \doteq 0,74$  a tedy

$$\frac{R_{\text{eq}}}{\mathcal{R}} = \left[ 2 \left( \frac{1}{\eta} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{3}} \doteq 0,89.$$

Odtud dostaneme  $\mathcal{R} \doteq 1,12R_{\text{eq}} \doteq 10,3R_{\odot}$ , a tedy

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{R}^3}{GM}} \doteq 1,6 \text{ d.}$$

Vidíme, že vypočtená hodnota parametru  $\eta$  pro Achernar je pouze o málo větší než minimální hodnota  $\eta^* = \frac{2}{3}$ , pro kterou by už hvězda nebyla stabilní. Stejně tak vidíme, že rovníkový poloměr Achernaru je jen přibližně o deset procent menší než největší možný rovníkový poloměr  $\mathcal{R}$  při dané úhlové rychlosti rotace a hmotnosti. Achernar tedy rotuje velmi blízko limitní úhlové rychlosti, při které by se již rozpadl.

## C Degenerovaný plyn

(max. 20 bodů)

Většina hvězd se nachází ve stavu hydrostatické rovnováhy. To znamená, že tlakový gradient uvnitř hvězdy vyrovnává gravitační sílu, která se snaží hmotu hvězdy přitahovat směrem ke středu. Tato rovnováha zajišťuje, že hvězda zůstává stabilní a nesmršťuje se ani se nerozpíná. Za normálních podmínek je tlak určován teplotou: čím vyšší teplota, tím větší tlak. Když je však hmota stlačena do stavu extrémní hustoty, částice se dostanou tak blízko, že už se nemohou chovat jako klasický plyn a začnou být důležité kvantové jevy. Podle Pauliho vylučovacího principu dva fermiony (částice s poločíselným spinem, např. elektrony nebo neutrony) nemohou být ve stejném kvantovém stavu. Z tohoto kvantového omezení vzniká tzv. degenerační tlak, který nezávisí na termodynamické teplotě určené náhodným pohybem částic. Takovou extrémní formu hmoty nazýváme *degenerovaný plyn* a právě na něj se v této úloze podíváme podrobněji.

V klasické mechanice lze každý stav volné částice jednoznačně popsat její polohou  $(x, y, z)$  a hybností  $(p_x, p_y, p_z)$ . Naproti tomu v kvantové mechanice nedokážeme zároveň určit polohu a hybnost částice s libovolnou přesností: čím přesněji lokalizujeme částici, tím méně přesně máme šanci změřit její hybnost. Konkrétně: je-li volná částice plynu uvězněna v oblasti o objemu  $V$ , můžeme její hybnost měřit nanejvýš po kvantech

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z = \frac{h}{V^{1/3}},$$

kde  $h$  je Planckova konstanta. Jinými slovy: na každý kvantový stav volné částice připadá oblast spektra  $(p_x, p_y, p_z)$  hybností o objemu

$$\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = \frac{h^3}{V}.$$

Jelikož se zároveň dva elektrony dle Pauliho vylučovacího principu nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu, mohou se v libovolné oblasti o objemu  $\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$  nacházet maximálně dva elektrony (jeden se spinem nahoru a druhý se spinem dolů).

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Uvažujme, že plyn elektronů o  $N$  částicích je uzavřen v objemu  $V$  při velmi nízké termodynamické teplotě, můžeme tedy zanedbat termální pohyb elektronů. Budeme předpokládat, že hybnosti elektronů se v tomto takzvaném *degenerovaném plynu* rozloží jednak v souladu s Pauliho vylučovacím principem a zároveň tak, aby plyn minimalizoval celkovou energii (která je úměrná velikosti hybnosti  $\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ ). Předpokládejme rovněž, že částice plynu se chovají izotropně, tedy že se pohybují do všech směrů se stejnou pravděpodobností. Potom elektrony ve spektru hybností rovnoměrně obsadí objem koule se středem v nulové hybnosti  $p_x = p_y = p_z = 0$  o poloměru  $p_F$  takovém, aby celkový počet obsazených kvantových stavů odpovídal celkovému počtu  $N$  částic plynu. Tedy aby bylo splněno

$$N = 2 \frac{\frac{4}{3}\pi p_F^3}{\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z} = \frac{8}{3}\pi V \left(\frac{p_F}{h}\right)^3,$$

kde faktor 2 v první rovnosti odpovídá dvěma možným spinovým stavům elektronu (nahoru a dolů). Velikost hybnosti  $p_F$  ohraničující oblast spektra obsazenou elektrony nazýváme *Fermiho hybnost*. Odpovídající oblasti ve spektru hybností pak říkáme *Fermiho koule*.

a) Vyjádřete Fermiho hybnost  $p_F$  pomocí střední objemové hustoty elektronů  $n = N/V$  a Planckovy konstanty  $h$ . [1 b]

S pomocí vztahů ze zadání můžeme snadno vyjádřit Fermiho hybnost jako

$$p_F = \sqrt[3]{\frac{3 N h^3}{8 V \pi}} = \frac{h}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} n}.$$

b) Vyjádřete Fermiho energii  $E_F$  pomocí  $n$ ,  $h$  a hmotnosti elektronu  $m_e$ . Jedná se o kinetickou energii elektronu s hraniční hybností  $p_F$ . Uvažujte, že je plyn nerelativistický, tj., že  $p_F \ll m_e c$ . Vyjádřete také odpovídající Fermiho teplotu  $T_F$  pomocí  $n$ ,  $h$ ,  $m_e$  a Boltzmannovy konstanty  $k_B$ . Fermiho teplota je teplota, při které by tepelná energie elektronu  $k_B T$  byla srovnatelná s Fermiho energií. [3 b]

Začneme definicí kinetické energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2,$$

kde  $m$  je hmotnost částice a  $v$  její rychlost. Hybnost můžeme zároveň vyjádřit jako

$$p = m v.$$

Kinetickou energii tedy obecně zapíšeme pomocí hybnosti jako

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Konkrétně pro Fermiho energii tedy platí

$$E_F = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{p_F}{m_e}\right)^2 = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e} \left(\frac{3}{\pi} n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Z rovnosti tepelné energie elektronu s Fermiho energií vyplývá

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{p_F^2}{2k_B m_e} = \frac{h^2}{8k_B m_e} \left(\frac{3}{\pi} n\right)^{\frac{2}{3}}.$$

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Za chvíli uvidíme, že v některých astrofyzikálních objektech najdeme degenerovaný plyn složený z elektronů, jejichž typická kinetická energie řádově převyšuje jejich klidovou energii: jinými slovy nám ze vztahu nalezeného v části a) vyjde Fermiho hybnost  $p_F \gg m_e c$ . Takovým elektronům říkáme ultrarelativistické a jejich kinetická energie  $E$  je vztažena k hybnosti  $p$  jako  $E = pc$ .

c) Najděte vztahy pro Fermiho energii  $E_F$  a Fermiho teplotu  $T_F$  v případě, že většina elektronů v degenerovaném plynu obsadila hybnosti  $p$ , které splňují  $p \gg m_e c$ . Vaše výsledky vyjádřete pomocí  $n$ ,  $h$ ,  $c$  a  $k_B$ . [2 b]

Píšeme

$$E_F = p_F c = \frac{hc}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} n}$$

a zároveň

$$T_F = \frac{p_F c}{k_B} = \frac{hc}{2k_B} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} n}.$$

Nyní se podíváme, jaká je situace u reálných astrofyzikálních objektů, a odhadneme, zda je plyn v nich degenerovaný. Nejprve použijeme známé hodnoty typické hmotnosti a poloměru různých typů hvězd k odhadu hustoty počtu částic. Dále spočteme Fermiho hybnost a rozhodneme, jestli by degenerovaný plyn elektronů v daném objektu byl popsán klasicky nebo ultrarelativisticky. Konečně spočteme odpovídající Fermiho teplotu a porovnáme ji s termodynamickou teplotou daného objektu, což nám pomůže rozhodnout, jestli je elektronový plyn v daném objektu degenerovaný: vyjde-li Fermiho teplota srovnatelná nebo větší než termodynamická teplota uvnitř objektu, znamená to, že degenerační tlak bude hrát důležitou roli v udržení hydrostatické rovnováhy. Uvažujme čtyři případy: Slunce, Jupiter, bílého trpaslíka a neutronovou hvězdu.

d) Spočtete hustoty počtu elektronů  $n_\odot$  pro Slunce (teplota v centru řádově  $10^6$  K až  $10^7$  K),  $n_J$  pro Jupiter (teplota v centru řádově  $10^4$  K),  $n_t$  pro bílého trpaslíka (hmotnost  $M_t = M_\odot$ , poloměr  $R_t = 0,008R_\odot$ , teplota v centru řádově  $10^5$  K) a hustotu počtu neutronů  $n_n$  pro neutronovou hvězdu (hmotnost  $M_n = 1,4M_\odot$ , poloměr  $R_n = 10$  km, teplota v centru řádově  $10^6$  K). Dále na základě odhadu Fermiho teplot  $T_{F,\odot}$ ,  $T_{F,J}$ ,  $T_{F,t}$  a  $T_{F,n}$  u každého objektu rozhodněte, jestli je v něm plyn degenerovaný. Předpokládejte pro jednoduchost, že v případě Slunce, Jupiteru a bílého trpaslíka je plyn úplně ionizovaný. [4 b]

Střední hustotu počtu elektronů v případě Slunce spočteme jako

$$n_\odot = \frac{\rho_\odot}{m_p} = \frac{M_\odot}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3 m_p} \doteq 8,4 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3},$$

kde  $m_p \approx m_n$  je hmotnost nukleonu. Odpovídající Fermiho hybnost je rovna  $p_{F,\odot} \doteq 5,8 \text{ keV}/c$ , zatímco máme  $m_e c = 511 \text{ keV}/c$ . Fermiho teplotu pro Slunce tedy můžeme vypočítat pomocí klasického vztahu odvozeného v části b). Dostaneme řádově

$$T_{F,\odot} = \frac{h^2}{8k_B m_e} \left( \frac{3}{\pi} n_\odot \right)^{\frac{2}{3}} \doteq 10^5 \text{ K}.$$

Vidíme, že typická termodynamická teplota uvnitř Slunce ( $10^6$  K až  $10^7$  K) je vyšší než Fermiho teplota, elektronový plyn uvnitř Slunce tedy není degenerovaný.



## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Hustota počtu elektronů pro Jupiter vyjde téměř stejně jako pro Slunce, podobně tedy vyjde i jeho Fermiho teplota. Teplota uvnitř Jupiteru ale zdaleka nedosahuje takových hodnot jako uvnitř Slunce a je dokonce o něco nižší než Fermiho teplota. Delokalizovaný elektronový plyn kovového vodíku v jádru Jupiteru tedy je kvantově degenerovaný.

Hustota počtu elektronů pro bílého trpaslíka naproti tomu vyjde

$$n_t = \frac{M_t}{\frac{4}{3}\pi R_t^3 m_p} \doteq 1,6 \cdot 10^{36} \text{ m}^{-3},$$

což dává Fermiho hybnost  $p_{F,t} \doteq 720 \text{ keV}/c$ . Vidíme, že vychází srovnatelně velká jako  $m_e c$ , k odhadu Fermiho teploty tedy můžeme použít jak klasický, tak ultrarelativistický vztah. Vyjde řádově

$$T_{F,t} = \frac{hc}{2k_B} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} n_t} \doteq 10^{10} \text{ K}.$$

Termodynamická teplota bílých trpaslíků je o mnoho řádů nižší, elektronový plyn v bílém trpaslíkovi je tedy degenerovaný.

Konečně hustota počtu neutronů pro neutronovou hvězdu vyjde

$$n_n = \frac{M_n}{\frac{4}{3}\pi R_n^3 m_p} \doteq 4 \cdot 10^{44} \text{ m}^{-3}.$$

To odpovídá Fermiho hybnosti  $p_{F,n} \doteq 450 \text{ MeV}/c$ , která je řádově srovnatelná s hodnotou  $m_n c \doteq 940 \text{ MeV}/c$ . K odhadu Fermiho teploty tedy opět můžeme použít jak klasický, tak relativistický vztah. Dostaneme

$$T_{F,n} = \frac{h^2}{8k_B m_p} \left(\frac{3}{\pi} n_n\right)^{\frac{2}{3}} \doteq 10^{12} \text{ K}.$$

Jedná se znovu o mnohem vyšší teplotu, než je typická termodynamická teplota neutronové hvězdy. Hmotu neutronové hvězdy tedy je degenerovaná.

Ve zbytku úlohy se zaměříme na bílé trpaslíky, kde degenerační tlak elektronového plynu zajišťuje rovnováhu proti gravitačnímu kolapsu. Pro jednoduchost budeme bílé trpaslíky modelovat jako homogenní koule. Budeme také uvažovat, že hvězda se pro danou hmotnost  $M$  ustálí ve stavu s poloměrem  $R$ , pro který bude součet  $E$  celkové kinetické energie  $E_{\text{kin}}$  elektronového plynu a celkové mechanické energie  $E_{\text{nuc}}$  nukleonů minimální. Uvážením obsazenosti jednotlivých hybností elektrony bychom mohli vypočítat, že střední kinetická energie jednoho elektronu je v klasickém případě rovna  $(3/5)E_F$ , zatímco v ultrarelativistickém případě by byla rovna  $(3/4)E_F$ . Naproti tomu celkovou mechanickou energii  $E_{\text{nuc}}$  díky viriálové větě spočteme jako polovinu celkové gravitační potenciální energie (zanedbáváme příspěvek elektronů, protože  $m_e \ll m_p$ ), tedy

$$E_{\text{nuc}} = -\frac{3}{10} \frac{GM^2}{R}$$

pro homogenní kouli o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$ .

e) Napište vztah pro celkovou kinetickou energii  $E_{\text{kin}}$  všech elektronů v bílém trpaslíkovi v nerelativistickém případě. Vyjádřete ji pomocí  $M$ ,  $R$ ,  $h$ ,  $m_e$  a  $m_p$ . Předpokládejte, že na dva nukleony připadá jeden elektron, tedy  $M = 2Nm_p$ . To odpovídá bílým trpaslíkům složeným z uhlíku a kyslíku (produkty 3-alfa reakce v závěrečném stadiu vývoje hvězdy). [2 b]



## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Celkovou kinetickou energii spočítáme jako

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} N E_F = \frac{3}{5} N \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{3}{\pi} n \right)^{\frac{2}{3}}.$$

kde střední hustotu elektronů můžeme určit jako

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Dosazením  $N = M/(2m_p)$  dostaneme

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{10} \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^2} \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{81}{64\pi^4 m_p^5} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

f) Najděte vztah mezi hmotností  $M$  a poloměrem  $R$  bílého trpaslíka. Výsledek vyjádřete ve tvaru

$$R = \alpha M^\beta,$$

kde koeficient  $\alpha$  určete pomocí  $h$ ,  $G$ ,  $m_e$ ,  $m_p$  a koeficient  $\beta$  zapište jako bezrozměrné číslo. Uvažujte nejprve, že elektronový plyn je nerelativistický. Pro jaké hmotnosti  $M$  bílého trpaslíka se jedná o dobrý předpoklad? [4 b]

*Nápověda:* napište celkovou energii  $E$  jako funkci  $R$  a najděte hodnotu  $R$ , pro kterou je  $E$  minimální. Mohlo by vám pomoci vhodné doplnění na čtverec.

Pro celkovou energii systému  $E(R)$  jako funkci poloměru  $R$  můžeme v nerelativistickém případě psát

$$E(R) = E_{\text{kin}} + E_{\text{nuc}} = \frac{3}{5} N E_F - \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{10} \left[ \frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^2} \frac{h^2}{8m_e} \left( \frac{81}{64\pi^4 m_p^5} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{GM^2}{R} \right].$$

Můžeme vidět, že tato funkce má skutečně lokální minimum, neboť v termínech proměnné  $1/R$  se jedná o parabolu. Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že hodnota  $R$ , pro kterou funkce  $E(R)$  nabývá minima, splňuje

$$\frac{M^{\frac{5}{3}}}{R^2} \frac{h^2}{4m_e} \left( \frac{81}{64\pi^4 m_p^5} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{GM^2}{R}$$

neboli

$$R = \frac{3h^2}{16Gm_e} \left( \frac{3}{\pi^4 m_p^5} \right)^{\frac{1}{3}} M^{-\frac{1}{3}}.$$

Dostáváme tedy parametry

$$\alpha = \frac{3h^2}{16Gm_e} \left( \frac{3}{\pi^4 m_p^5} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = -\frac{1}{3}.$$

## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Můžeme si všimnout, že oproti ostatním typům hvězd poloměr bílých trpaslíků s rostoucí hmotností klesá.

Tento nerelativistický výpočet je platný pouze tehdy, pokud je Fermiho hybnost  $p_F$  o hodně menší než  $m_e c$ , tedy

$$\frac{h}{2} \left( \frac{9M}{8\pi^2 R^3 m_p} \right)^{\frac{1}{3}} \ll m_e c,$$

neboli, po dosazení vztahu mezi  $R$  a  $M$ ,

$$M \ll \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \sqrt{\frac{9\pi}{8}} \doteq 3,5 M_{\odot},$$

kde jsme zavedli značení

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}$$

pro tzv. Planckovu hmotnost. Odvozený vztah mezi hmotností a poloměrem bílých trpaslíků je tedy platný pouze pro bílé trpaslíky, jejichž hmotnost je o hodně menší než hmotnost Slunce.

Z vašich výsledků předchozí části by mělo být patrné, že pro velké hmotnosti  $M$  bílého trpaslíka je třeba brát elektronový plyn jako relativistický.

g) Napište celkovou energii  $E$  bílého trpaslíka jako funkci poloměru  $R$  pro danou fixní hmotnost  $M$  v případě, že elektronový plyn je ultrarelativistický. Co se stane, když je hmotnost hvězdy příliš velká a převládne gravitace? Odvoďte z odpovídající nerovnosti maximální možnou hmotnost  $M^*$  bílého trpaslíka. Výsledek vyjádřete pomocí  $m_p$  a Planckovy hmotnosti

$$m_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{hc}{2\pi G}}.$$

Uveďte také číselnou hodnotu  $M^*$  v jednotkách hmotnosti Slunce. Opět předpokládejte, že na dva nukleony připadá jeden elektron, tedy  $M = 2Nm_p$ . Hodnotu  $M^*$  porovnejte se známou hodnotou Chandrasekharovy meze a diskutujte možné zdroje odchylek. [4 b]

Celková energie hvězdy je v ultrarelativistickém případě rovna

$$E(R) = \frac{3}{4} N E_F - \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{4} N \frac{hc}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} n} - \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R},$$

neboli

$$E(R) = \frac{3}{2} \left[ \frac{hc}{4} \left( \frac{9M^4}{64m_p^4 \pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5} GM^2 \right] \frac{1}{R}.$$

Funkce  $E(R)$  tedy v ultrarelativistickém případě nemá lokální minimum, jako tomu bylo v nerelativistickém případě. Pokud platí  $E < 0$  (tedy pokud převládne gravitační energie

**Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení**  
 nad energií degenerovaného plynu), bude energie klesat s klesajícím  $R$  a hvězda se začne smršťovat směrem k limitnímu případu  $E \rightarrow -\infty$  pro  $R \rightarrow 0$ . Stabilní konfigurace neexistuje. Hranice stability nastává v případě  $E = 0$  pro  $M = M^*$ , což dává

$$\frac{hc}{4} \left( \frac{9(M^*)^4}{64m_p^4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{5} G(M^*)^2,$$

neboli

$$M^* = \frac{m_{\text{Pl}}^3}{m_p^2} \frac{15}{16} \sqrt{\frac{5\pi}{2}} \doteq 5M_{\odot}.$$

Vidíme, že v rámci našeho zjednodušeného modelu bílého trpaslíka jsme dostali limitní hmotnost, která je přibližně třikrát větší než hodnota Chandrasekharovy meze. Reálné bílé trpaslíky samozřejmě nelze modelovat jako homogenní koule.

*Poznámka:* Obecný vztah pro Chandrasekharovu mez se od našeho výsledku liší pouze o celkový faktor zahrnující odmocniny z celých čísel a transcendentální číslo plynoucí z řešení Laneovy-Emdenovy rovnice (která je ekvivalentní podmínce hydrostatické rovnováhy na obecné vzdálenosti od středu hvězdy).

## D Pozorování Jupiteru

*(max. 30 bodů)*

**POZOR!!! Je důležité, abyste pozorovali po celou dobu krajského kola. Nenechávejte pozorovací úlohu na poslední chvíli, nepodaří se vám napozorovat kýžený jev.**

Dne 10. ledna 2026 bude planeta Jupiter v opozici. V průběhu krajského kola pozorujte polohu Jupiteru na obloze a zakreslujte ji do hvězdné mapky na obrázku 4 (nebo si vyrobte vlastní mapku). Využijte pak pozorování provedená okolo 10. ledna, abyste spočítali úhlovou rychlost pohybu Jupiteru po obloze v opozici a následně poloměr  $a_J$  dráhy Jupiteru jako násobek poloměru  $a_Z$  dráhy Země. Oběžné dráhy Země i Jupiteru můžete považovat za kruhové, pro výpočet můžete použít 3. Keplerův zákon ve tvaru

$$\left( \frac{a_J}{a_Z} \right)^3 = \left( \frac{P_J}{P_Z} \right)^2,$$

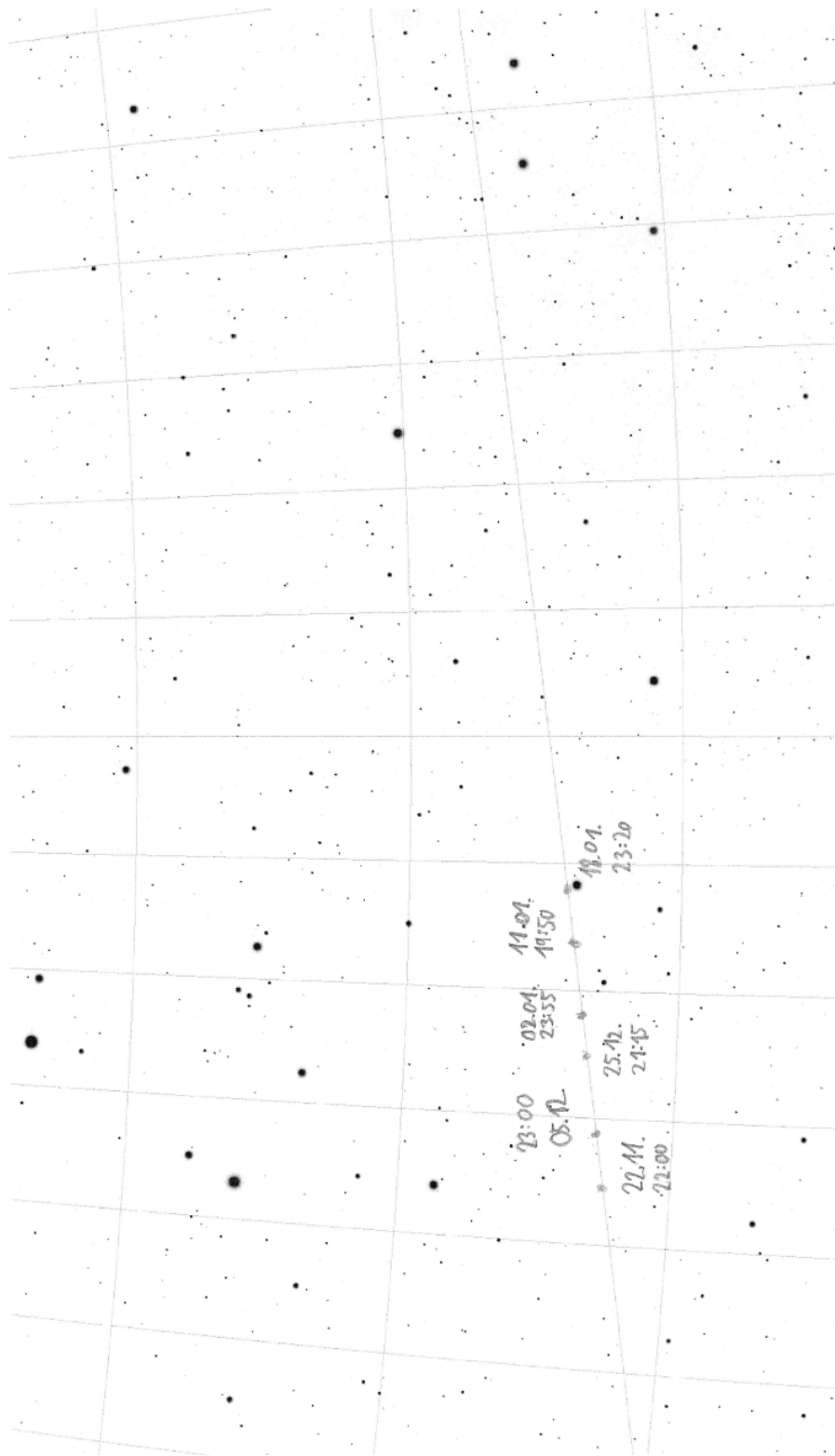
kde  $P_J$ , resp.  $P_Z$  jsou siderické oběžné periody Jupiteru, resp. Země. Předpokládejte pouze znalost hodnoty  $P_Z$ .

Na hvězdné mapce na obrázku 3 jsou vyznačena naše pozorování s jejich časy. Pozorování z města bylo obtížné, ale nikoliv nemožné. Autor vzorového řešení provedl většinu pozorování z Prahy. Jupiter a hvězdy Castor a Pollux byly vidět bez obtíží. Pokud člověk poodešel z bezprostřední blízkosti pouličního osvětlení, bylo možné na obloze vytušit i méně jasné hvězdy  $\delta$  Gem,  $\iota$  Gem a  $\kappa$  Gem a s jejich pomocí přesněji zakreslit polohu Jupiteru. Jupiter se pohyboval v těsné blízkosti ekliptiky, a tak zanedbáme sklon jeho dráhy.

Vzdálenosti uražené Jupiterem mezi jednotlivými pozorováními jsme na mapce změřili v centrimetrech a poté jsme je pomocí měřítka převedli na úhlové vteřiny. Měřítka jsme



## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



**Obrázek 3:** Pozorování Jupiteru ze dnů 22. 11. 2025–18. 01. 2026. U každého pozorování je zapsané datum a čas.

**Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení**

	datum	22. 11.	05. 12.	25. 12.	02. 01.	11. 01.	18. 01.
datum	čas\čas	22:00	23:00	21:15	23:55	19:50	23:20
22. 11.	22:00	x	11,4	11,1	11,6	13,5	14,6
05. 12.	23:00		x	11,0	11,7	14,3	15,6
25. 12.	21:15			x	13,5	18,2	19,4
02. 01.	23:55				x	22,5	22,4
11. 01.	19:50					x	22,2
18. 01.	23:20						x

**Tabulka 1:** Úhlové rychlosti Jupiteru mezi každou dvojicí pozorování v arcsec  $\cdot$  h<sup>-1</sup>.

určili tak, že jsme na mapce změřili vzdálenost v centimetrech odpovídající posunu 10° v deklinaci. Pro každou dvojici pozorování jsme vydělili úhlový posun Jupiteru časovým rozdílem a úhlové rychlosti v arcsec  $\cdot$  h<sup>-1</sup> jsme zapsali do tabulky 1.

Zprůměrováním výsledků ze všech našich pozorování jsme spočítali, že Jupiter se v opozici pohyboval úhlovou rychlostí  $\omega = 15,5(43)$  arcsec  $\cdot$  h<sup>-1</sup> = 2,09(58)  $\cdot$  10<sup>-8</sup> rad  $\cdot$  s<sup>-1</sup>. Ta souvisí s oběžnými rychlostmi  $v_Z$  Země a  $v_J$  Jupiteru jako

$$\omega = \frac{v_Z - v_J}{a_J - a_Z}, \quad (1)$$

kde  $a_Z$  je velká poloosa oběžné dráhy Země a  $a_J$  je velká poloosa oběžné dráhy Jupiteru. Vztah (1) můžeme přepsat jako

$$\omega = \frac{v_Z}{a_Z} \frac{1 - \frac{v_J}{v_Z}}{\frac{a_J}{a_Z} - 1} = \omega_Z \frac{1 - \frac{v_J}{v_Z}}{\frac{a_J}{a_Z} - 1},$$

kde  $\omega_Z$  je úhlová rychlost oběhu Země kolem Slunce. Po dosazení vztahu  $P_J = \frac{2\pi a_J}{v_J}$  a  $P_Z = \frac{2\pi a_Z}{v_Z}$  do 3. Keplerova zákona můžeme psát

$$\left(\frac{a_J}{a_Z}\right)^3 = \left(\frac{a_J}{a_Z}\right)^2 \left(\frac{v_Z}{v_J}\right)^2,$$

tedy

$$\frac{v_J}{v_Z} = \sqrt{\frac{a_Z}{a_J}}.$$

Označíme-li  $\alpha = \frac{a_J}{a_Z}$  hledaný poměr velikých poloos Jupiteru a Země, dostáváme pro něj rovnici

$$\frac{\omega}{\omega_Z} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}})(1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}})} = \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha}},$$

neboli

$$\alpha + \sqrt{\alpha} = \frac{\omega_Z}{\omega} . ,$$

kde  $\omega_Z = 1,99 \cdot 10^{-7}$  rad  $\cdot$  s<sup>-1</sup> je úhlová oběžná rychlost Země okolo Slunce. Odtud dostaneme řešení

$$a_J = \frac{1}{4} \left[ \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_Z}{\omega}} - 1 \right]^2 a_Z. \quad (2)$$



## Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

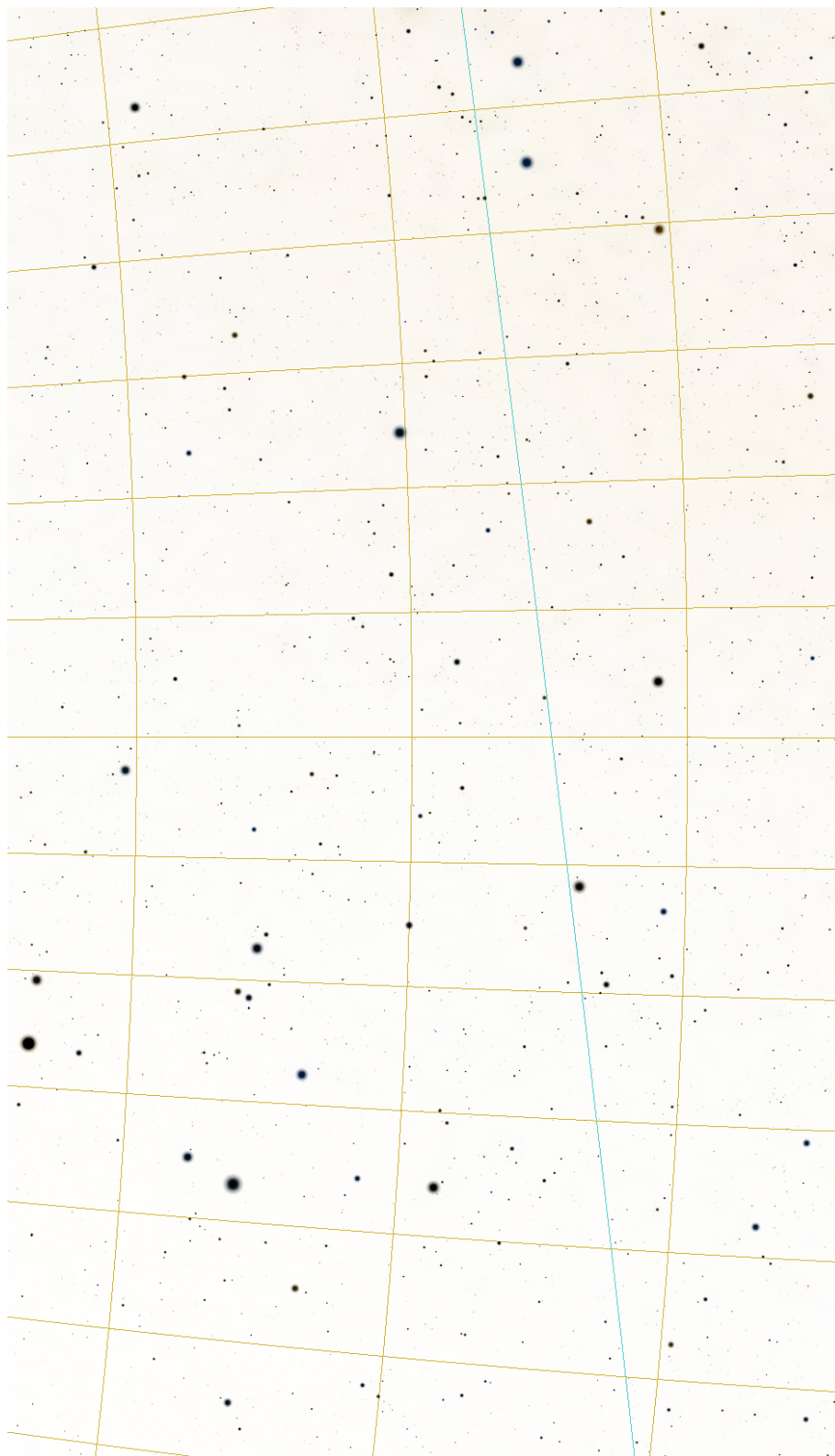
Velká poloosa Jupiteru po dosažení naměřené hodnoty  $\omega$  vyšla  $a_J = 6,9(24)$  au. Kvůli velkému rozptylu jednotlivých měření úhlových rychlostí v tabulce 1 je i nejistota velké poloosy Jupiteru velká. Nejistotu jsme spočítali ze vztahu

$$\Delta a_J = \left| \frac{\partial a_J}{\partial \omega} \right| \Delta \omega = \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{1 + 4\frac{\omega_Z}{\omega}} - 1 \right) \frac{1}{2\sqrt{1 + 4\frac{\omega_Z}{\omega}}} \left( 4\frac{\Omega}{\omega^2} \right) \Delta \omega = 2,4 \text{ au.}$$

Nejistotu jsme mohli odhadnout i jinými způsoby, například tak, že bychom do rovnice (2) dosadili krajní hodnoty odhadů úhlové rychlosti  $\omega - \Delta\omega$  a  $\omega + \Delta\omega$ . Správná hodnota velké poloosy  $a_J = 5,2$  au se nachází v rozmezí  $1\sigma$  od naší spočítané hodnoty.

Autorem testu A je kolektiv autorů AO. Úlohu B navrhli Daniel Čtvrtečka a Jakub Vošmera, úlohu C navrhli David Kománek, Radka Křížová a Jakub Vošmera, úlohu D navrhl Jindřich Jelínek.

Krajské kolo 2025/26, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



**Obrázek 4:** Mapa oblasti souhvězdí Blíženců, kde se v době konání krajského kola bude vyskytovat Jupiter. Je vyznačena ekliptika a rovníková síť souřadnic s krokem  $5^\circ$  v deklinaci a  $0^h10^m$  v rektascenzi.