Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

A Přehledový test (online)

(max. 30 bodů)

POKYNY: Úvodní test se řeší online na https://olympiada.astro.cz. Přihlašovací údaje získají nově registrovaní úspěšní řešitelé školního kola e-mailem. Úspěšní řešitelé, kteří mají registraci z minulých ročníků, mají stále stejné přihlašovací údaje. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **12. 3. 2026** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je **1 bod**. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Fiat lux

(max. 18 bodů)

Hvězdy (včetně Slunce) září díky jaderným reakcím, které probíhají v jejich nitru při velmi vysokých teplotách a tlacích. V těchto reakcích se lehké částice spojují do těžších během procesu, který se nazývá jaderná fúze. Důležité je, že hmotnost vzniklé částice je o něco menší, než je součet hmotností částic, které do reakce vstoupily. Tato „chybějící“ část hmotnosti Δm se podle známého vztahu $E = \Delta mc^2$ přemění na energii E, kterou hvězdy vyzařují především ve formě elektromagnetického záření. Zbylou část této energie odnášejí částice zvané neutrina. Jedná se ovšem o natolik malá procenta, že příspěvky neutrin v prvních částech úlohy zanedbáme.

Nejdůležitější jadernou reakcí ve Slunci je tzv. proton-protonový řetězec, zkráceně p-p řetězec. V tomto řetězci se protony (jádra atomů vodíku) postupně slučují a výsledkem celého procesu je vznik jádra helia. Celý p-p řetězec je poměrně složitý (viz obrázek 1), ale zjednodušeně jej můžeme popsat rovnicí

$$4 \text{ protony} \longrightarrow \text{jádro helia} + \text{energie}\,.$$

Tip: V této úloze budeme pro zapisování velkých a malých čísel používat mocninný zápis: například číslo 74 800 000 zapíšeme jako $7{,}48 \cdot 10^7$, zatímco číslo 0,000 023 lze vyjádřit jako $2{,}3 \cdot 10^{-6}$. Mocninný zápis velkých a malých čísel je vysvětlen například ve studijním textu https://olympiada.astro.cz/images/ao_text_01_EF.pdf.

a) Vypočítej energii, která se uvolní při jednom p-p řetězci podle výše uvedené zjednodušené rovnice. Výsledek uveď v joulech. Hmotnost jednoho protonu je 1,007 3 u a hmotnost jádra helia je 4,001 5 u, kde u značí tzv. atomovou hmotnostní jednotku. Ta má hodnotu $1\,\mathrm{u} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Rychlost světla je rovna $c = 2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

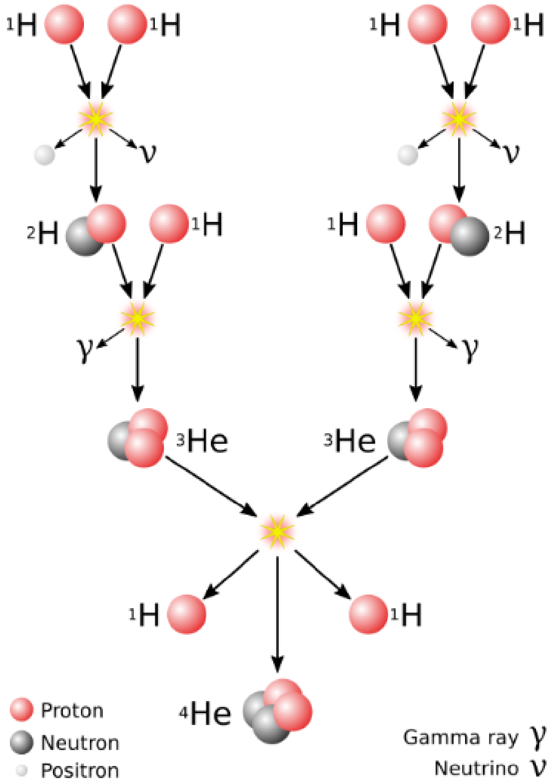
Uvolněná energie bude odpovídat rozdílu Δm hmotnosti čtyř protonů a jednoho jádra helia, tedy

$$\Delta m = (4 \cdot 1{,}007\,3 - 4{,}001\,5)\,\mathrm{u} = 0{,}027\,7\,\mathrm{u} \doteq 4{,}601\,0 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}\,.$$

Podle relativistického vztahu mezi hmotností a energií z úvodu pak pro uvolněnou energii E dostáváme

$$E = \Delta mc^2 = 4{,}601\,0 \cdot 10^{-29} \cdot (2{,}998 \cdot 10^8)^2\,\mathrm{J} \doteq 4{,}135\,4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}\,.$$

Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení



Obrázek 1: p-p řetězec ve své plné kráse (zdroj: Wikipedie).

Energie, kterou Slunce vyzařuje, se šíří do prostoru rovnoměrně na všechny strany. Část této energie dopadá i na Zemi. Sluneční konstanta S je fyzikální veličina, která udává, jaký výkon slunečního záření dopadá na plochu $1\,\mathrm{m}^2$, pokud se tato plocha nachází ve vzdálenosti $1\,\mathrm{au}$ od Slunce a je namířena kolmo ke směru šíření záření. Její hodnota je přibližně $S = 1\,361\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}$.

b) Na základě hodnoty sluneční konstanty a hodnoty energie uvolněné při jedné reakci p-p řetězce vypočtené v předchozím úkolu vypočti (řádově), kolik takových reakcí musí ve Slunci proběhnout za jednu sekundu. Astronomická jednotka má hodnotu $1\,\mathrm{au} = 1{,}496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.

Nápověda: Může se ti hodit, že povrch koule o poloměru r spočítáme podle vztahu $S = 4\pi r^2$.

Z hodnoty sluneční konstanty nejprve určíme zářivý výkon Slunce $L_\odot$. Ten je vyzařován rovnoměrně do celého prostoru. Stojíme-li ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{au}$ od Slunce, tedy na pomyslné kouli s povrchem $4\pi r^2$, dopadá na jednotku plochy výkon

$$S = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}\,.$$

Zářivý výkon Slunce tedy vyjádříme jako

$$L_\odot = 4\pi r^2 S = 4\pi\cdot(1{,}496\cdot 10^{11})^2\cdot 1\,361\,\mathrm{W} \doteq 3{,}828\cdot 10^{26}\,\mathrm{W}\,.$$

Zářivý výkon má jednotku $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$, každou sekundu tedy potřebujeme získat energii $3{,}828\cdot 10^{26}\,\mathrm{J}$. Na to je zapotřebí, aby proběhlo N p-p reakcí s energií $E = 4{,}135\,4\cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$, kde

$$N = \frac{3{,}828\cdot 10^{26}}{4{,}135\cdot 10^{-12}} \doteq 9{,}26\cdot 10^{37} \approx 10^{38}.$$

Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Otázkou je, jak dlouho bude Slunci tento zdroj energie stačit. Pro jednoduchost budeme uvažovat, že zářivý výkon Slunce zůstane v čase konstantní. Dostatečná teplota a tlak na to, aby p-p řetězec probíhal, jsou pouze v oblasti slunečního jádra, která má podle modelů hmotnost přibližně $0{,}15M_\odot$. Vodík v jádře je už z určité části spotřebován. Předpokládej, že na počátku života se Slunce skládalo ze 70 % z vodíku a ze 30 % z helia (procenta jsou hmotnostní), že žádné těžší prvky se v něm nevyskytují a že Slunce je v současnosti staré 4,6 miliard let.

c) Odhadni, jak dlouho může Slunce ještě svítit, než se veškeré zásoby vodíku v jeho jádře přemění na helium. Hmotnost Slunce je rovna $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$.

Známe jednak hmotnost Slunce, pak také podíl jeho hmotnosti, který tvoří oblasti dostatečně teplé pro zážeh p-p řetězce a konečně kolik procent jádra bylo na začátku tvořeno vodíkem. Celková hmotnost M_H vodíku dostupného pro přeměnu na helium tedy na počátku života Slunce byla

$$M_\mathrm{H} = 0{,}70 \cdot 0{,}15 M_\odot = 0{,}70 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \doteq 2{,}1 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}\,.$$

Zároveň známe počet N reakcí, který proběhne za sekundu. Víme také, že na jednu takovou reakci se spotřebují 4 jádra vodíku (každé o hmotnosti $m_\mathrm{p} = 1{,}0073\,\mathrm{u} \approx \mathrm{u}$). Slunce tedy mohlo spalovat vodík po dobu

$$T = \frac{M_\mathrm{H}}{4Nm_\mathrm{p}}\,\mathrm{s} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{29}}{4 \cdot 9{,}26 \cdot 10^{37} \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27}}\,\mathrm{s} \doteq 3{,}4 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} \doteq 10{,}8 \cdot 10^{9}\,\mathrm{let}\,.$$

Odečteme-li současné stáří Slunce, vyjde nám, že může zásoby vodíku využívat ještě 6,2 miliardy let , což, ačkoli byl použit velmi zjednodušený model, řádově souhlasí s obecně přijímanou životností Slunce na hlavní posloupnosti.

Jak jsme již zmínili v úvodu, část energie odnášejí také tzv. neutrina. Ta jsme zatím v předchozích částech úlohy ignorovali, protože jejich vliv na výsledky by byl zanedbatelný. Nyní se však zaměříme právě na ně. Neutrina odnášejí přibližně 2 % energie uvolněné při p-p řetězci a každý řetězec vyprodukuje právě 2 neutrina.

d) Vypočti, kolik slunečních neutrin projde za jednu sekundu lidským tělem (stojícím na povrchu Země), které má plochu průřezu přibližně $A \approx 0{,}25\,\mathrm{m}^2$. Odhadni také, jaká energie E_ν v průměru připadá na jedno sluneční neutrino. Výsledek uveď v násobcích energie E_γ jednoho fotonu viditelného světla, která je přibližně $E_\gamma = 3{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Předpokládej, že neutrina se od svého vzniku v nitru Slunce šířila prostorem jako volné částice. Oba výsledky uveď řádově.

Při každé reakci se vytvoří 2 neutrina a za sekundu proběhne N reakcí. Ve vzdálenosti $r = 1\,\mathrm{au}$ od Slunce tedy každou sekundu dopadne na plochu $1\,\mathrm{m}^2$

$$X = \frac{2N}{4\pi r^2} = \frac{2 \cdot 9{,}26 \cdot 10^{37}}{4\pi \cdot (1{,}496 \cdot 10^{11})^2} \doteq 6{,}6 \cdot 10^{14}$$

slunečních neutrin. Na plochu $0{,}25\,\mathrm{m}^2$ pak za jednu sekundu dopadne

$$0{,}25X \doteq 1{,}7 \cdot 10^{14} \approx 10^{14}$$

neutrin. Na obě uvolněná neutrina připadají dohromady 2 % energie uvolněné při p-p řetězci. Na jedno tedy připadá energie

$$E_\nu = \frac{0{,}02E}{2} = 0{,}01 \cdot 4{,}1354 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J} = 4{,}1354 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \doteq \frac{4{,}1354 \cdot 10^{-14}}{3{,}6 \cdot 10^{-19}} E_\gamma \approx 10^5 E_\gamma\,.$$

Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

C Zatmění Slunce na Merkuru?

(max. 12 bodů)

Když se Měsíc dostane přímo mezi Slunce a Zemi, může nastat zatmění Slunce. Je to způsobeno tím, že se Měsíc na obloze jeví přibližně stejně úhlově veliký jako Slunce. Planeta Merkur žádný přirozený satelit nemá, ale představ si situaci, kdy by Měsíc obíhal okolo Merkuru po stejné trajektorii jako obíhá okolo Země. V tomto příkladu si spočítáme, jestli by i za takovéhoto scénáře mohlo nastat zatmění Slunce.

a) Spočítej, jaká je úhlová velikost Slunce na obloze při pohledu z Merkuru. Výsledek zaokrouhli na setiny stupně. *Nápověda: Můžeš použít buď vzorec pro výpočet délky oblouku nebo délku tětivy, protože se jedná o malé úhly.*

Vzdálenost Slunce–Merkur	57 909 000 km
Vzdálenost Země–Měsíc	384 000 km
Poloměr Slunce	695 700 km
Poloměr Merkuru	2 440 km
Poloměr Měsíce	1 740 km

Tabulka 1: Hodnoty, které by se mohly hodit k výpočtům.

Délka oblouku u kružnice s poloměrem r je: $L = \theta_{[\mathrm{rad}]}\, r$, tj. v našem případě

$$2r_\odot = \theta_\odot\, d_{\mathrm{S-M}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_\odot = 2r_\odot/d_{\mathrm{S-M}} = 2 \cdot 695\,700\,\mathrm{km}/57\,909\,000\,\mathrm{km} = 0{,}024\,06\,\mathrm{rad} = 1{,}38^\circ$$

Úhlová velikost Slunce při pohledu z Merkuru je 1,38°.

b) Spočítej úhlovou velikost Měsíce na zemské obloze. Využij hodnoty z tabulky a výsledek zaokrouhli na setiny stupně.

Budeme postupovat stejně jako v minulém příkladu

$$2r_{\mathrm{M}} = \theta_{\mathrm{M}}\, d_{\mathrm{Z-M}}$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{\mathrm{M}} = 2r_{\mathrm{M}}/d_{\mathrm{Z-M}} = 2 \cdot 1\,740\,\mathrm{km}/384\,000\,\mathrm{km} = 0{,}009\,06\,\mathrm{rad} = 0{,}52^\circ$$

Úhlová velikost Měsíce při pohledu ze Země je 0,52°.

c) Pokud by Měsíc obíhal Merkur ve stejné vzdálenosti, v jaké obíhá Zemi, jaký by musel mít nejmenší poloměr, aby způsobil na Merkuru úplné zatmění Slunce. Výsledek uveď ve stovkách km.

Měsíc je na zemské obloze úhlově stejně veliký jako Slunce, proto dochází k zatmění. Stejně by to mělo platit na Merkuru.

$$r = r_{\mathrm{M}} \frac{\theta_\odot}{\theta_{\mathrm{M}}} = 1\,740\,\mathrm{km} \cdot \frac{1{,}38^\circ}{0{,}52^\circ} = 4\,600\,\mathrm{km}$$

d) Zamysli se a nejvýše jednou větou zdůvodni, jestli by mohl mít Merkur takový satelit.

Měsíc by v takovém případě byl asi dvakrát větší než Merkur, proto není možné, aby měl Merkur takový „satelit“.

Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

D Llamarama

(max. 20 bodů)

V této úloze se zaměříme na dva typické aspekty života v ekvádorských Andách. Těmi jsou chov lamy krotké a poloha poblíž zemského rovníku. Celková populace lamy v této jihoamerické zemi dosahuje řádově desítek tisíc kusů, a tak je více než pravděpodobné, že některé z nich se kromě spásání horské vegetace, nošení nákladu a hlídání stád ovcí věnují rovněž pozorování noční oblohy.

Obrázek 2: Lama krotká.

Jedna taková lama-astronomka si nemohla nevšimnout zvláštní konstelace identických družic. Ze svých pozorování, která provedla ve dnech okolo podzimní rovnodennosti (doznívající období sucha), vyvodila následující závěry:

- Všechny družice z konstelace se po obloze pohybují přesně od západu na východ, prolétají zenitem v pravidelných odstupech $\Delta t = 1{,}35\,\mathrm{min}$ a dosahují v zenitu stejné vizuální hvězdné velikosti jako hvězda Enif (ε Pegasi), tedy $m = 2{,}35\,\mathrm{mag}$.
- Přelety družic jsou pozorovatelné pouze večer po západu Slunce a nad ránem před východem Slunce. Přelet nikdy není pozorovatelný celý: v jistém bodě večerního přeletu od západu na východ družice „zmizí“ a tento bod se posouvá stále více na západ s rostoucím časem, který uplynul od západu Slunce. V případě ranních přeletů se naopak družice v jistém bodě trajektorie na obloze „objeví“ a pokračuje dále směrem na východ. Lama si rovněž všimla, že okamžik, kdy družice mizí přesně v zenitu, nastává v čase $\tau = 72{,}0\,\mathrm{min}$ po západu Slunce. Stejně tak 72,0 min před východem Slunce se družice přesně v zenitu objevují.

Tvým úkolem bude lamě pomoct najít odpovědi na následující otázky. Předpokládej, že družice svítí pouze odraženým světlem od Slunce a že jednotlivé družice mají tvar dokonale odrazivých koulí, které příchozí světlo od Slunce odráží rovnoměrně do všech směrů. Pro jednoduchost zanedbej všechny jevy spojené s přítomností zemské atmosféry (jako jsou například refrakce a extinkce) a uvažuj, že lama má přístup k ideálnímu horizontu. Slunce považuj za bodový zdroj světla o pozorované vizuální hvězdné velikosti $m_\odot = -26{,}74\,\mathrm{mag}$ a Zemi modeluj jako dokonalou kouli o poloměru $R = 6378\,\mathrm{km}$ a hmotnosti $M = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Newtonova gravitační konstanta má hodnotu $G = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$.

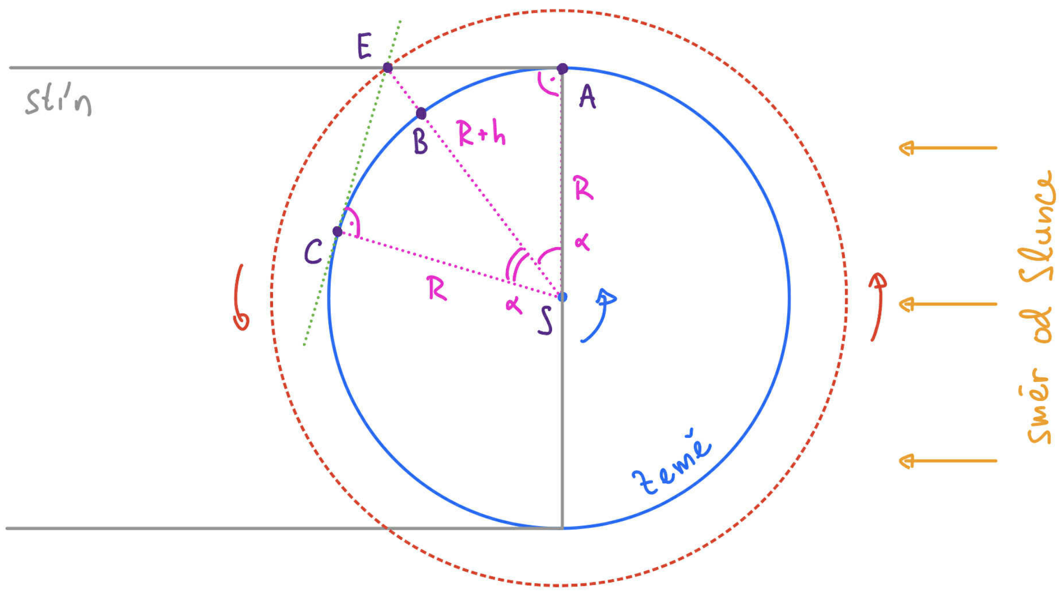
a) Jaký je důvod „mizení“ družic na obloze během přeletů? Jakou část noci (v procentech) může lama v principu pozorovat nějakou družici z konstelace? Uvažuj pouze období okolo rovnodennosti. Za účelem lepšího pochopení situace začni nákresem z pohledu od severního světového pólu („shora“): vyznač směr od Slunce, oběžnou dráhu družic kolem Země, směr rotace Země a oběhu družic a také polohu zemského stínu.

> **Nákres situace vidíme na obrázku 3.** Oběžná dráha družic je zde zobrazena jako kruhová, což plyne z rovnoměrnosti časových odstupů družic při průletu zenitem. Nákres je zároveň vyveden v soustavě, ve které je spojnice Slunce a Země v klidu. V této soustavě se Země otočí vůči Slunci o 360° za 24 hodin (jeden sluneční den). Na rovníku během

rovnodennosti trvá noc polovinu této doby, tedy 12 hodin, což odpovídá otočení o 180°. **Jelikož družice můžeme pozorovat skrze světlo odražené od Slunce, přestanou být vidět v okamžiku, kdy ve dráze vstoupí do zemského stínu** (bod E). Tento bod leží v zenitu pro pozorovatele, který se na zemském povrchu nachází na rovníku v bodě B. Pro pozorovatele v bodě A leží bod E vstupu družic do zemského stínu na východním horizontu, zatímco Slunce právě zapadá přesně na západě. Tento pozorovatel tedy v principu může sledovat kompletní přelety družic (nebýt rozptylu slunečního světla v atmosféře). Naopak pro pozorovatele v bodě C leží bod E vstupu na západním horizontu a tento pozorovatel tedy již nemůže přelety sledovat. Z nákresu na obrázku 3 je zároveň patrné, že body A a C jsou kolem bodu B položeny symetricky. Odtud plyne, že pozorovatel se vlivem rotace Země z bodu A do bodu C dostane za dvojnásobný čas než z bodu A do bodu B. Lama tedy družice může pozorovat v intervalu o délce $2\tau = 144\,\mathrm{min}$ po západu Slunce a rovněž ve stejně dlouhém intervalu před východem Slunce. Jelikož noc je na rovníku dlouhá polovinu slunečního dne (při zanedbání atmosférických jevů a konečné velikosti slunečního disku), dostáváme, že **lama může nějakou družici pozorovat v průběhu**

$$\frac{4\tau}{12\,\mathrm{h}} = \frac{(144+144)\,\mathrm{min}}{12\,\mathrm{h}} = 40\,\%$$

z celkové doby trvání noci.



Obrázek 3: Družice obíhající Zemi ve výšce h v rovině rovníku. Situace je zachycena v období okolo rovnodennosti pohledem ze směru od severního světového pólu. Nákres není vyveden v měřítku.

b) V jaké výšce h (v kilometrech) nad povrchem Země družice z dané konstelace obíhají? K vyřešení úkolu využij vhodný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém vypočti velikosti vnitřních úhlů.

Zaměřme se na pravoúhlý trojúhelník ESA. Z obrázku 3 potom vidíme, že výška h, ve které družice obíhá, splňuje vztah

$$R = (R+h)\cos\alpha\,,$$

kde $R = 6378\,\mathrm{km}$ značí poloměr Země a α je úhel při vrcholu S v pravoúhlém trojúhelníku ESA. Neboli úhel, který mezi sebou svírají průvodiče bodů A a B. V naší soustavě (s pevnou spojnicí Slunce-Země) se Země otočí za 24 hodin o 360°. Úhlová rychlost rotace vůči Slunci je tedy $\omega = 360°/24\,\mathrm{h} = 15°$ za hodinu. Čas $\tau = 72{,}0\,\mathrm{min} = 1{,}20\,\mathrm{h}$ je zároveň doba, za kterou se pozorovatel přesune z bodu A do bodu B. Úhel α, který tím na Zemi opíše, je potom roven

$$\alpha = \omega\tau = 15°\,\mathrm{h}^{-1} \cdot 1{,}20\,\mathrm{h} = 18{,}0°\,.$$

Celkem tedy pro výšku dostáváme

$$h = R\left(\frac{1}{\cos 18{,}0°} - 1\right) \doteq 330\,\mathrm{km}\,.$$

Výška kolem 330 km je typická pro nízkou oběžnou dráhu Země (LEO). V podobných výškách (např. 350 km–450 km) obíhá Mezinárodní vesmírná stanice (ISS), ale i mnohé další družice.

c) Jaká je jejich siderická oběžná perioda P_{sid} a jaká je odpovídající perioda P_{syn} mezi dvěma po sobě jdoucími průchody jedné družice zenitem lamy? Jak dlouho by trval jeden celý přelet jedné družice od západu na východ? (Neboli: jak dlouho je možno pozorovat družici v ideálním případě, kdy je pro lamu viditelná po celou dobu, co je družice nad obzorem?) Výsledky uveď v minutách.

Nápověda: Obíhá-li těleso o zanedbatelné hmotnosti kolem jiného tělesa o hmotnosti M po kruhové dráze o poloměru r, můžeme pro siderickou oběžnou periodu P_{sid} podle 3. Keplerova zákona psát vztah

$$\frac{r^3}{P_{\mathrm{sid}}^2} = \frac{GM}{4\pi^2}\,,$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta.

Ze 3. Keplerova zákona dostaneme siderickou oběžnou periodu jako

$$P_{\mathrm{sid}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(R+h)^3}{GM}}\,,$$

číselně $P_{\mathrm{sid}} \doteq 91\,\mathrm{min}$. Při určení P_{syn} nesmíme zapomenout uvážit rotaci Země kolem její osy (siderická perioda $T_{\mathrm{Z}} = 23\,\mathrm{h}\,56\,\mathrm{min}\,4\,\mathrm{s}$). Dostaneme

$$P_{\mathrm{syn}} = \frac{P_{\mathrm{sid}}T_{\mathrm{Z}}}{T_{\mathrm{Z}} - P_{\mathrm{sid}}}\,,$$

číselně $P_{\mathrm{syn}} \doteq 97\,\mathrm{min}$. Z nákresu na obrázku 3 vidíme, že během jednoho kompletního přeletu se průvodič družice v soustavě spojené se Zemí otočí o úhel 2α. Pro délku trvání přeletu tedy z trojčlenky dostaneme

$$\frac{2\alpha}{360°} \cdot P_{\mathrm{syn}} = \frac{2\tau}{24\,\mathrm{h}} \cdot P_{\mathrm{syn}} \doteq 9{,}7\,\mathrm{min}\,.$$

d) Kolik družic konstelace celkem obsahuje? Jaký je největší počet $n_{\max}$ družic, který v jeden okamžik může mít lama nad obzorem (včetně těch, které zrovna nejsou viditelné)?

Celkový počet N družic v konstelaci vypočteme jako

$$N = \frac{P_{\mathrm{syn}}}{\Delta t}\,,$$

kde Δt je interval, v jakém lama vidí družice procházet zenitem. Dosadíme-li do tohoto vztahu za P_{syn} (bez zaokrouhlení), dostaneme výsledek $N = 72$. Abychom určili $n_{\max}$, uvažme situaci, kdy jedna z družic právě zapadá na východním obzoru. Průvodiče sousedních družic ve dráze spolu svírají úhel $360°/72 = 5°$, zatímco průvodiče dvou družic, z nichž jedna právě vychází a jedna právě zapadá, by spolu svíraly úhel $2\alpha = 36°$. Odtud plyne, že v jeden okamžik může mít lama nad obzorem nejvíce

$$n_{\max} = \frac{35°}{5°} = 7$$

mezer mezi družicemi, tedy vidí 8 družic z konstelace.

e) Jaký je poloměr r každé z družic (v metrech)? K určení r vypočtěte světelný výkon zachycený průřezem družice a využijte Pogsonovu rovnici. Družice světlo od Slunce rozptylují rovnoměrně do všech směrů.

Tip: V Pogsonově rovnici vystupuje matematická operace *logaritmus*. Práce s logaritmy je vysvětlena například ve studijním textu `https://olympiada.astro.cz/images/ao_text_01_EF.pdf`.

Označme jako $I_\odot$ celkový světelný výkon Slunce, který dopadá na jednotku plochy v okolí Země (kolmo ke směru od Slunce). Družice svým průřezem zachytí celkový světelný výkon $I_\odot \cdot \pi r^2$. Jelikož se jedná o dokonale odrazivou kouli, rozptýlí družice tento výkon rovnoměrně do všech směrů. Ve vzdálenosti h od družice (odpovídající vzdálenosti mezi lamou a družicí v okamžiku, kdy lama vidí družici v zenitu) tedy lama registruje světelný výkon I na jednotku plochy, pro který platí

$$I = \frac{I_\odot \cdot \pi r^2}{4\pi h^2} = I_\odot \left(\frac{r}{2h}\right)^2.$$

Potom můžeme pro vizuální hvězdnou velikost m družice, kterou lama pozoruje v zenitu, psát Pogsonovu rovnici ve tvaru

$$m - m_\odot = -2{,}5 \log \frac{I}{I_\odot} = -5 \log \frac{r}{2h}\,.$$

Odtud můžeme poloměr r jedné družice vyjádřit jako

$$r = 2h \cdot 10^{-0{,}2(m - m_\odot)} \doteq 1{,}0\,\mathrm{m}\,.$$

Vidíme tedy, že koule o poloměru 1 m na nízké oběžné dráze postačuje k vytvoření zdroje, který je pro pozorovatele na povrchu Země srovnatelný s jasnými hvězdami na obloze.

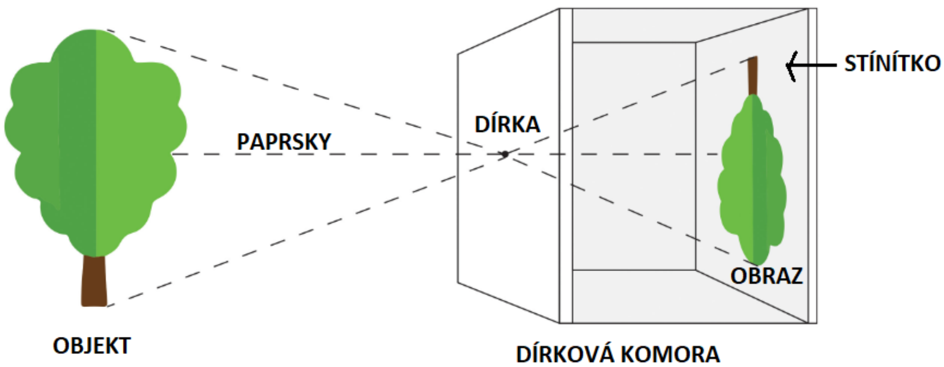
Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

E Dírková komora

(max. 20 bodů)

POKYNY: Doporučujeme pozorování neodkládat na poslední chvíli před uzávěrkou (hlavně kvůli počasí). U problémů s řešením oznámených po začátku března bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. **Řešení (nebo alespoň snaha o řešení) pozorovací úlohy je nutnou podmínkou pro postup do finále Astronomické olympiády. Všechny potřebné výpočty zapiš, pouhý správný výsledek bez postupu neuznáváme!**

Cílem této úlohy bude sestavení zařízení zvaného dírková komora a jeho využití k změření úhlového průměru Slunce. V podstatě se jedná o krabici s malou dírkou v jedné stěně. Světlo z objektu vně krabice, které touto dírkou projde, vytvoří na protější stěně krabice obraz objektu. Toho v minulosti využívali například malíři, kteří pak vzniklý obraz mohli jednoduše obkreslit. Dírková komora tak byla jistým předchůdcem fotoaparátu. Schéma dírkové komory ukazuje obrázek 4.



Obrázek 4: Schéma dírkové komory.

a) Sestav si vlastní dírkovou komoru.
Budeš k tomu potřebovat dlouhou rovnou rouru, jejíž délka by měla být alespoň 80 cm a průměr alespoň 4 cm. Materiál roury musí být takový, aby do něj bylo možno poblíž jednoho konce udělat otvor. Ten by měl být tak velký, aby skrz něj bylo možné zevnitř vidět většinu koncového otvoru roury. Tento konec roury zaslep kusem milimetrového papíru tak, aby skrz udělaný otvor byla vidět jeho strana potištěná čtvercovou sítí. Rovina milimetrového papíru by měla být kolmá na osu roury.

Dále ustřihni dostatečně velký kousek alobalové folie a upevni ho na druhý (otevřený) konec roury tak, aby rovina folie byla kolmá na osu roury (tedy totéž, co platilo pro rovinu milimetrového papíru). Je důležité napnout fólii tak, aby byla rovná a hladká. Přesně do středu folie udělej co nejmenší dírku. Vhodné je použít tenkou jehlu. Dírka by měla být pokud možno kruhová s co nejčistšími okraji.

Hotovou dírkovou komoru vyfotografuj a fotografii nezapomeň přiložit k řešení.

b) Pozoruj dírkovou komorou obraz Slunce.
Dírková komora je nyní připravena k pozorování.

DO SLUNCE SE NEDÍVEJ PŘÍMO! POUZE SLEDUJ JEHO OBRAZ NA MILIMETROVÉM PAPÍŘE OTVOREM VYSTŘIŽENÝM V ROUŘE.

Krajské kolo 2025/26, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Nejlepší je stát ke Slunci zády s dírkovou komorou přes rameno, a to tak, že konec s milimetrovým papírem máme před sebou, zatímco konec s dírkou je za naším ramenem přibližně směrem ke Slunci. Pro přesnější namíření sleduj stín roury na zemi před sebou. Aby byla dírka natočena přímo ke Slunci, měl by být co nejmenší. Jakmile se ti povede komoru správně nasměrovat, měl bys vidět na milimetrovém papíře malý světlý kotouček. Natáčej komoru, dokud obraz nebude vycentrovaný na střed papíru.

Až obraz Slunce najdeš, zkus změřit jeho velikost tak, že spočítáš počet čar na milimetrovém papíře, které obraz Slunce překrývá. Zajímá nás průměr obrazu, tedy počet čar od okraje kotoučku k jeho protějšímu okraji. Pro větší přesnost proveď měření alespoň třikrát a průměr obrazu Slunce vypočti jako aritmetický průměr jednotlivých naměřených hodnot.

c) Urči úhlový průměr Slunce.

Pro určení úhlového průměru Slunce budeš kromě již změřené velikosti jeho obrazu potřebovat znát délku roury, tedy vzdálenost od dírky po střed stínítka. Označíme-li tuto vzdálenost d a průměr obrazu Slunce D, můžeme úhlový průměr δ Slunce na obloze v radiánech vypočítat ze vztahu

$$\delta = \frac{D}{d}\,.$$

Vypočti úhlový průměr Slunce na obloze v úhlových minutách.

d) Urči fyzický průměr Slunce.

Z vypočteného úhlového průměru Slunce δ a známé vzdálenosti a Země–Slunce lze vypočítat fyzický průměr Slunce $D_{\odot}$. Platí

$$D_{\odot} = \delta a\,.$$

Stejně jako v předchozí části dosazujeme δ v radiánech. Vypočti fyzický průměr Slunce a výsledek uveď jako násobek průměru Země. Můžeš předpokládat, že vzdálenost Země od Slunce je známa.