# Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

# Analýza dat

## Úlohy

## G Měření Hubbleovy–Lemaîtrovy konstanty

*(max. 20 bodů)*

V následující úloze se pokusíme zrekonstruovat způsob měření, které provedl Edwin Hubble v roce 1929[1] a které vedlo k jednomu z největších průlomů v observační kosmologii. Tento průlom byl možný jednak díky předchozí práci Henrietty Swan Leavitt, která v roce 1912 objevila, že pro pulsující proměnné hvězdy zvané cefeidy existuje závislost mezi jejich absolutní magnitudou a periodou změn v jejich jasnosti, a jednak díky americkému astronomovi Vesto Slipherovi. Ten totiž ve stejném roce jako první naměřil červené posuvy tzv. extragalaktických mlhovin, aniž by je ovšem kosmologicky interpretoval. Hubble ve své práci právě Slipherova měření rychlostí vzdalování využil.

Na obrázku 1 jsou zobrazená pozorovaná emisní spektra sedmi galaxií a obrázek 2 ukazuje referenční emisní spektrum změřené v laboratoři. Emisní spektra neobsahují všechny spektrální čáry jako referenční spektrum, neboť určité vlnové délky jsou pohlceny, když světlo putuje mezihvězdným prostorem. To, které vlnové délky jsou pohlceny, je pro každou galaxii jiné, protože záleží na distribuci hmoty mezi galaxií a pozorovatelem. Pro jednoduchost uvažujte, že pozorovaná emisní spektra obsahují jen čáry, které můžou být nalezeny v referenčním laboratorním spektru. Též předpokládejte, že intenzity emisních čar v pozorovaných emisních spektrech byly naškálovány tak, že jejich intenzita odpovídá intenzitě v laboratorním spektru.

**a)** Na základě těchto dat určete pro každou galaxii její červený posuv a rychlost vzdalování v km/s. [**3,5 b**]

Jak bylo řečeno v zadání úlohy, všechny spektrální čáry pozorované v emisních spektrech galaxií jsou obsaženy v laboratorním referenčním spektru. Zároveň jsou intenzity sobě odpovídajících spektrálních čar v obou spektrech shodné. Tyto informace můžeme využít k tomu, abychom identifikovali čáry v obou spektrech, které si odpovídají. Abychom snížili chybu nepřesným odečtením vlnové délky, budeme se snažit identifikovat čáry s delšími vlnovými délkami.

Červený posuv vypočteme jako

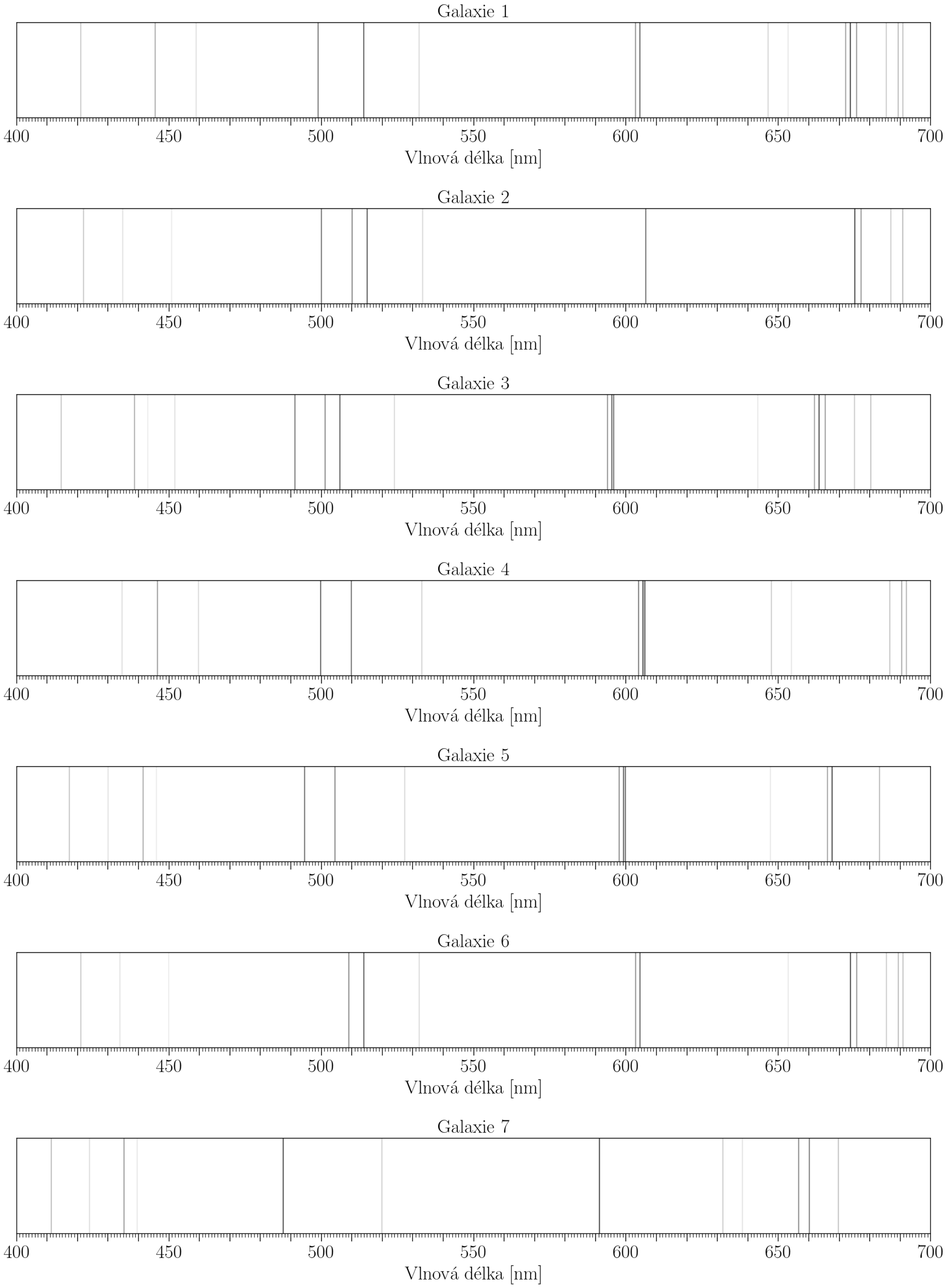
$$z = \frac{\lambda_{\mathrm{obs}} - \lambda_{\mathrm{lab}}}{\lambda_{\mathrm{lab}}}\,,$$

kde $\lambda_{\mathrm{obs}}$ je vlnová délka v pozorovaném emisním spektru a $\lambda_{\mathrm{lab}}$ je vlnová délka odpovídající spektrální čáry v referenčním spektru.

Rychlost vzdalování potom můžeme vypočítat pomocí vztahu

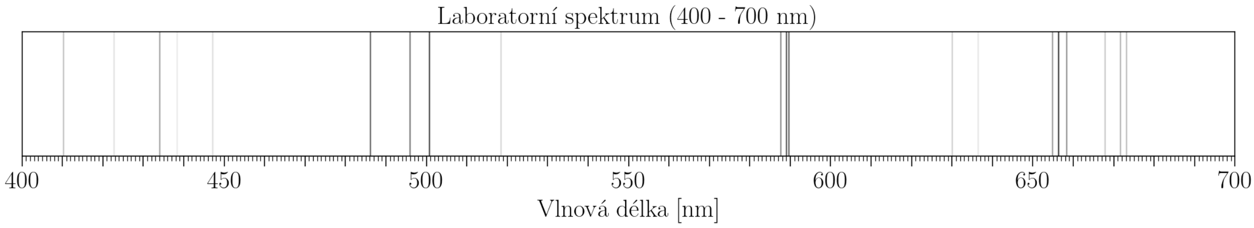
$$v \approx cz\,,$$

[1] V roce 2018 Mezinárodní astronomická unie (IAU) doporučila přejmenovat tento zákon na Hubbleův–Lemaîtrův na počest belgického astronoma Georgese Lemaîtra, který teoretické odvození rozpínání vesmíru a první odhad této konstanty publikoval již v roce 1927.




**Obrázek 1:** Emisní spektra pozorovaných galaxií.

# Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení




**Obrázek 2:** Referenční spektrum měřené v laboratoři.

kde $c = 299\,792\,\mathrm{km/s}$ je rychlost světla ve vakuu. Použití relativistického vzorce je též možné, nicméně pro hodnoty $z$ v úloze je chyba odečítání spekter srovnatelná s přesností, kterou bychom získali jeho použitím . Výsledky měřených červených posunů a rychlostí vzdalování jsou shrnuty v tabulce 1.

**Tabulka 1:** Změřené červené posuvy pro pozorované galaxie.

| Galaxie | z | Rychlost vzdalování [km/s] |
|---|---|---|
| Galaxie 1 | 0,0263 | 7884 |
| Galaxie 2 | 0,0285 | 8553 |
| Galaxie 3 | 0,0107 | 3196 |
| Galaxie 4 | 0,0280 | 8399 |
| Galaxie 5 | 0,0172 | 5150 |
| Galaxie 6 | 0,0264 | 7901 |
| Galaxie 7 | 0,0027 | 821 |

Předpokládejte, že vztah mezi absolutní hvězdnou velikostí cefeidy, $M$, a její periodou ve dnech, $P$, má tvar[2]

$$M = -2{,}43[\log_{10}(P\,[\mathrm{den}]) - 1] - 4{,}05\,.$$

Na obrázcích 3 a 4 jsou zobrazené světelné křivky sedmi cefeid, které byly pozorovány v sedmi galaxiích z předchozí otázky. Vždy platí, že cefeida $i$ byla pozorována v galaxii $i$.

**b)** Na základě těchto světelných křivek určete vzdálenosti těchto cefeid v Mpc. Zdánlivá hvězdná velikost cefeidy v Pogsonově rovnici je střední hodnota hvězdné velikosti dané cefeidy odhadnutá z přiložených dat. [**7,0 b**]

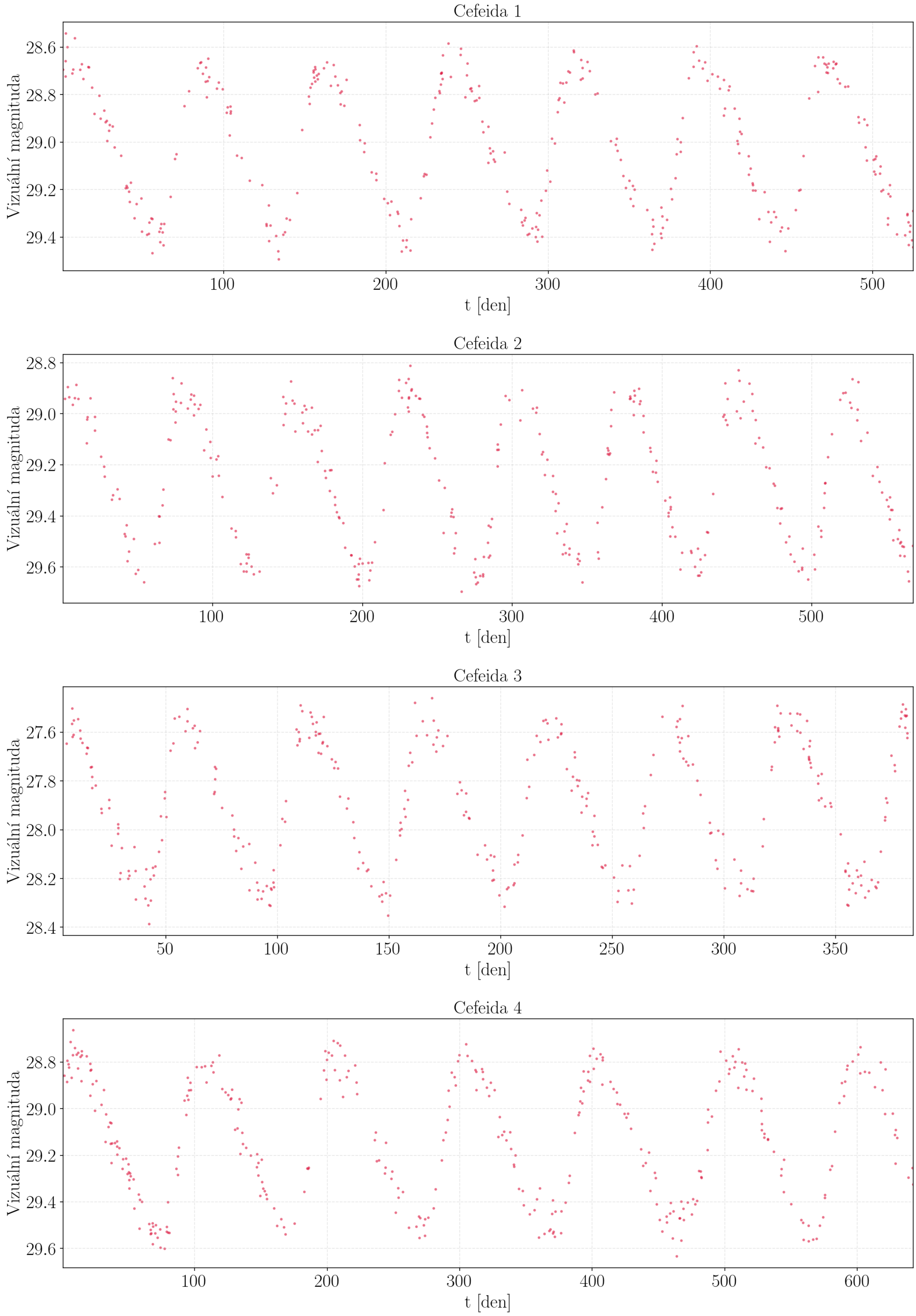
Periodu cefeid $P$ z přiložených světelných křivek nejpřesněji zjistíme, pokud určíme $\Delta T_N$ dobu trvání $N$ celých period a tuto dobu vydělíme $N$. Tímto způsobem minimalizujeme čtecí chybu. Periodu určíme ze vztahu

$$P = \frac{\Delta T_N}{N}\,.$$

Střední vizuální hvězdná velikost pro danou cefeidu je pak ta hodnota, která leží přibližně uprostřed mezi maximy a minimy .

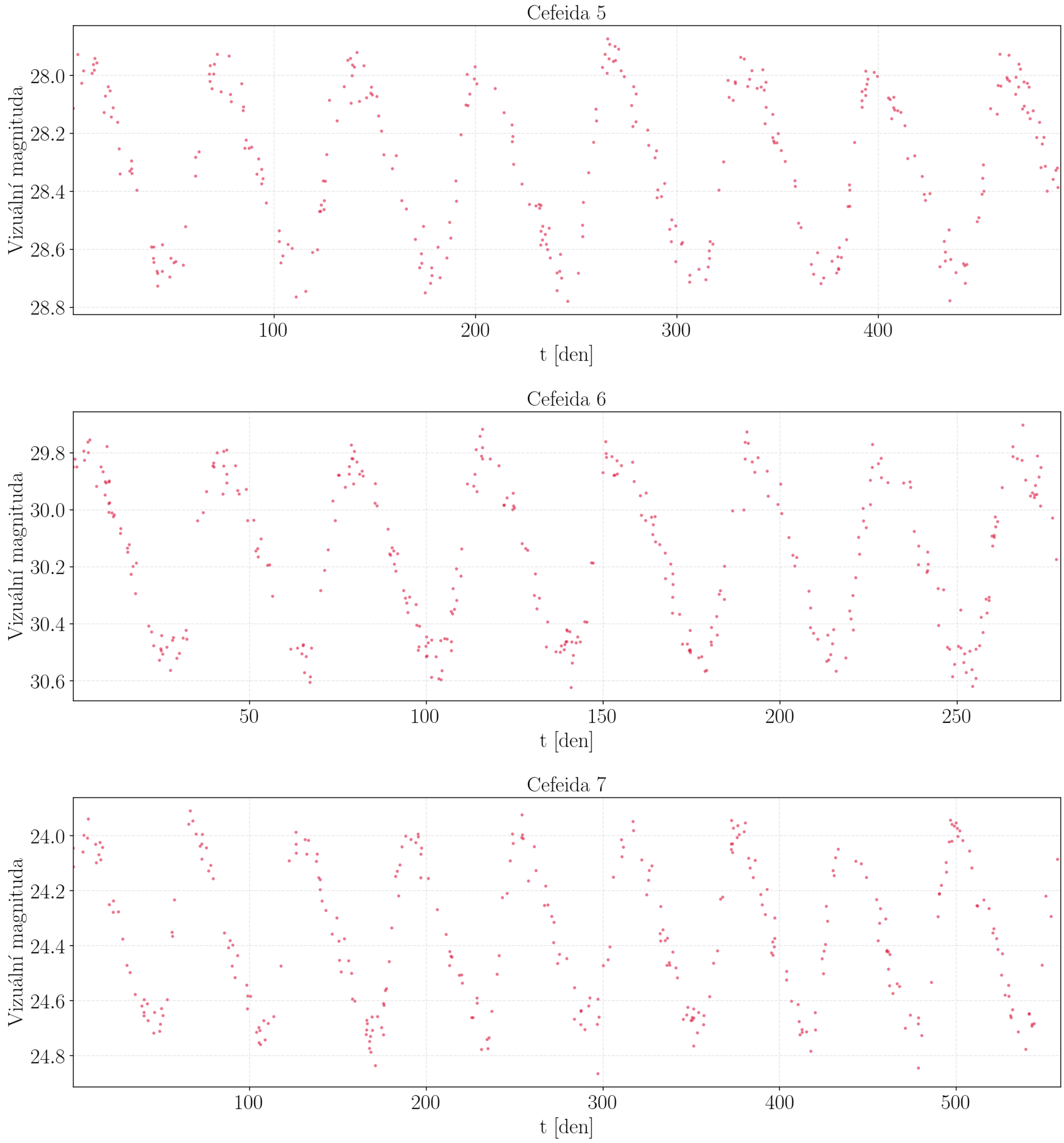
[2]Tento vztah je určen empiricky na základě pozorování a přesné hodnoty číselných koeficientů se můžou v literatuře lehce lišit na základě dat, která byla pro měření použita.

# Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení




**Obrázek 3:** Světelné křivky pozorovaných cefeid (1/2)

# Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení




**Obrázek 4:** Světelné křivky pozorovaných cefeid (2/2)

## Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Absolutní hvězdnou velikost vypočítáme pomocí vztahu ze zadání, kam dosadíme určenou periodu dané cefeidy ve dnech.

Nakonec vzdálenost cefeidy, a tudíž i celé galaxie, určíme z Pogsonovy rovnice

$$M = m + 5 - 5\log_{10}(d)\,,$$

$$d = 10^{-\frac{M-m-5}{5}}\ [\mathrm{pc}]\,.$$

Hodnoty středních vizuálních hvězdných velikostí, period a vzdáleností určených z Pogsonovy rovnice jsou shrnuté v tabulce 2 .

**Tabulka 2:** Změřené parametry pozorovaných cefeid

| **cefeida** | **⟨m⟩ [mag]** | **P [den]** | **d [Mpc]** |
|---|---|---|---|
| cefeida 1 | 29,02 | 77,4 | 111 |
| cefeida 2 | 29,27 | 73,6 | 122 |
| cefeida 3 | 27,90 | 53,8 | 55,7 |
| cefeida 4 | 29,15 | 98,5 | 133 |
| cefeida 5 | 28,33 | 65,5 | 74,6 |
| cefeida 6 | 30,16 | 37,5 | 132 |
| cefeida 7 | 24,36 | 61,7 | 11,6 |

**c)** Narýsujte graf závislosti rychlosti vzdalování galaxie v km/s na její vzdálenosti v Mpc. [**4,0 b**]

Správné řešení této části je spojené s následující podotázkou. Výsledný graf je narýsovaný v následující sekci řešení.

Metoda nejmenších čtverců je exaktní způsob, jak nalézt funkci, která nejlépe aproximuje zadané body. V této úloze určíme Hubbleovu konstantu pomocí metody nejmenších čtverců a též směrodatnou odchylku určené hodnoty.

V následujícím textu budeme užívat značení, že $i$-tý bod v grafu má souřadnice $[x_i, y_i]$ a v grafu je $n$ bodů. Obecná rovnice přímky v grafu má tvar

$$y(x) = ax + b$$

a Hubbleův–Lemaîtrův zákon říká, že rychlost vzdalování galaxie $v$ je přímo úměrná její vzdálenosti $d$

$$v(d) = H_0 d\,.$$

Hubbleova–Lemaîtrova konstanta $H_0$ je v našem případě neznámý parametr, který chceme určit na základě dat a konstantní člen $b = 0$. Metoda nejmenších čtverců říká, že směrnice přímky která prochází počátkem a která nejlépe aproximuje tyto body, se určí jako

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\,.$$

Směrodatná odchylka potom je

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2}{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}}\,.$$

**d)** Jaká je hodnota Hubbleovy–Lemaîtrovy konstanty určená touto metodou a jaká je směrodatná odchylka výsledku určená čistě z fitu? Vypočítanou přímku též narýsujte do grafu z předchozí úlohy. [**5,5 b**]

Pro snazší výpočet určíme číselné hodnoty jednotlivých členů ve vzorci

$$\sum_{i=1}^{7} x_i y_i \doteq 4\,650 \cdot 10^3\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 \doteq 71\,120\,\mathrm{Mpc^2}\,.$$

$$H_0 \equiv a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2} = \frac{4\,650\cdot 10^3}{71\,120}\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \doteq 65{,}4\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

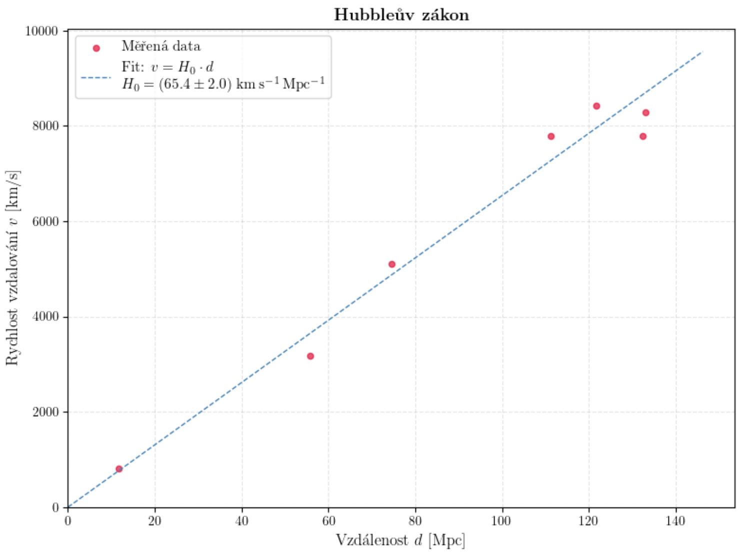
A pro určení $\sigma_a$ ještě vypočteme

$$\sum_{i=1}^{7}(y_i - ax_i)^2 \doteq 1\,634\cdot 10^3\,\mathrm{km^2\,s^{-2}}\,.$$

$$\sigma_{H_0} \equiv \sigma_a = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i - ax_i)^2}{(n-1)\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2}} \doteq \sqrt{\frac{1\,634\cdot 10^3}{6\cdot 71\,120}}\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}} \doteq 2{,}0\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

Tím jsme určili Hubbleovu–Lemaîtrovu konstantu jako $H_0 = (65{,}4 \pm 2{,}0)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Výsledný graf s narýsovanou přímkou , kterou jsme vypočítali, je zobrazen na obrázku 5.




**Obrázek 5:** Výsledný graf s nafitovanou přímkou ve tvaru $v = H_0 d$.

## Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

# H Eddingtonovo zatmění

*(max. 20 bodů)*

Dne 29. května roku 1919 Sir Arthur Stanley Eddington pořídil pozorování zatmění Slunce, které změnilo svět. Jeho výprava na Princův ostrov (v dnešní Demokratické republice Svatý Tomáš a Princův ostrov v Guinejském zálivu) zaznamenala polohy několika hvězd, které se nepatrně lišily od jejich poloh na snímcích, které pořídili před zatměním. Tyto odchylky byly v souladu s předpovědí Einsteinovy teorie relativity, podle které je úhlová odchylka $\delta\varphi$ paprsku dána vztahem

$$\delta\varphi = 4\frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot}\frac{\varrho_\odot}{\theta}\,, \tag{1}$$

kde $G$ je gravitační konstanta, $M_\odot$ je hmotnost Slunce, $c$ je rychlost světla, $\varrho_\odot = 960''$ je úhlový poloměr Slunce, a $\theta$ je původní (neodkloněná) úhlová vzdálenost středu Slunce od pozorované hvězdy ve stejných jednotkách jako úhlový poloměr Slunce.

Od dob Eddingtonova průkopnického měření se pozorovací technika dramaticky posunula. Dnes astronomové tento slavný experiment úspěšně opakují během úplných zatmění Slunce pomocí moderních elektronických snímačů. V Tabulce 4 naleznete polohy hvězd v pixelech. Souřadnice $X_\mathrm{S}$ a $Y_\mathrm{S}$ označují původní polohu hvězdy, a $X_\mathrm{E}$ a $Y_\mathrm{E}$ označují polohu hvězdy při zatmění Slunce.

**a)** Odůvodněte, jak je možné, že v praktických situacích můžeme odečítat polohu hvězd s přesností vyšší, než je 1 px. [**1,5 b**]

> V případě, že se hvězda na snímku jeví pouze jako jeden pixel, tak polohu přesněji odečíst nemůžeme. Pokud ovšem rozptylová funkce s pološířkou FWHM hvězdy na snímku zabírá vícero pixelů, a zaznamenali jsme ji s poměrem signálu ku šumu (SNR), pak se astrometrická přesnost odečtu chová jako
>
> $$\sigma_\mathrm{ast} \propto \frac{\mathrm{FWHM}}{\mathrm{SNR}}\,.$$
>
> Je to proto, že pořizujeme vážený aritmetický průměr souřadnic pixelů, kde „váhy“ jsou dány zaznamenanými hodnotami na pixelech.

V následující části bude úkolem určit koeficient úměrnosti z rovnice 1

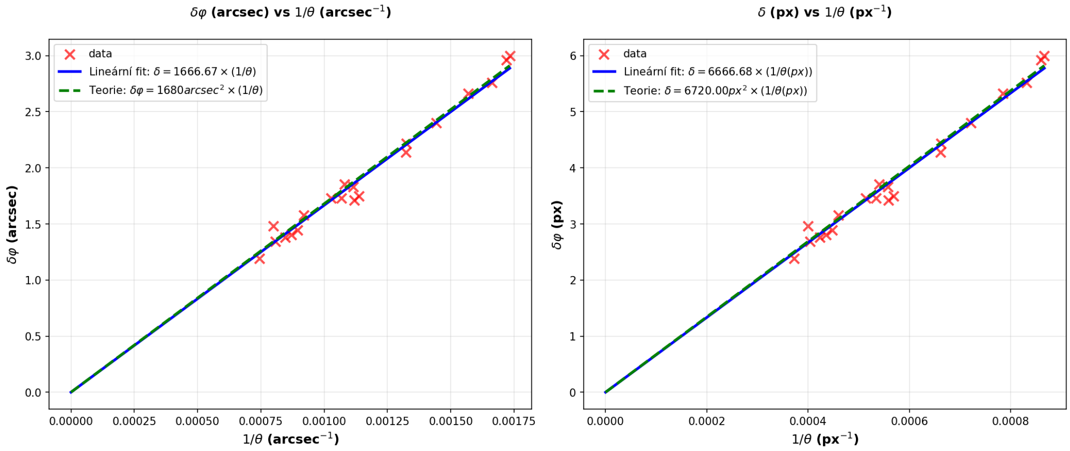
$$A = 4\frac{GM_\odot \varrho_\odot}{c^2 R_\odot}$$

ve čtverečních úhlových vteřinách, tak aby

$$\frac{\delta\varphi}{1''} = \frac{A}{(1'')^2}\cdot\frac{1''}{\theta}\,.$$

**b)** Uvažujte, že $1''$ zabírá na snímači přesně 2 px, a že střed Slunce spadá přesně na souřadnice (0,00; 0,00). Vypočítejte hodnoty $\theta$ a $\delta\varphi$ pro každou hvězdu v Tabulce 4. Dále si do tabulky zaneste vhodný pomocný sloupec, abyste v následující části mohli určit koeficient $A$ **lineární** regresí. Uvažujte, že snímek byl již zpracován tak, aby vzdálenosti v pixelech odpovídaly úhlovým vzdálenostem lineárně. [**7,0 b**]

Viz tabulka 3.




**Obrázek 6:** Závislost $\delta\varphi$ na $1/\theta$.

**Tabulka 3:** Tabulka úhlových vzdáleností $\theta$ a úhlových odchylek $\delta\varphi$.

| Idx | $\theta$ (px) | $\theta$ (1”) | $1/\theta$ (1/1”) | $1/\theta$ (1/px) | $\delta\varphi$ (px) | $\delta\varphi$ (1”) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1871,40 | 935,70 | 0,001069 | 0,000534 | 3,46 | 1,7305 |
| 2 | 1945,92 | 972,96 | 0,001028 | 0,000514 | 3,46 | 1,7279 |
| 3 | 2295,65 | 1147,82 | 0,000871 | 0,000436 | 2,81 | 1,4050 |
| 4 | 2685,23 | 1342,62 | 0,000745 | 0,000372 | 2,39 | 1,1938 |
| 5 | 1758,49 | 879,24 | 0,001137 | 0,000569 | 3,49 | 1,7461 |
| 6 | 1795,41 | 897,70 | 0,001114 | 0,000557 | 3,67 | 1,8327 |
| 7 | 1509,84 | 754,92 | 0,001325 | 0,000662 | 4,44 | 2,2191 |
| 8 | 1154,16 | 577,08 | 0,001733 | 0,000866 | 5,99 | 2,9967 |
| 9 | 1202,65 | 601,33 | 0,001663 | 0,000831 | 5,52 | 2,7615 |
| 10 | 1851,48 | 925,74 | 0,001080 | 0,000540 | 3,70 | 1,8521 |
| 11 | 1386,33 | 693,17 | 0,001443 | 0,000721 | 4,80 | 2,3997 |
| 12 | 2500,17 | 1250,09 | 0,000800 | 0,000400 | 2,97 | 1,4833 |
| 13 | 2234,00 | 1117,00 | 0,000895 | 0,000448 | 2,89 | 1,4460 |
| 14 | 1789,05 | 894,52 | 0,001118 | 0,000559 | 3,42 | 1,7107 |
| 15 | 1511,97 | 755,99 | 0,001323 | 0,000661 | 4,28 | 2,1388 |
| 16 | 2479,80 | 1239,90 | 0,000807 | 0,000403 | 2,69 | 1,3449 |
| 17 | 1163,45 | 581,72 | 0,001719 | 0,000860 | 5,93 | 2,9627 |
| 18 | 1274,35 | 637,18 | 0,001569 | 0,000785 | 5,32 | 2,6619 |
| 19 | 2177,00 | 1088,50 | 0,000919 | 0,000459 | 3,15 | 1,5767 |
| 20 | 2363,21 | 1181,61 | 0,000846 | 0,000423 | 2,76 | 1,3781 |

**c)** Vytvořte vhodný graf, ze kterého bude možné získat hodnotu $A$ v $(1'')^2$ lineární regresí. [**8,5 b**]

Viz obr. 6.

**d)** Určete hodnotu $A$ a její nejistotu. Srovnejte ji s teoretickou hodnotou. [**3,0 b**]

# Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

*Nápověda: Může se vám hodit vztah pro lineární regresi z předchozí úlohy.*

Lineární regresí s nulovým konstantním členem získáváme

$$A = (1667 \pm 14)\ \mathrm{arcsec}^2\,.$$

Dosazením do teoretické závislosti získáváme

$$A = 4\frac{GM_\odot}{c^2 R_\odot} \cdot \frac{206265''}{1\,\mathrm{rad}} \cdot 960'' = 1681\,(\mathrm{arcsec})^2\,.$$

**Tabulka 4:** Polohy hvězd před zatměním a během úplného zatmění

| Index | $X_\mathrm{S}$ (px) | $Y_\mathrm{S}$ (px) | $X_\mathrm{E}$ (px) | $Y_\mathrm{E}$ (px) |
|---|---|---|---|---|
| Hvězda 1 | -501,84 | 1802,86 | -502,65 | 1806,22 |
| Hvězda 2 | -1375,93 | -1376,02 | -1378,33 | -1378,50 |
| Hvězda 3 | -1767,67 | 1464,70 | -1769,94 | 1466,35 |
| Hvězda 4 | -1917,66 | 1879,64 | -1919,51 | 1881,15 |
| Hvězda 5 | 1329,77 | -1150,64 | 1332,36 | -1152,98 |
| Hvězda 6 | -1272,70 | -1266,38 | -1275,50 | -1268,75 |
| Hvězda 7 | 447,41 | -1442,02 | 448,64 | -1446,29 |
| Hvězda 8 | -175,72 | 1140,70 | -176,40 | 1146,66 |
| Hvězda 9 | -1201,30 | 56,94 | -1206,82 | 57,27 |
| Hvězda 10 | 369,66 | -1814,20 | 370,03 | -1817,88 |
| Hvězda 11 | 430,18 | -1317,90 | 431,75 | -1322,44 |
| Hvězda 12 | -1739,79 | 1795,54 | -1741,74 | 1797,78 |
| Hvězda 13 | 1862,53 | 1233,59 | 1864,90 | 1235,24 |
| Hvězda 14 | -781,54 | -1609,31 | -783,06 | -1612,38 |
| Hvězda 15 | -1511,85 | -19,29 | -1516,09 | -19,87 |
| Hvězda 16 | -1862,45 | 1637,28 | -1864,29 | 1639,24 |
| Hvězda 17 | -964,88 | 650,09 | -969,84 | 653,33 |
| Hvězda 18 | 186,84 | -1260,58 | 187,55 | -1265,86 |
| Hvězda 19 | 1878,34 | 1100,53 | 1881,07 | 1102,11 |
| Hvězda 20 | 1758,00 | 1579,31 | 1760,31 | 1580,81 |

Úlohu G navrhl Ondřej Theiner, úlohu H navrhl Marco Souza de Joode.