

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **15. 3. 2026** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Cesta do středu Slunce*(max. 30 bodů)*

Povrchová teplota Slunce je jedním z mála snadno měřitelných parametrů této hvězdy; přesto z ní lze za použití vhodného fyzikálního modelu odhadnout i teplotu jádra. Letos 5. září navíc uplyne 120 let od úmrtí Ludwiga Boltzmannova, jehož práce na statistické fyzice a termodynamice tvoří teoretický základ pro úvahy o vnitřní stavbě hvězd. V této úloze nejprve využijeme jednoduchý homogenní model k hrubému odhadu teploty slunečního jádra. Následně se pokusíme výsledek zpřesnit pomocí polytropického modelu založeného na hydrostatické rovnováze, který je již skutečné hvězdné struktury bližší.

V prvním nejtriviálnějším přiblížení si představme Slunce jako homogenní kouli ideálního jednoatomového vodíku (hmotnost jednoho atomu je $m_{\text{H}} \doteq 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg) o známém poloměru R a hmotnosti M . V takovém případě můžeme použít tzv. viriálový teorém, podle kterého je rozdělení celkové mechanické energie částic dáno vztahem

$$2U = -E_{\text{p}},$$

kde U je vnitřní (kinetická) energie částic plynu, zatímco E_{p} je energie potenciální.

a) Vyhledejte vztahy pro kinetickou energii částic ideálního jednoatomového plynu a gravitační potenciální energii homogenní koule a vypočtěte teplotu Slunce dle homogenního modelu. **[3 b]**

Kinetická energie ideálního plynu je

$$U = \frac{3}{2}NkT,$$

kde N je počet částic, k Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota. Pokud je Slunce tvořeno pouze jednoatomovým vodíkem, N si můžeme vyjádřit jako

$$N = \frac{M}{m_{\text{H}}}.$$

Gravitační potenciální energie homogenní koule o poloměru R a hmotnosti M je

$$E_{\text{p}} = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}.$$



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Po dosažení do viriálového teorému tedy dostáváme

$$3NkT = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

$$T = \frac{1}{5} \frac{GMm_H}{kR} \doteq 4,6 \cdot 10^6 \text{ K},$$

což odpovídá zhruba třetině reálné teploty jádra Slunce.

Předchozí model však zanedbává jakékoli změny hustoty materiálu vyvolané působením gravitace či protipůsobícím tlakem plynu a záření. Bez gradientu hustoty je nulový i gradient teploty, tedy vypočtená hodnota by odpovídala teplotě celého Slunce. Model je tak od reality velmi daleko. Proto musíme vzít v potaz přesnější model, který bude uvažovat hydrostatickou rovnováhu plynu.

Tzv. polytropický model je jedním z jednodušších, ale již poměrně realistických modelů hvězd, který připouští pouze polytropický děj, při němž je měrná tepelná kapacita c hvězdného materiálu konstantní, avšak mění se všechny stavové veličiny (teplota, tlak a objem). Můžeme jej popsat rovnicí

$$pV^\gamma = \text{konst.},$$

kde p je tlak, V objem a γ polytropický koeficient. Ten lze vyjádřit jako

$$\gamma = \frac{c - c_p}{c - c_V} = \text{konst.},$$

kde c je již zmíněná měrná tepelná kapacita při konkrétním polytropickém ději, c_p při izobarickém a c_V při izochorickém ději (obecně $c_p \neq c_V$). Předpoklad konstantní měrné tepelné kapacity c však nutně znamená chemicky homogenní látku s konstantním stupněm ionizace. Předpokládejme opět Slunce tvořené jednoatomovým ideálním vodíkem o atomové hmotnosti m_H .

b) Jakým dějům odpovídají hodnoty měrné tepelné kapacity $c = 0$, $c = c_p$, $c = c_V$ a $c \rightarrow \infty$? Vysvětlete, proč. [2 b]

Nápověda: Mohla by se vám hodit stavová rovnice ideálního plynu $pV = NkT$, kde N je počet částic plynu, k Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota, a také Poissonův zákon adiabatického děje $pV^\kappa = \text{konst.}$, kde $\kappa = c_p/c_V$.

Hodnoty stačí dosadit do rovnice pro polytropický děj, tedy pro $c = 0$ dostáváme $\gamma = c_p/c_V$, což odpovídá adiabatickému ději, pro $c = c_p$ máme $pV^0 = p = \text{konst.}$, tedy izobarický děj, pro $c = c_V$ pak $pV^\infty = \text{konst.}$, což odpovídá izochorickému ději a nakonec pro $c \rightarrow \infty$ máme $pV = \text{konst.}$, což ze stavové rovnice musí znamenat izotermický děj.

Nyní však potřebujeme upřesnit hodnotu γ . Pro pochopení vnitřní stavby je klíčové rozumět mechanismům přenosu energie. Jedním z nich je konvekce – proces, při kterém je teplo vynášeno makroskopickým pohybem hmoty, kdy horké bubliny plynu stoupají vzhůru a chladné klesají. Ve hvězdách tento proces nastupuje tam, kde záření nedokáže efektivně transportovat energii kvůli vysoké neprůhlednosti prostředí. V takovém případě lze hvězdu velmi dobře popsat adiabatickým modelem. Dále pak potřebujeme znát c_p a c_V . Obecně je měrná tepelná kapacita definovaná jako poměr tepla



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

dodaného látky ΔQ potřebného pro změnu její teploty o ΔT , $c = \Delta Q / \Delta T$. Dle prvního termodynamického zákona pak platí $\Delta Q = \Delta U + p\Delta V$, kde ΔU je změna vnitřní (kinetické) energie látky a ΔV změna jejího objemu. Prozatím zanedbáme tlak záření.

c) Určete hodnotu γ pro tento model. [3 b]

Nápověda: Hodnota c by měla odpovídat adiabatickému ději.

Začneme vyjádřením ΔU ze vztahu pro vnitřní energii ideálního plynu. Ta závisí na N a T , avšak N se nemění, proto platí

$$\Delta U = \frac{3}{2}Nk\Delta T.$$

Toto nám již stačí pro určení c_V , jelikož máme konstantní objem a tedy $\Delta V = 0$

$$c_V = \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{3}{2}Nk.$$

Pro vyjádření c_p již potřebujeme stavovou rovnici pro ideální plyn, kde se však p ani N nemění, tedy platí

$$p\Delta V = Nk\Delta T.$$

To již stačí k dosazení do prvního termodynamického zákona a dostáváme

$$c_p = \frac{\Delta U}{\Delta T} + \frac{p\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}Nk + Nk = \frac{5}{2}Nk.$$

Zbývá hodnota c . Předpokládáme však pouze adiabatické procesy a z předchozí části pro adiabatický děj máme $c = 0$. Po dosazení dostáváme

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{5}{3}.$$

d) Z rovnice pro polytropický děj ideálního plynu odvoďte závislost hustoty hvězdné hmoty na tlaku $\rho = \rho(p)$. Ve vztahu zahrňte všechny konstanty úměrnosti do jedné (neznámé) konstanty K . [1 b]

Objem V můžeme vyjádřit pomocí hustoty a hmotnosti, která se v něm nachází, m jako

$$V = \frac{m}{\rho}.$$

Po dosazení do rovnice pro polytropický proces

$$p \left(\frac{m}{\rho} \right)^\gamma = \text{konst.}$$

můžeme hmotnost m zahrnout do konstanty, jelikož je také konstantní, a získáváme závislost ve tvaru

$$\rho = Kp^{\frac{1}{\gamma}} = Kp^{\frac{3}{5}},$$

kde K je neznámá konstanta.



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

e) Podobně odvodte závislost termodynamické teploty na hustotě $T = T(\rho)$. [2 b]

Vyjdeme ze stavové rovnice

$$pV = NkT.$$

Za p dosadíme poslední výsledek, V vyjádříme pomocí hustoty a N jako poměr m/m_H

$$\left(\frac{\rho}{K}\right)^\gamma \frac{m}{\rho} = \frac{m}{m_H} kT.$$

Vychází

$$T = C\rho^{\gamma-1} = C\rho^{\frac{2}{3}},$$

kde C je konstanta o hodnotě

$$C = \frac{m_H}{k} K^{-\gamma}.$$

f) Vyjádřete gravitační zrychlení g pro hvězdnou hmotu ve vzdálenosti r od jádra pomocí hmotnosti m_\uparrow ve vrstvách, které jsou od jádra vzdálenější než r , a celkové hmotnosti Slunce M . Pomocí něj vyjádřete rozdíl hydrostatických tlaků Δp mezi tenkými vrstvami vzdálenými $\Delta r \ll R$ při konstantní hustotě ρ mezi těmito vrstvami. [1 b]

Na hmotu gravitačně působí pouze vrstvy s poloměrem menším než r , tedy

$$g = -\frac{G(M - m_\uparrow)}{r^2}.$$

Rozdíl hydrostatických tlaků při konstantní hustotě je

$$\Delta p = \rho g \Delta r = -\frac{G\rho(M - m_\uparrow)}{r^2} \Delta r.$$

Tímto jsme získali všechny rovnice stavby potřebné k numerickému výpočtu takového modelu, který můžete provést v libovolném programu (nejlépe v Pythonu, Originu, Excelu, atd.). Slunce si rozdělíte na X pomyslných sférických vrstev o stejné tloušťce Δr , přičemž první vrstva ($i = 0$) bude odpovídat slunečnímu povrchu a poslední vrstva ($i = X - 1$) slunečnímu jádru. Předpokládejte, že každá vrstva má svůj konstantní tlak, hustotu, teplotu a gravitační zrychlení, a že v rámci vrstvy platí závislosti odvozené z rovnice pro polytropický děj. Pro spuštění simulace budete ještě potřebovat okrajové podmínky:

- celková hmotnost Slunce $M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg,
- poloměr Slunce $R = 6,96 \cdot 10^8$ m,
- povrchová teplota $T_0 = 5770$ K.

g) Numericky vypočtete zadaný model Slunce pro ALESPONĚ 100 vrstev a přiložte graf závislosti teploty, hustoty a tlaku na vzdálenosti vrstvy od jádra. Přiložte také všechny případné mezivýpočty. [6 b]

Nápověda: Neznámé konstanty K se lze zbavit opakovaným tipováním její hodnoty a následným porovnáváním výsledku s vhodnou okrajovou podmínkou. Pro dostatečnou přesnost je třeba, aby byl rozdíl mezi zadanou a spočtenou hodnotou této okrajové podmínky alespoň o 4 řády menší než její hodnota. Je-li rozdíl větší, výpočet selže nebo vyjde nesmyslná hodnota. Pro tento model se bude hodnota K pohybovat v okolí 10^{-5} v SI jednotkách.

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Pro spuštění výpočtu je nejprve nutné vyjádřit si všechny okrajové podmínky, tedy i povrchovou hustotu a tlak. Využijeme inverze vztahů z **d**) a **e**) a spočteme ρ_0 a p_0 pomocí T_0 a konstanty K , kterou jsme zpočátku odhadli. Z povrchové hustoty a známého poloměru Slunce ($r_0 = R$) si můžeme vypočítat hmotnost první vrstvy jako

$$m_0 = V_0 \rho_0 \approx 4\pi R^2 \Delta r \rho_0,$$

kde si dovolujeme aproximaci objemu vrstvy jako součin jejího povrchu a tloušťky. Poslední veličinou, kterou je třeba spočítat, je gravitační zrychlení g_0 pomocí vztahu z **f**).

Nyní musíme vybudovat algoritmus, který z podmínek i -té vrstvy určí podmínky $(i+1)$ -té vrstvy. Poloměr následující vrstvy je zřejmý

$$r_{i+1} = r_i - \Delta r.$$

Pak známe absolutní změnu už jen jediné veličiny – tlaku. Z **f**) dostáváme

$$p_{i+1} = p_i - \Delta p_i = p_i - \rho_i g_i \Delta r.$$

Dle **d**) si pak vypočteme hustotu $(i+1)$ -té vrstvy, z čehož si spočteme i její teplotu podle **e**) a hmotnost. Nyní je třeba určit gravitační zrychlení, které závisí na hmotnosti vyšších vrstev, což je součet hmotností všech předchozích vrstev

$$m_{\uparrow} = \sum_{j=0}^i m_j.$$

Máme tedy vše k výpočtu tlaku v další vrstvě a proces můžeme opakovat.

Tento způsob výpočtu není jediný možný. Pokud počítáme parametry dalších vrstev dle vztahů z předchozích částí pomocí odhadnutého K , lze tlak krajní vrstvy považovat za zanedbatelný (tedy $p_0 = 0$). Závisí na něm pouze tlak další vrstvy, který se však změní jen zanedbatelně, jelikož druhý člen v součtu pro výpočet tlaku je o dva řády větší. Naopak okrajovou hustotu zanedbat nelze, pak bychom totiž neuvažovali žádnou hmotu a tlak by se neměl jak zvětšovat. Parametry spodních vrstev můžeme namísto dosazení do spočtených závislostí s konstantou K vypočíst i jejich porovnáním. Například hustotu $(i+1)$ -té vrstvy spočteme z poměru

$$\frac{\rho_{i+1}}{\rho_i} = \left(\frac{p_{i+1}}{p_i} \right)^{\frac{3}{5}}.$$

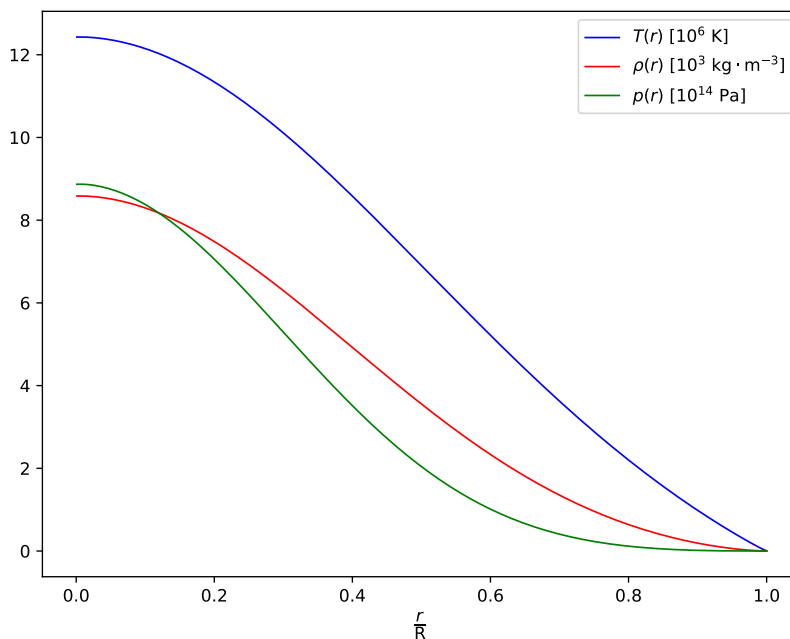
Zdá se, že jsme se tak zbavili závislosti na konstantě K . Na té však stále závisí počáteční podmínky, kde v tomto případě nelze zanedbat ani povrchový tlak, protože bychom dělili nulou.

Celý výpočet tedy počítá s odhadnutou konstantou K . Pokud je její hodnota příliš malá, výsledný součet hmotností všech vrstev bude menší než M a výsledek tedy nebude správný. Naopak pokud K nadhodnotíme, výraz $M - m_{\uparrow}$ ve vztahu pro g bude záporný a otočí se tedy směr gravitačního zrychlení, což povede k selhání výpočtu. Je tedy nutné konstantu K určit co nejpřesněji z porovnávání s M , případně výraz $M - m_{\uparrow}$ nahradit nulou, je-li záporný, abychom se vyhnuli selhání výpočtu.

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Kromě K je model ještě poměrně citlivý na X . Pro nejreálnější hodnoty chceme X mít co největší, proto se bude výsledek pro 100 vrstev poněkud lišit od výsledku pro 1000 vrstev.

V grafu na obrázku 1 jsou uvedeny výsledky z výpočtu pro $X = 1000$ vrstev s určenou hodnotou $K = 9,225 \cdot 10^{-6} \text{ kg}^{2/5} \cdot \text{s}^{6/5} \cdot \text{m}^{-12/5}$. Výsledná teplota jádra Slunce přitom vychází $T_C = 12,4 \cdot 10^6 \text{ K}$.



Obrázek 1: Výsledná závislost teploty T , hustoty ρ a tlaku p na vzdálenosti od slunečního centra r pro konvektivní model.

Nyní náš polytropický model povýšíme. Doposud jsme nepočítali se zářením, proto by předchozí model odpovídal spíše jádru Jupiteru než Slunce. V okolí jádra hvězd totiž dominuje transport tepla radiací nad konvekcí (zářivá zóna), kdežto ve vyšších vrstvách dominuje konvekce (konvektivní zóna). Obecně však už nemůžeme počítat pouze s adiabatickými ději. Dále zde již hraje nezanedbatelnou roli tlak záření, ačkoli oproti gravitačnímu tlaku plynu je stále malý. Tlak záření můžeme popsat rovnicí

$$p_r = \frac{1}{3} a T^4,$$

kde a je radiativní konstanta popsaná konstantami

$$a = \frac{4\sigma}{c} = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}.$$



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

h) Za předpokladu, že se tlaky ideálního plynu a záření sčítají, napište stavovou rovnici pro směs ideálního jednoatomového plynu a záření. N a V vyjádřete pomocí ρ a m_H . [1 b]

$$p = p_g + p_r = \frac{NkT}{V} + \frac{1}{3}aT^4 = \frac{\rho kT}{m_H} + \frac{1}{3}aT^4$$

i) Je-li poměr tlaku plynu a celkového tlaku $\beta = p_g/p = \text{konst.}$ (což si můžeme dovolit, jelikož tlak záření je řádově menší), vyjádřete celkovou hustotu $\rho = \rho(p)$ závislou POUZE na tlaku. Konstanty úměrnosti zahrňte do jedné nové neznámé konstanty K . [3 b]

Nápověda: Začněte vyjádřením termodynamické teploty.

Nejprve si vyjádříme termodynamickou teplotu

$$p = \frac{p_g}{\beta} = \frac{\rho kT}{\beta m_H} = \frac{p_r}{1 - \beta} = \frac{1}{3} \frac{aT^4}{1 - \beta}$$

$$T = \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3\rho k}{am_H} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Po dosazení zpět dostáváme

$$p = \frac{\rho k}{\beta m_H} T = \frac{\rho k}{\beta m_H} \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \frac{3\rho k}{am_H} \right)^{\frac{1}{3}} \propto \rho^{\frac{4}{3}}.$$

Po inverzi této závislosti platí

$$\rho = K p^{\frac{3}{4}},$$

kde K je opět nová neznámá konstanta (β totiž neznáme) daná předpisem

$$K = \frac{\beta m_H}{k} \left(\frac{a}{3(1 - \beta)} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

j) Porovnejte tento výsledek s výsledkem z části **d**) a určete polytropický koeficient. [1 b]

V části **d**) jsme odhalili závislost $p \propto \rho^\gamma$, která platí i v tomto případě, a dostáváme tedy $\gamma = 4/3$.

k) Vyjádřete závislost termodynamické teploty na hustotě $T = T(\rho)$. Předpokládejte, že tlak záření je oproti tlaku plynu zanedbatelný. Výsledná závislost by měla obsahovat konstantu K , ale nikoli konstantu β . [1 b]

Teplotu v závislosti na hustotě jsme si pro tento model vyjádřili již v úloze **i**), ovšem konstanty úměrnosti je třeba porovnat s K . Dostáváme

$$T = C \rho^{\frac{1}{3}},$$

kde C je nová neznámá konstanta závislá na K i na β . Jelikož je však tlak záření zanedbatelný, můžeme aproximovat $\beta \approx 1$, což vede k výsledku

$$C = \frac{\beta m_H}{k} K^{-\gamma} \approx \frac{m_H}{k} K^{-\gamma},$$

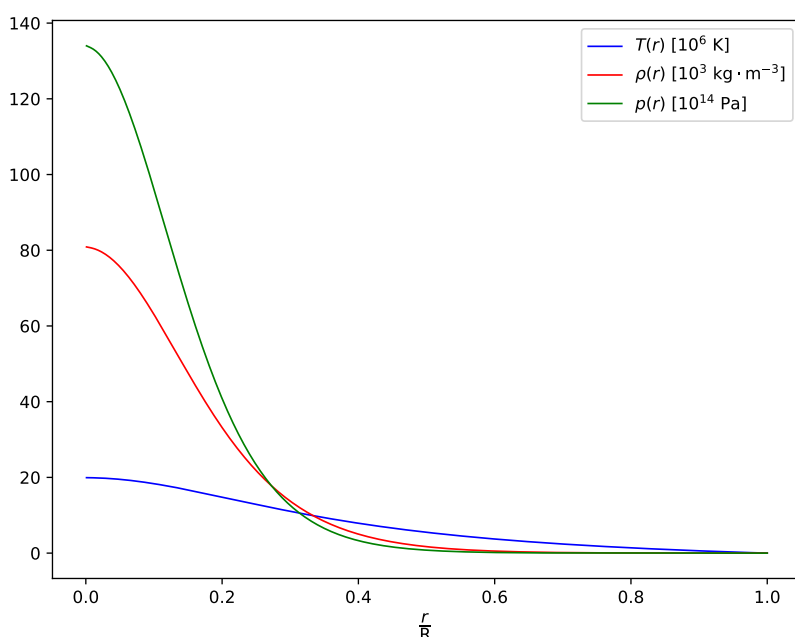
tedy ke stejnému vztahu jako v minulém modelu.

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

1) Numericky vypočtete zadaný model Slunce pro ALESPON 100 vrstev se stejnými okrajovými podmínkami jako u předchozího modelu. Přiložte graf závislosti teploty, hustoty a tlaku na vzdálenosti vrstvy od jádra a také všechny případné mezivýpočty. [3 b]

Nápověda: Model je opět velmi citlivý na hodnotu K , proto je třeba ji určit se stejnou přesností jako u minulého modelu. Pro tento model se bude hodnota K pohybovat mezi 10^{-7} a 10^{-8} v SI jednotkách.

Nakonec jsme zjistili, že jediný rozdíl mezi tímto a konvektivním modelem je v hodnotě γ a konstanty K . Za polytropický koeficient tedy dosadíme $\gamma = 4/3$ a konstantu K opět tipujeme na základě srovnání výsledné hmotnosti. Výsledky pro $X = 1000$ vrstev s určenou konstantou $K = 6,494 \cdot 10^{-8} \text{ kg}^{1/4} \cdot \text{s}^{3/2} \cdot \text{m}^{-9/4}$ jsou uvedeny v grafu na obrázku 2. Výsledná hodnota teploty slunečního jádra je $T_C = 19,9 \cdot 10^6 \text{ K}$.



Obrázek 2: Výsledná závislost teploty T , hustoty ρ a tlaku p na vzdálenosti od slunečního centra r pro radiální model.

m) Porovnejte a diskutujte výsledky všech modelů s reálnou hodnotou (resp. hodnotou zatím nejpresnějšího modelu). Jmenujte, čím především se ještě model liší od reality. [3 b]

Reálná hodnota teploty slunečního jádra byla odhadnuta pomocí helioseismologie a detekce slunečních neutrin, jejichž tok silně závisí na teplotě jádra, a to na $T_C = 15,7 \text{ MK} \pm 1 \%$. Všechny tři modely se tedy i přes svoji nerealističnost řádově trefily. Homogenní model byl od reality nejdále (4,6 MK), jelikož teplotu, hustotu a tlak rozdělil rovnoměrně mezi celý objem Slunce. Konvektivní model počítá s poměrně malým teplotním gradientem, jelikož konvekce dobře odvádí teplo, a proto byla hodnota teploty jádra podhodnocená (12,4 MK). Naopak v radiálním modelu je gradient teploty strmější, proto také dostáváme nadhodnocenou teplotu jádra (19,9 MK). Vidíme však, že jsme těmito polytropickými modely byli schopni vymezit poměrně úzký interval, v němž se reálná



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

teplota slunečního jádra opravdu nachází. Pro zlepšení bychom však měli Slunce rozdělit na 2 oblasti – zářivou vrstvu, kde dominuje transport tepla zářením ($\gamma \rightarrow 4/3$) a která sahá zhruba do 500 000 km od slunečního jádra, a navazující konvektivní vrstvu, kde naopak dominuje konvekce ($\gamma \rightarrow 5/3$). S takovým modelem už bychom byli číselně o jednotky procent od skutečné hodnoty. Od reality však máme stále daleko – v průběhu jsme předpokládali homogenní chemické složení, avšak v jádru Slunce se hromadí helium. Dále vodík není homogenně ionizovaný. Zcela jsme také ignorovali proton-protonový řetězec, což je skutečný zdroj energie Slunce, a mohli bychom ještě pokračovat.

C Zaprášený vesmír

(max. 15 bodů)

Galaxie není prázdný prostor: mezihvězdné prostředí obsahuje prach a plyn, které pohlcují a rozptylují světlo hvězd. Tento jev, označovaný jako mezihvězdná extinkce, způsobuje, že vzdálené objekty pozorujeme slabší, než jaké ve skutečnosti jsou. Pokud by extinkce nebyla správně zohledněna, vedlo by to ke zkreslení odhadů vzdáleností hvězd i k mylnému obrazu struktury Galaxie, například tvaru a polohy spirálních ramen. Extinkce navíc silně závisí na vlnové délce; kratší vlnové délky jsou pohlcovány více než ty delší. Kvůli tomu pozorujeme také změnu barvy u vzdálených objektů: jeví se červenější, než ve skutečnosti jsou.

Tato skutečnost nám poskytuje dobrou metodu, jak extinkci určit: stačí nám změřit reálnou barvu vzdálené hvězdy a porovnat ji s barvou, kterou bychom očekávali na základě její spektrální třídy. Pozorovanou barvu hvězdy můžeme vyjádřit pomocí tzv. *barevného indexu* $B - V$. Jedná se o rozdíl měřených hvězdných velikostí při pozorování přes různé barevné filtry, zde konkrétně filtry B (blue) a V (visual) Johnsonova fotometrického systému UBV. Očekávanou barvu hvězdy udává tzv. *vlastní barevný index* $(B - V)_0 = B_0 - V_0$: jedná se o rozdíl v hvězdných velikostech B_0 a V_0 , které bychom naměřili, pokud by k žádné extinkci nedocházelo. Zčervenání pak kvantifikujeme pomocí tzv. *barevného excesu* $E(B - V)$, který definujeme jako rozdíl výše zmíněných barevných indexů, tedy

$$E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0.$$

Naším cílem v této úloze bude ukázat, jaký je vztah mezi tímto zčervenáním $E(B - V)$ a celkovou extinkcí $A_V = V - V_0$ ve filtru V v případě, že je záření na cestě od zdroje k pozorovateli utlumen difúzním mezihvězdným prostředím. Matematicky řečeno tedy budeme hledat funkcionální vztah $A_V(E(B - V))$ mezi zčervenáním a extinkcí. Využijeme přitom tzv. *metodu variabilní extinkce* v rámci hvězd fixní otevřené hvězdokupy. Tato metoda byla navržena v 60. letech minulého století americkým astronomem Haroldem Johnsonem (jeho jméno nese i fotometrický systém UBV).

a) Vyjádřete pozorovaný modul vzdálenosti $V - M_V$ pomocí vzdálenosti r pozorovatele od zdroje a celkové míry extinkce A_V mezi zdrojem a pozorovatelem. Pomocí M_V jsme označili absolutní hvězdnou velikost zdroje, tedy hvězdnou velikost, kterou bychom pozorovali ve vzdálenosti 10 pc od zdroje, pokud by záření nebylo ovlivněno extinkcí. [2 b]

Pokud by záření nebylo ovlivněno mezihvězdným prostředím, mohli bychom psát Pogsonovu rovnici ve tvaru

$$V_0 - M_V = 5 \log \frac{r}{\text{pc}} - 5.$$

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Přičtením a odečtením V na levé straně této rovnice bychom pak dostali hledaný vztah

$$V - M_V = 5 \log \frac{r}{\text{pc}} - 5 + A_V.$$

Z vašeho výsledku části a) by mělo být patrné, že jelikož můžeme pokládat vzdálenosti všech hvězd od pozorovatele v rámci jedné otevřené hvězdokupy za přibližně konstantní, potom jakékoliv pozorované variace v hodnotě veličiny $V - M_V$ mezi hvězdami v rámci hvězdokupy budou přímým odrazem měnicích se hodnot mezihvězdné extinkce A_V ovlivňující hvězdy v hvězdokupě. Podaří-li se nám tedy na základě pozorování nezávisle určit hodnoty pozorovaného modulu vzdálenosti $V - M_V$ a zčervenání $E(B - V)$, bude graf $V - M_V$ v závislosti na $E(B - V)$ udávat tvar hledané funkce $A_V(E(B - V))$ (až na posunutí o konstantu ve vertikálním směru, které bude záviset na vzdálenosti hvězdokupy od pozorovatele).



Obrázek 3: Mlhovina NGC 6820. Otevřenou hvězdokupu NGC 6823 vidíme poblíž středu snímku.

Ve zbylé části úlohy se pokusíme vztah mezi celkovou extinkcí a zčervenáním určit na konkrétním příkladu otevřené hvězdokupy NGC 6823, nacházející se uprostřed mlhoviny NGC 6820 v souhvězdí Lištičky (obrázek 3)¹. Potřebné výstupy z pozorování hvězdokupy NGC 6823, konkrétně hvězdné velikosti B a V vybraných hvězd ve filtrech B a V (tj. fotometrická data) a také absolutní hvězdné velikosti M_V ve filtru V a vlastní barevné indexy $(B - V)_0$ (určeny na základě klasifikace spekter), naleznete v tabulce 1. Data byla převzata z práce Turner, D. G., *A Study of the Extinction in the Young Open Cluster NGC 6823*, JRASC **73**, 74 (1979).

b) Pro každou hvězdu z tabulky 1 vypočítejte odpovídající hodnotu pozorovaného barevného indexu $B - V$, barevného excesu $E(B - V)$ a pozorovaného modulu vzdálenosti $V - M_V$. [4 b]

Hodnoty pro každou hvězdu vidíme v tabulce 2.

¹Je důležité podotknout, že obdobný vztah bychom dostali pro jakoukoliv jinou hvězdokupu nebo obecně pro jakýkoliv jiný zdroj, jehož záření bylo ovlivněno extinkcí na difuzním mezihvězdném prostředí v Galaxii. Tvar tohoto vztahu je totiž do značné míry v rámci Galaxie *univerzální* (odchyly pozorujeme např. pro hustá molekulová oblaka, H II oblasti nebo galaktický střed) a lze jej tedy s výhodou využít pro určování celkové míry extinkce z hodnoty zčervenání.



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 1: Fotometrická a spektroskopická data pro otevřenou hvězdokupu NGC 6823.

$\frac{V}{\text{mag}}$	$\frac{B}{\text{mag}}$	$\frac{M_V}{\text{mag}}$	$(B-V)_0$ mag	$\frac{V}{\text{mag}}$	$\frac{B}{\text{mag}}$	$\frac{M_V}{\text{mag}}$	$(B-V)_0$ mag
9,34	9,9	-5,20	-0,32	12,06	12,60	-1,90	-0,26
9,97	10,66	-4,80	-0,32	12,11	12,61	-2,20	-0,24
10,96	11,21	-2,70	-0,25	8,73	9,39	-5,90	-0,25
11,07	11,51	-2,70	-0,25	10,72	11,06	-3,20	-0,26
12,87	13,32	-0,83	-0,20	10,99	11,44	-3,20	-0,26
13,55	13,93	0,49	-0,11	11,97	12,51	-2,20	-0,24
13,90	14,46	-0,03	-0,15	10,42	11,20	-4,50	-0,30
9,75	10,18	-4,50	-0,30	9,45	10,19	-5,20	-0,30
11,59	12,33	-3,50	-0,28	10,37	10,98	-4,20	-0,27
11,63	12,15	-2,55	-0,26	11,73	12,56	-3,50	-0,28
11,84	12,59	-3,10	-0,30	9,30	10,44	-4,00	0,62
11,91	12,64	-4,10	-0,31				

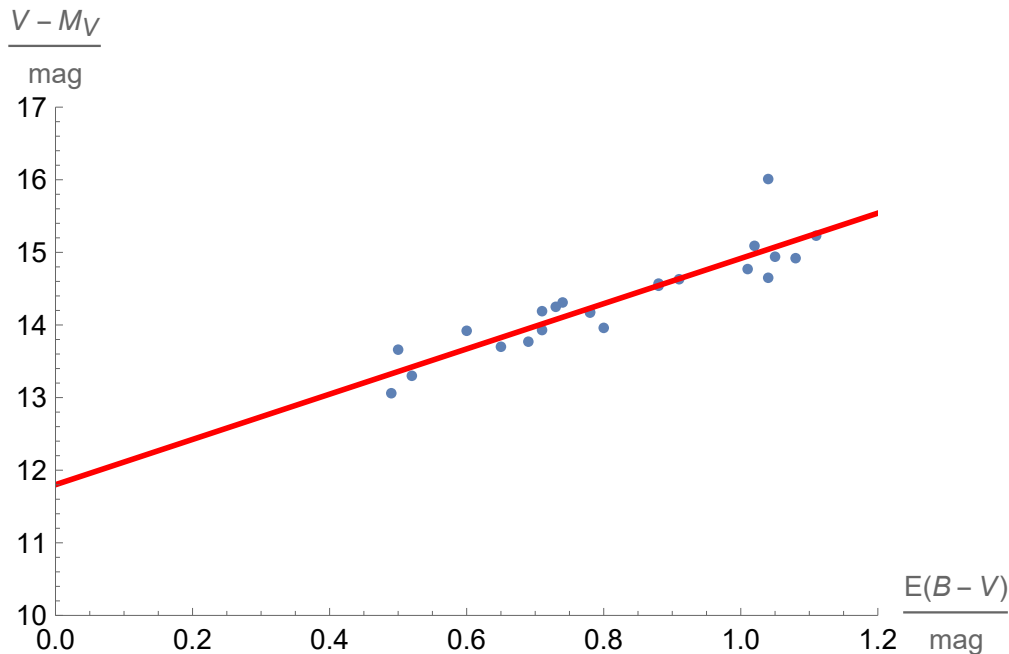
Tabulka 2: Vypočtené hodnoty $B - V$, $E(B - V)$ a $V - M_V$ pro NGC 6823.

$\frac{B-V}{\text{mag}}$	$\frac{E(B-V)}{\text{mag}}$	$\frac{V-M_V}{\text{mag}}$	$\frac{B-V}{\text{mag}}$	$\frac{E(B-V)}{\text{mag}}$	$\frac{V-M_V}{\text{mag}}$
0,56	0,88	14,54	0,54	0,80	13,96
0,69	1,01	14,77	0,50	0,74	14,31
0,25	0,50	13,66	0,66	0,91	14,63
0,44	0,69	13,77	0,34	0,60	13,92
0,45	0,65	13,70	0,45	0,71	14,19
0,38	0,49	13,06	0,54	0,78	14,17
0,56	0,71	13,93	0,78	1,08	14,92
0,43	0,73	14,25	0,74	1,04	14,65
0,74	1,02	15,09	0,61	0,88	14,57
0,52	0,78	14,18	0,83	1,11	15,23
0,75	1,05	14,94	1,14	0,52	13,30
0,73	1,04	16,01			

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

c) Data pro hvězdokupu NGC 6823 vyneste do grafu. Na horizontální osu vynášejte hodnoty $E(B - V)$, zatímco na vertikální osu vynášejte $V - M_V$ (obojí v mag). [5 b]

Vynesena data vidíme v grafu na obrázku 4.



Obrázek 4: Graf s vnesenými hodnoty $V - M_M$ v závislosti na $E(B - V)$ pro hvězdy z otevřené hvězdokupy NGC 6823.

Měli byste zjistit, že data přibližně odpovídají lineární závislosti. To znamená, že celková extinkce A_V ve filtru V závisí na barevném excesu $E(B - V)$ jako

$$A_V = R_V E(B - V)$$

pro nějaký koeficient R_V . Jeho hodnotu určíme jakožto směrnici přímky, kterou proložíme datové body grafu vykresleného v části c).

Chceme-li obecně z dat určit vztah mezi dvěma veličinami, hledáme takovou funkci, která je nejlepší aproximací všech bodů. V případě lineární závislosti, kde pro data (x_i, y_i) předpokládáme vztah

$$y = ax + b,$$

se nejčastěji používá metoda nejmenších čtverců. Jejím cílem je nalézt tzv. *regresní koeficienty* a a b tak, aby byl minimalizován součet

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - (ax_i + b))^2$$

čtverců odchylek naměřených hodnot od hodnot ležících na přímce. Minimální hodnoty dosáhne S pro koeficienty

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - a \sum_{i=1}^N x_i}{N}.$$

d) Určete hodnotu koeficientu R_V . Určete rovněž vzdálenost r hvězdokupy NGC 6823 v kpc. [4 b]



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Po dosazení hodnot $E(B - V)$ za x_i a také hodnot $V - M_V$ za y_i dostaneme regresní koeficienty

$$a \doteq 3,1 \quad \text{a} \quad b \doteq 12 \text{ mag.}$$

Získali jsme tedy hodnotu $R_V \doteq 3,1$ a rovněž skutečný modul vzdálenosti

$$V_0 - M_V = 5 \log \frac{r}{\text{pc}} - 5 \doteq 12 \text{ mag.}$$

Metoda variabilní extinkce tedy předpovídá pro vzdálenost NGC 6823 hodnotu $r \doteq 2,3 \text{ kpc}$.

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D V hledáčku: ISS

(max. 25 bodů)

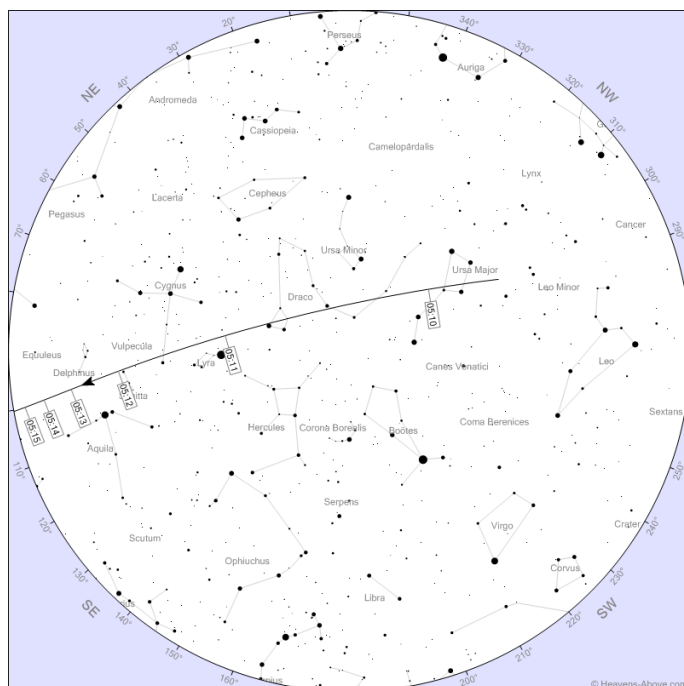
ISS je jedním z nejjasnějších objektů na noční obloze. V této úloze nebudeme jen obdivovat její přelet, ale využijeme pozorování k určení její vzdálenosti.

Vyhledejte si přelet ISS (např. na <https://www.heavens-above.com/>). Dejte si pozor, abyste měli správně nastavenou geografickou polohu! Vyberte takový přelet, kde ISS nad obzorem kulminuje ještě předtím, než zapadne do zemského stínu.

Pro pozorování si vytiskněte hvězdnou mapu aktuální pro čas přeletu. Doporučujeme využít přímo nástroj *Interactive sky chart* na webu Heavens-Above nebo software *Stellarium*.

a) Pozorujte přelet ISS. Do mapy co nejpřesněji zakreslete trajektorii ISS vůči okolním hvězdám. Určete úhlovou výšku ISS nad obzorem v okamžiku kulminace a její azimut (měřený od jihu). **[10 b]**

Pozorujeme přelet 26. února 2026 v 5:10 z Prahy ($\varphi_p \doteq 50^\circ$). Trajektorie je zakreslená v obrázku 5. Kulminace nastane ve výšce $\varepsilon = 78^\circ$ nad obzorem na azimutu $A = 191^\circ$.



Obrázek 5: Trajektorie přeletu ISS, jak by byla pozorovaná z Prahy ($\varphi_p \doteq 50^\circ$).

b) Uvažujte Zemi jako kouli o poloměru $R = 6371$ km. ISS obíhá ve výšce $h \approx 420$ km nad povrchem (přesnou hodnotu pro datum pozorování dohledejte a uveďte ji ve svém řešení). Odvoďte vztah pro výpočet přímé vzdálenosti d pozorovatele od satelitu (tzv. topocentrická vzdálenost) v závislosti na pozorované úhlové výšce nad obzorem ε (elevation). Kolik kilometrů byla od vás ISS vzdálená v okamžiku kulminace? **[3 b]**



Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Využijeme si trojúhelník s vrcholy: střed Země, pozorovatel a ISS. Pomocí kosinové věty můžeme napsat

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos(90^\circ + \varepsilon),$$

kde d je vzdálenost družice od pozorovatele. Dostáváme kvadratickou rovnici

$$d^2 + 2Rd \sin \varepsilon - h^2 - 2Rh = 0,$$

$$d = \frac{-2R \sin \varepsilon \pm \sqrt{4R^2 \sin^2 \varepsilon + 4h^2 + 8Rh}}{2}.$$

Aby byla vzdálenost kladná, musí platit možnost se znaménkem $+$. Dostáváme

$$d \doteq 430 \text{ km}.$$

c) Spočítejte úhlovou vzdálenost δ měřenou od středu Země (po hlavní kružnici) mezi bodem, ve kterém kulminuje ISS, a polohou pozorovatele v tentýž čas. [2 b]

δ lze určit opět pomocí kosinové věty

$$d^2 = R^2 + (R + h)^2 - 2R(R + h) \cos \delta.$$

Úhel můžeme vyjádřit jako

$$\delta = \arccos \left(\frac{R^2 + (R + h)^2 - d^2}{2R(R + h)} \right) \doteq 0,8^\circ.$$

d) Spočítejte inklinaci dráhy ISS i . [7 b]

Nápověda: Můžou se vám hodit tyto sférické trojúhelníky: jeden s vrcholy severní pól Země, pozorovatel, ISS a druhý s vrcholy severní pól Země, ISS, vertex dráhy (bod, kde má ISS nejvyšší zeměpisnou šířku).

Uvažujeme sférické trojúhelníky na obrázku 6. Úhel β určíme ze sinové věty

$$\frac{\sin(180^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \beta}{\sin(90^\circ - \varphi_p)}.$$

Snadno vyjádříme

$$\sin \beta = \frac{\cos \varphi_p}{\cos \varphi} \sin A.$$

Potřebujeme ještě získat φ , použijeme kosinovou větu

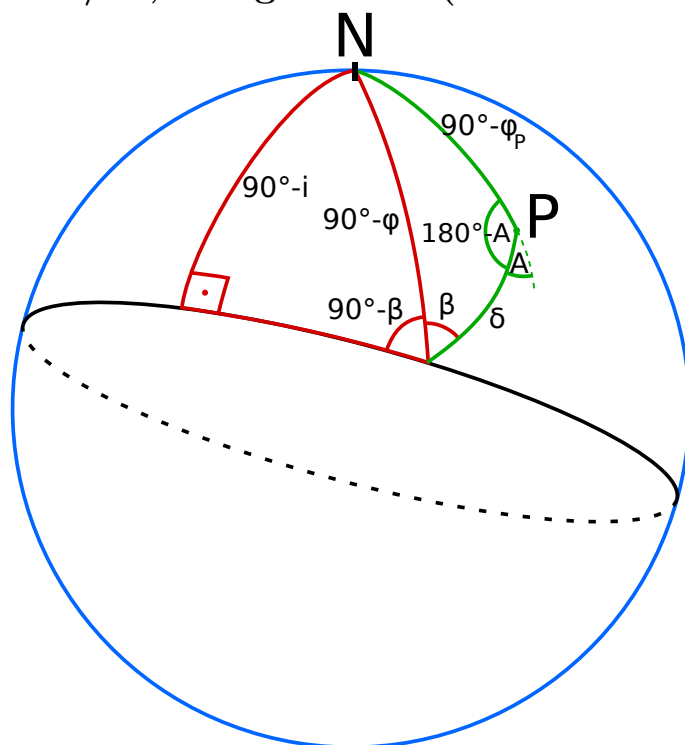
$$\cos(90^\circ - \varphi) = \cos \delta \cos(90^\circ - \varphi_p) + \sin \delta \sin(90^\circ - \varphi_p) \cos(180^\circ - A),$$

$$\sin \varphi = \cos \delta \sin \varphi_p - \sin \delta \cos \varphi_p \cos A,$$

což pro pozorované hodnoty dá

$$\varphi \doteq 51^\circ.$$

Krajské kolo 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 6: N značí severní pól Země, P polohu pozorovatele, černá čára je dráha ISS.

Pro druhý trojúhelník platí sinová věta ve tvaru

$$\frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - i)}{\sin(90^\circ - \beta)},$$

z čehož plyne

$$\cos i = \cos \beta \cos \varphi = \cos \left[\arcsin \left(\frac{\cos \varphi_P}{\cos \varphi} \sin A \right) \right] \cos \varphi.$$

Dostáváme

$$i \doteq 51^\circ.$$

e) Diskutujte výsledky a zdroje nejistoty, porovnejte váš výsledek měření se skutečnou hodnotou inklinace. Jak by bylo možné zpřesnit pozorování? **[3 b]**

Skutečná hodnota inklinace je přibližně $51,6^\circ$. Hlavním zdrojem nejistoty je nepřesné zakreslení trajektorie do mapky, určení výšky nad obzorem a azimutu kulminace. Určení azimutu je obzvláště obtížné, je dobré zvolit si přelet s vysokou výškou kulminace. Dalším zdrojem nejistoty je nepřesnost ve výšce ISS nad zemí a nepřesnost v poloměru Země v místě pozorování, kde jsme použili střední hodnotu 6 371 km. Pro zpřesnění pozorování by bylo vhodné trajektorii zaznamenat fotograficky, což by výrazně zlepšilo přesnost měření.

Autorem přehledového testu A je kolektiv autorů AO. Úlohu B navrhl Tomáš Patsch, úlohu C navrhli Radka Křížová a Jakub Vošmera, úlohu D navrhli Jindřich Jelínek a David Kománek.