Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Oslňující krása Měsíce

(max. 10 bodů)

Jen málo lidí nefascinuje Měsíc v úplňku, a tak když přijdou na hvězdárnu, často si ho chtějí prohlédnout i v dalekohledu. Netuší však, jaké nebezpečí na jejich zrak adaptovaný na tmu v okuláru čeká.

V celé úloze uvažujte, že vždy pozorujeme celý měsíční disk.

a) Jaká je intenzita záření I_M (výkon na metr čtvereční), která přichází od Měsíce v úplňku? Uvažujte intenzitu záření ze Slunce $I_S = 1\,360\,\mathrm{W/m^2}$, zdánlivou magnitudu Slunce $m_S = -26{,}83\,\mathrm{mag}$ a Měsíce v úplňku $m_M = -12{,}74\,\mathrm{mag}$. **[2 b]**

Platí $m_M - m_S = -2{,}5\log_{10}\left(\frac{I_M}{I_S}\right)$, tedy $I_M = I_S \cdot 10^{\frac{m_S - m_M}{2{,}5}} \doteq 3{,}144 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W/m^2}$.

Uvažujme nyní velmi zjednodušený model, ve kterém při zraku částečně adaptovaném na tmu k nepříjemnému oslnění stačí, aby na sítnici dopadal výkon řádově $P = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{W}$.

b) Jaký je maximální průměr D dalekohledu, ve kterém můžeme pozorovat Měsíc v úplňku bez nepříjemného oslnění? Předpokládejte, že veškeré světlo z okuláru dopadne na sítnici (nepoužíváme tedy žádné filtry a zanedbáváme ztráty). Srovnejte s průměrem $D_P = 18\,\mathrm{cm}$ dalekohledu na Štefánikově hvězdárně na Petříně. **[2 b]**

Z předpokladu plyne, že veškeré světlo zachycené dalekohledem dopadne na sítnici. Pak platí $\frac{\pi}{4}D^2 I_M = P$, tedy $D = \sqrt{\frac{4P}{\pi I_M}} = 10^{\frac{m_M - m_S}{5}} \cdot \sqrt{\frac{4P}{\pi I_S}} \doteq 10\,\mathrm{cm}$. Dalekohled na Petříně je tedy moc velký a pozorování bude nepříjemné.

c) Kolik dní před a po novu je možné bez nepříjemného oslnění pozorovat Měsíc výše uvedeným dalekohledem na Štefánikově hvězdárně? **[6 b]**

Nápověda: Může se vám hodit zjednodušený vztah pro relativní jasnost Φ objektu v závislosti na úhlu $0 \leq \alpha \leq \pi$ zdroj světla–objekt–pozorovatel

$$\Phi(\alpha) = \frac{\sin(\alpha) + (\pi - \alpha)\cos(\alpha)}{\pi}.$$

Nápověda: Některé rovnice bude potřeba řešit numericky.

Dalekohled na Petříně zachytí výkon $\Phi(\alpha)\,P\left(\frac{D_P}{D}\right)^2$, který nemá přesáhnout P. Tedy $\Phi(\alpha_{max}) = \left(\frac{D}{D_P}\right)^2 = 10^{\frac{m_M - m_S}{2{,}5}} \cdot \frac{4P}{\pi I_S D_P^2} \doteq 0{,}375$. Tato rovnice není řešitelná analyticky, ale vztah můžeme upravit na

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\pi\Phi - \sin(\alpha)}{\pi - \alpha}\right)$$

kde za Φ dosadíme hodnotu vypočtenou výše a vyřešit ji iteračně (je potřeba vše provádět v radiánech). Vztah je velmi stabilní, takže můžeme zvolit i $\alpha_0 = 0$ a po 3 krocích dostaneme výsledek správný na 4 platné cifry (a po 5 krocích na 10 cifer). Nakonec dostaneme $\alpha_{max} \approx 1{,}461$.

Tento úhel musíme převést na úhel mezi Sluncem a Měsícem při pozorování ze Země, pro což lze využít faktu, že trojúhelník Slunce–Země–Měsíc má u Slunce úhel zanedbatelné velikosti, tedy pro úhel β u Země platí $\beta \approx \pi - \alpha$. Pak $\beta_{max} \approx 1{,}680$. Ten je zároveň přímo úměrný době od novu, tedy "bezpečné" období má na každé straně novu dobu $\tau = \frac{\beta_{max}}{2\pi} T_{syn} \doteq 7{,}9\,\text{dní}$ (kde T_{syn} je synodická perioda Měsíce, tedy doba mezi dvěma úplňky).

B Červí² díra

(max. 10 bodů)

Kosmický červ o hmotnosti $m = 5{,}1 \cdot 10^6\,\text{kg}$ a délce $l = 100\,\text{m}$ volně padá do červí díry, hlavičkou napřed, přímo v radiálním směru. Červí díru si můžeme představit jako sféricky symetrické gravitační pole, které je až do jisté vzdálenosti a od středu identické s gravitačním polem černé díry o hmotnosti M. Ve vzdálenosti a od středu pak červ narazí na tenkou slupku z exotického plynu (o kladném tlaku, ale záporné hustotě energie), po jejímž průchodu se objeví na druhé straně červí díry, která vypadá naprosto symetricky jako ta první: červ se tedy vynoří ven ze slupky exotického plynu o poloměru a a uniká radiálně pryč z gravitačního pole, které se opět shoduje s polem černé díry o hmotnosti M.

Aby byla červí díra průchozí, je nutné volit a větší, než je poloměr horizontu událostí, který je roven Schwarzschildově poloměru r_S. Zároveň, abychom nepotřebovali mnoho exotického plynu na její konstrukci, chceme volit a co nejmenší. Budeme proto uvažovat, že máme přesně $a = r_\mathrm{S}$.

Pro jednoduchost si komplikovanou anatomii červa nahraďme dvěma hmotnými body (reprezentujícími hlavičku a ocásek, každý o hmotnosti $m/2$) propojenými nehmotnou tuhou tyčí o délce l. Také uvažujme, že délka červa je velmi malá oproti poloměru slupky ($l \ll a$) a že jeho hmotnost je velmi malá oproti hmotnosti červí díry ($m \ll M$). Červ se přetrhne, pokud tahová síla překročí mezní hodnotu $F_\mathrm{lim} = 200\,\text{kN}$. Může se vám hodit aproximace $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pro $x \ll 1$. Můžete také předpokládat, že pro slapovou sílu působící na červa platí přesně stejný vztah, jaký bychom odvodili v newtonovské mechanice, a to i v blízkosti Schwarzschildova poloměru (shodou okolností to tak z rovnic obecné teorie relativity skutečně vyjde).

Určete mezní velikost a_lim červí díry a odpovídající hmotnost M_lim určující sílu gravitačního pole vně červí díry, při níž se červ ještě dostane živý na druhou stranu. Jedná se o maximální nebo minimální velikost, jakou červí díra musí mít, aby červ průchod přežil? Jsou pro tuto velikost červí díry splněny předpoklady $l \ll a$ a $m \ll M$?

Pro velikost g gravitačního zrychlení působícího na bod ve vzdálenosti r od středu červí díry můžeme v kontextu Newtonovy mechaniky psát

$$g = \frac{GM}{r^2}\,.$$

Na hlavičku červa, nacházející se ve vzdálenosti $r - l/2$, tedy působí gravitační zrychlení

$$g_\mathrm{h} = \frac{GM}{(r - \frac{l}{2})^2}\,,$$

zatímco na červí ocásek, nacházející se ve vzdálenosti $r + l/2$, působí zrychlení

$$g_\mathrm{o} = \frac{GM}{(r + \frac{l}{2})^2}\,.$$

Rozdílné velikosti zrychlení působících na hlavičku a na ocásek budou mít za následek slapovou sílu o velikosti F_t, která se projeví jako síla napětí (tahová síla) v tyči propojující dva hmotné body o hmotnostech $m/2$ reprezentující hlavičku a ocásek. Jelikož se celý červ pohybuje se zrychlením g a chová se jako tuhé těleso, musí pro hlavičku platit rovnováha sil

$$\frac{m}{2}g = \frac{m}{2}g_\mathrm{h} - F_\mathrm{t}\,,$$

zatímco pro ocásek musí platit

$$\frac{m}{2}g = \frac{m}{2}g_\mathrm{o} + F_\mathrm{t}\,.$$

Odečtením těchto dvou rovnic tedy dostaneme

$$F_\mathrm{t} = \frac{m}{4}(g_\mathrm{h} - g_\mathrm{o}) = \frac{m}{4}a_\mathrm{t}\,,$$

kde $a_\mathrm{t} = g_\mathrm{h} - g_\mathrm{o}$ značí slapové zrychlení. Podle aproximace napovězené v zadání navíc platí

$$\left(r \pm \frac{l}{2}\right)^{-2} = r^{-2}\left(1 \pm \frac{l}{2r}\right)^{-2} \approx r^{-2}\left(1 \mp \frac{l}{r}\right) = \frac{1}{r^2} \mp \frac{l}{r^3}\,,$$

takže pro výsledné slapové zrychlení můžeme psát

$$a_\mathrm{t} = g_\mathrm{h} - g_\mathrm{o} = \frac{GM}{(r - \frac{l}{2})^2} - \frac{GM}{(r + \frac{l}{2})^2} \approx GM\left(\frac{1}{r^2} + \frac{l}{r^3}\right) - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{l}{r^3}\right) = \frac{2GMl}{r^3}$$

a odpovídající slapová síla F_t bude uvnitř červa vyvářet tahovou sílu

$$F_\mathrm{t} = \frac{m}{4}a_\mathrm{t} \approx \frac{GmMl}{2r^3}\,.$$

Při průchodu červí dírou o poloměru

$$a = r_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}$$

tedy bude slapová síla uvnitř tělíčka červa působit tahovou sílu

$$F_\mathrm{t} = \frac{1}{4}\frac{mlc^6}{(2GM)^2}\,.$$

Vidíme, že tato síla klesá s rostoucí hmotností (a tedy s rostoucí hodnotou a) červí díry. Minimální hodnotu M, aby červ průchod červí dírou přežil, tedy spočítáme porovnáním F_t s F_lim ze zadání. Máme pak

$$M_\mathrm{lim} = \frac{1}{2G}\sqrt{\frac{mlc^6}{4F_\mathrm{lim}}} \doteq 0{,}51 \cdot 10^{37}\,\mathrm{kg} \doteq 2{,}6 \cdot 10^6\,M_\odot\,.$$

Dopočítáme rovněž odpovídající hodnotu a jako

$$a_\mathrm{lim} = \frac{2GM_\mathrm{lim}}{c^2} \doteq 7{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \doteq 0{,}05\,\mathrm{au}\,.$$

Vidíme tedy, že předpoklady $m \ll M$ a $l \ll a$ jsou splněny.

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

C Ve znamení Velryby

(max. 10 bodů)

Jaká je šance, že se člověk narodí ve znamení Velryby? Tedy spočítejte, jak dlouho se alespoň kousek slunečního kotouče nachází uvnitř oblasti oblohy patřící souhvězdí Velryby. Uvažujte, že ke vstupu i výstupu dochází v okamžiku vnějšího dotyku slunečního kotouče s hraniční přímkou souhvězdí. Počítejte, že Země je v té roční době vzdálená od Slunce $d = 1{,}493 \cdot 10^8$ km a že se právě pohybuje průměrnou rychlostí pohybu Země kolem Slunce. Sklon nebeského rovníku vůči rovině ekliptiky je $\varepsilon = 23{,}44°$. K dispozici máte situační mapku 1 a tabulku 1 souřadnic hraničních bodů souhvězdí Velryby. Pro jednoduchost předpokládejte, že v blízkosti rohů jsou na sebe hraniční linie přibližně kolmé, i když je z tabulky 1 zřejmé, že tomu tak úplně není.

Nápověda: můžete využít sférické sinové věty

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}\,,$$

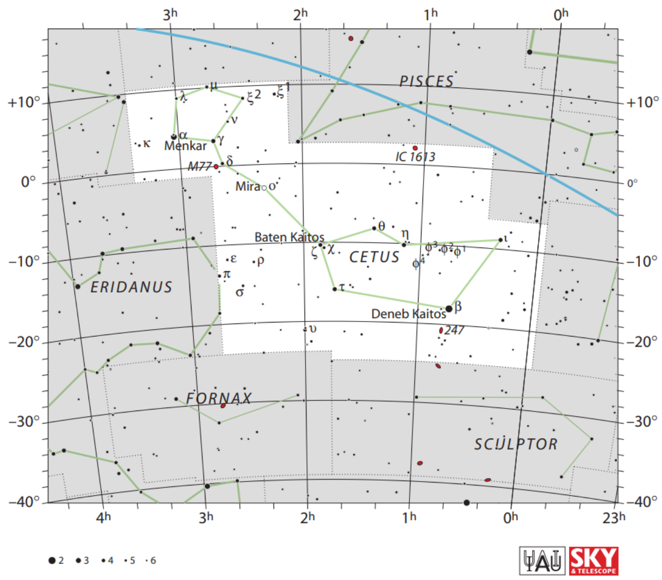
sférické kosinové věty pro strany

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \cos C$$

a sférické kosinové věty pro úhly

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\,,$$

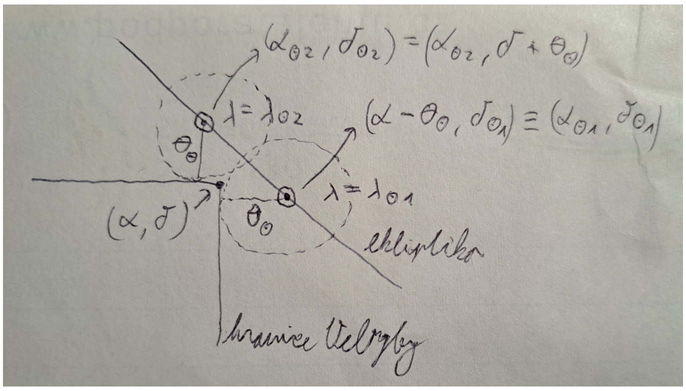
které platí pro sférický trojúhelník o stranách a, b, c a vnitřních úhlech A, B, C.



Obrázek 1: Mapka pro nalezení správné oblasti, kde se část Slunce promítá do souhvězdí Velryby. Modrá čára je ekliptika. Zdroj: *IAU: Cetus – constellation charts.*

Tabulka 1: Souřadnice hraničních bodů souhvězdí Velryby. Zdroj: *IAU: Cetus – constellation boundary.*

rektascenze	deklinace
$00^{\mathrm{h}}\,26^{\mathrm{m}}\,24{,}3189^{\mathrm{s}}$	$0{,}6925398°$
$00^{\mathrm{h}}\,26^{\mathrm{m}}\,24{,}9090^{\mathrm{s}}$	$2{,}6925383°$
$02^{\mathrm{h}}\,06^{\mathrm{m}}\,27{,}6639^{\mathrm{s}}$	$2{,}5978806°$
$02^{\mathrm{h}}\,06^{\mathrm{m}}\,39{,}6594^{\mathrm{s}}$	$10{,}5143948°$
$03^{\mathrm{h}}\,23^{\mathrm{m}}\,47{,}1387^{\mathrm{s}}$	$10{,}3632069°$
$03^{\mathrm{h}}\,23^{\mathrm{m}}\,24{,}7161^{\mathrm{s}}$	$0{,}4469725°$
$03^{\mathrm{h}}\,23^{\mathrm{m}}\,20{,}8039^{\mathrm{s}}$	$-1{,}3029516°$
$02^{\mathrm{h}}\,45^{\mathrm{m}}\,21{,}4131^{\mathrm{s}}$	$-1{,}2210265°$
$02^{\mathrm{h}}\,44^{\mathrm{m}}\,35{,}7021^{\mathrm{s}}$	$-23{,}8536034°$
$01^{\mathrm{h}}\,45^{\mathrm{m}}\,51{,}8397^{\mathrm{s}}$	$-23{,}7562580°$
$01^{\mathrm{h}}\,45^{\mathrm{m}}\,50{,}1333^{\mathrm{s}}$	$-24{,}8729095°$
$23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,26{,}5355^{\mathrm{s}}$	$-24{,}8042011°$
$23^{\mathrm{h}}\,56^{\mathrm{m}}\,24{,}7917^{\mathrm{s}}$	$-6{,}3042021°$
$00^{\mathrm{h}}\,26^{\mathrm{m}}\,22{,}2486^{\mathrm{s}}$	$-6{,}3074551°$



Obrázek 2: Zákres situace při vstupu a při výstupu slunečního kotouče z oblasti souhvězdí Velryby.

Hraniční bod, který je ekliptice nejblíže, má (z mapky 1 a tabulky 1) rektascenzi $\alpha = 00^{\mathrm{h}}\,26^{\mathrm{m}}\,24{,}9090^{\mathrm{s}}$ a deklinaci $\delta = 2{,}6925383°$.

Budeme vycházet z trojúhelníku jarní bod–průmět středu Slunce na rovník–střed Slunce, tedy pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami α a δ a přeponou λ (ekliptikální délka Slunce). Vnitřní úhel u jarního bodu je $\varepsilon = 23{,}44°$, vnitřní úhel u Slunce označíme φ.

Délku pobytu Slunce v souhvězdí Velryby určíme z rozdílu jeho ekliptikálních délek při vstupu a při výstupu z oblasti souhvězdí $\Delta\lambda = \lambda_{\odot 2} - \lambda_{\odot 1}$ a jeho úhlové rychlosti po obloze $\omega_\odot = \frac{360°}{365{,}25\,\mathrm{d}} \doteq 0{,}986\,°\mathrm{d}^{-1}$. Z obrázku 2 je zřejmé, že střed slunečního kotouče při vstupu do Velryby je přesně o úhlový poloměr Slunce $\theta_\odot = \frac{R_\odot}{d} \doteq 16'$ daleko od hraničního bodu. Jelikož se ale poledníky směrem k pólům sbíhají, odpovídá to rozdílu v rektascenzi o $\frac{\theta_\odot}{\cos\delta}$. Protože se bod nachází velmi blízko rovníku, je faktor $\cos\delta \approx 0{,}999$ a nemá na číselný výsledek podstatný vliv. Analogicky v okamžiku výstupu platí $\delta_{\odot 2} = \delta + \theta_\odot$.

Pro určení ekliptikální délky Slunce v okamžiku vstupu do Velryby nejprve ze sférické kosinové věty spočteme úhel φ (vnitřní úhel trojúhelníku u Slunce) a poté ze sférické sinové věty přímo ekliptikální délku

$$\cos\varphi = -\cos\varepsilon\cos 90^\circ + \sin\varepsilon\sin 90^\circ\cos\alpha_{\odot 2}\,,$$

tedy

$$\varphi = \arccos\left(\sin\varepsilon\cos(\alpha-\theta_\odot)\right) \doteq 66{,}71^\circ\,.$$

Sinová věta pak říká

$$\frac{\sin\lambda_{\odot 1}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin\alpha_{\odot 1}}{\sin\varphi}\,,$$

tedy

$$\lambda_{\odot 1} = \arcsin\left(\frac{\sin\left(\alpha-\theta_\odot\right)}{\sin\varphi}\right) \doteq 6{,}901^\circ\,.$$

Ekliptikální délka při výstupu je daná sférickou sinovou větou

$$\frac{\sin\lambda_{\odot 2}}{\sin 90^\circ} = \frac{\sin\delta_{\odot 2}}{\sin\varepsilon}\,,$$

$$\lambda_{\odot 2} = \arcsin\left(\frac{\sin\left(\delta+\theta_\odot\right)}{\sin\varepsilon}\right) \doteq 7{,}458^\circ\,.$$

Doba pobytu Slunce ve Velrybě je tedy

$$\Delta t = \frac{\Delta\lambda}{\omega_\odot} \doteq 0{,}564\,\mathrm{d} = 13{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Pravděpodobnost je tedy $\frac{\Delta t}{365{,}25\,d} = 0{,}15\,\%$. Zhruba každý 650. člověk se tak narodil ve znamení Velryby a ani o tom neví.

D Extremální maximální elongace Merkuru

(max. 10 bodů)

Jak asi víte, úhlová vzdálenost vnitřních planet Merkuru a Venuše se nikdy nemůže dostat přes určitou maximální hodnotu. Maximální úhlová vzdálenost od Slunce, do které se planeta dostane během jedné synodické periody, se nazývá maximální (východní nebo západní) elongace. Spočítejte, jaká je nejmenší možná maximální elongace a jaká je nejvyšší možná maximální elongace Merkuru. Bez odvození předpokládejte, že při nejnižší nebo nejvyšší maximální elongaci musí být úhel Slunce–Merkur–Země pravý.

Uvažujte, že oběžná dráha Země je kruhová, ale oběžná dráha Merkuru je eliptická. Obě dráhy leží v rovině ekliptiky.

Maximální úhlová vzdálenost od Slunce nastane v případě, kdy směr pohledu od Země k Merkuru je tečný k oběžné dráze Merkuru. Také ze zadání máme předpokládat, že při extrému maximální elongace (minimum nebo maximum) můžeme předpokládat, že úhel Slunce–Merkur–Země je pravý. Z geometrie elipsy vyplývá, že obě podmínky mohou být současně splněny, jen pokud se Merkur nachází v perihelu nebo v afeliu. Žádná jiná možnost není. Pokud se tedy Merkur při maximální elongaci nachází v periheliu, jedná se o nejnižší maximální elongaci, zatímco v afeliu se jedná o nejvyšší maximální elongaci.

Dokázat, že extrémní hodnoty maximální elongace nastávají právě v periheliu a v afeliu, je poměrně pracné a vyžaduje to znalost derivací, proto jsme to po vás v zadání nepožadovali. Rovnou jsme proto v zadání předpokladem pravého úhlu naznačili, že řešení úlohy máte hledat v periheliu a v afeliu.

Vzdálenost Země od Slunce označíme jako a_Z a vzdálenost Merkuru od Slunce v okamžiku maximální elongace označíme jako r_M. Pokud úhel Slunce–Merkur–Země je pravý, pak úhlová vzdálenost Merkuru od Slunce v maximální elongaci je

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r}{a_\mathrm{Z}}\right) . \tag{1}$$

Vzdálenost Merkuru od Slunce v periheliu je $r_\mathrm{min} = a_\mathrm{M}(1-e)$, kde a_M je velká poloosa dráhy Merkuru a e je excentricita jeho dráhy. Vzdálenost Merkuru od Slunce v afeliu je $r_\mathrm{max} = a_\mathrm{M}(1+e)$. Po dosazení do vztahu (1) dostaneme minimální maximální elongaci

$$\alpha_\mathrm{min} = \arcsin\left(\frac{a_\mathrm{M}(1-e)}{a_\mathrm{Z}}\right) \tag{2}$$

a maximální maximální elongaci

$$\alpha_\mathrm{max} = \arcsin\left(\frac{a_\mathrm{M}(1+e)}{a_\mathrm{Z}}\right) . \tag{3}$$

Po dosazení číselných hodnot $a_\mathrm{Z} = 1{,}00\,\mathrm{au}$, $a_\mathrm{M} = 0{,}387\,\mathrm{au}$ a $e = 0{,}206$ z tabulky konstant spočítáme číselné výsledky pro minimální maximální elongaci 17,9° a pro maximální maximální elongaci 27,8° .

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

E IncL1ned orbit

(max. 20 bodů)

Mise inspirovaná letem lodi Artemis II má za cíl dopravit sondu z nízké oběžné dráhy Země (LEO) na trajektorii směřující k Měsíci. Sonda začíná na kruhové dráze ve výšce $h_0 = 200\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země. Pro jednoduchost budeme nejprve uvažovat zjednodušený model, kdy se původní oběžná dráha sondy i oběžná dráha Měsíce nacházejí v jedné rovině.

Aby bylo možné sondu navést na trajektorii směrem k Měsíci, musí se nejprve dostat do oblasti libračního bodu L1. Tento bod leží na spojnici Země–Měsíc a vyrovnává se v něm gravitační působení Země a Měsíce s odstředivou silou v rotující soustavě Země–Měsíc. V následujících částech úlohy proto nejprve zjistíme vzdálenost tohoto bodu od Země.

a) Vyjádřete úhlovou rychlost ω otáčení soustavy Země–Měsíc kolem barycentra pomocí vzdálenosti Země–Měsíc D, hmotnosti Země M_Z, hmotnosti Měsíce M_M a gravitační konstanty G. [**2 b**]

Úhlová rychlost ω je definována vztahem

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\,,$$

kde T označuje oběžnou periodu soustavy. Pomocí 3. Keplerova zákona lze tuto periodu vyjádřit jako

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 D^3}{G(M_\mathrm{Z} + M_\mathrm{M})}}\,,$$

z čehož po dosazení do předchozího vztahu dostáváme

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{G(M_\mathrm{Z} + M_\mathrm{M})}{D^3}}\,.$$

b) Z výše zmíněného požadavku na rovnost sil sestavte rovnici pro vzdálenost r_1 Lagrangeova bodu L1 od Země v soustavě Země–Měsíc. [**3 b**]

Gravitační síla, kterou Země působí na těleso o hmotnosti m, má v L1 velikost

$$F_{\mathrm{g,Z}} = G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1^2}\,,$$

zatímco gravitační síla od Měsíce je dána vztahem

$$F_{\mathrm{g,M}} = G\frac{mM_\mathrm{M}}{(D - r_1)^2}\,.$$

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Odstředivou sílu v rotující soustavě vyjádříme jako

$$F_\mathrm{o} = m\omega^2\left(r_1 - D\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M}}\right) = m\frac{G(M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M})}{D^3}\left(r_1 - D\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M}}\right),$$

kde $r_1 - D\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M}}$ je vzdálenost bodu L1 od barycentra (za předpokladu $M_\mathrm{M} \ll M_\mathrm{Z}$ bude přibližně rovna r_1). V bodě L1 musí být splněna rovnost

$$F_\mathrm{g,Z} = F_\mathrm{g,M} + F_\mathrm{o}\,,$$

což po dosazení a vydělení faktorem Gm vede na rovnici

$$\frac{M_\mathrm{Z}}{r_1^2} = \frac{M_\mathrm{M}}{(D-r_1)^2} + \frac{(M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M})}{D^3}\left(r_1 - D\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{Z}+M_\mathrm{M}}\right).$$

Můžeme si všimnout, že z rovnice, kterou jsme získali, nelze hledanou vzdálenost r_1 snadno vyjádřit. Lze však využít následujících aproximací: hmotnost Měsíce je zanedbatelná ve srovnání s hmotností Země ($M_\mathrm{M} \ll M_\mathrm{Z}$) a vzdálenost $x = D - r_1$ Měsíce od Lagrangeova bodu L1 je mnohem menší než vzdálenost Země–Měsíc ($x \ll D$).

c) S použitím těchto aproximací vyjádřete z rovnice vzdálenost r_1 bodu L1 od Země. Může se vám hodit přibližný vztah $(1+a)^n \approx 1 + na$ pro $a \ll 1$. Vypočtěte také číselně r_1 v km. [**4 b**]

Nejprve si uvědomíme, že za použití této aproximace lze ztotožnit barycentrum se středem Země, tedy místo vzdálenosti od barycentra psát v odstředivém členu jen r_1. Dále upravíme rovnici odvozenou v předchozí části tak, že za vzdálenost r_1 dosadíme pomocí proměnné x a v druhém členu na pravé straně rovnice zanedbáme hmotnost Měsíce. Tím se rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{M_\mathrm{Z}}{(D-x)^2} = \frac{M_\mathrm{M}}{x^2} + \frac{M_\mathrm{Z}}{D^3}(D-x)\,.$$

Z levé strany rovnice vytkneme ve jmenovateli D^2 a využijeme aproximaci ze zadání

$$\frac{M_\mathrm{Z}}{(D-x)^2} = \frac{M_\mathrm{Z}}{D^2(1-\frac{x}{D})^2} \approx \frac{M_\mathrm{Z}}{D^2}\left(1 + 2\frac{x}{D}\right).$$

Obdobně upravíme i druhý člen na pravé straně rovnice, kde vytkneme D. Po provedení aproximace tedy dostáváme

$$\frac{M_\mathrm{Z}}{D^2}\left(1 + 2\frac{x}{D}\right) = \frac{M_\mathrm{M}}{x^2} + \frac{M_\mathrm{Z}}{D^3}D\left(1 - \frac{x}{D}\right).$$

Po odečtení stejných členů se rovnice výrazně zjednoduší, čímž dostaneme

$$3x\frac{M_\mathrm{Z}}{D^3} = \frac{M_\mathrm{M}}{x^2}\,,$$

odkud již jen vyjádříme x, respektive r_1 jako

$$r_1 = D - x = D\left(1 - \sqrt[3]{\frac{M_\mathrm{M}}{3M_\mathrm{Z}}}\right).$$

Po dosazení číslených hodnot vychází $r_1 = 0{,}84D = 3{,}23 \cdot 10^5$ km.

d) Vyjádřete celkovou mechanickou energii E_0 sondy na počáteční kruhové oběžné dráze kolem Země. Výsledek vyjádřete pomocí hmotnosti m sondy, hmotnosti M_Z Země, poloměru R_Z Země, výšky h_0 dráhy nad povrchem a gravitační konstanty G. Můžete předpokládat, že gravitační působení Měsíce je v tomto bodě zanedbatelné, stejně tak jako odstředivá síla působící v soustavě korotující se spojnicí Země–Měsíc. [**1 b**]

Zanedbáváme-li odstředivý příspěvek k energii i potenciální energii v důsledku gravitačního působení Měsíce, bude mechanická energie dána jen součtem kinetické energie $E_{\mathrm{k},0}$ na původní dráze a potenciální energie v gravitačním poli Země $E_{\mathrm{p,Z},0}$. Nyní můžeme obě tyto energie buď vyjádřit zvlášť (v případě kinetické bychom využili vztah pro kruhovou rychlost na počáteční dráze) a sečíst, nebo rovnou použít vztah pro celkovou mechanickou energii na dráze s velkou poloosou $R_\mathrm{Z} + h_0$. Oběma způsoby dostaneme pro celkovou mechanickou energii výsledek

$$E_0 = -\frac{GmM_\mathrm{Z}}{2(R_\mathrm{Z} + h_0)} \,.$$

e) Vyjádřete celkovou mechanickou energii E_1 sondy v bodě L1 v rotující soustavě Země–Měsíc pomocí m, M_Z, M_M, R_Z, r_1, D, ω, G a obecné rychlosti v_1, kterou má sonda v L1 vzhledem k L1. [**3 b**]

Nacházíme se v rotující soustavě Země–Měsíc, proto musíme do výpočtu celkové mechanické energie zahrnout kromě kinetické a potenciální energie v důsledku působení Země a Měsíce ještě navíc odstředivý příspěvek. Ten bude roven

$$E_\mathrm{o} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2 \,.$$

Pro kinetickou energii $E_{\mathrm{k},1}$ můžeme psát

$$E_{\mathrm{k},1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \,,$$

pro potenciální energii od Země $E_{\mathrm{p,Z},1}$ máme

$$E_{\mathrm{p,Z},1} = -G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1}$$

a analogicky pro potenciální energii $E_{\mathrm{p,M},1}$ od Měsíce

$$E_{\mathrm{p,M},1} = -G\frac{mM_\mathrm{M}}{D - r_1} \,.$$

Celková mechanická energie E_1 sondy v bodě L1 je tedy

$$E_1 = E_\mathrm{o} + E_{\mathrm{k},1} + E_{\mathrm{p,Z},1} + E_{\mathrm{p,M},1} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2 - G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1} - G\frac{mM_\mathrm{M}}{D - r_1} \,.$$

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Uvažujme, že přechod sondy z počáteční kruhové dráhy (LEO) do oblasti bodu L1 je realizován jediným impulsním manévrem. To znamená, že v určitém okamžiku na původní kruhové dráze sondě náhle zvýšíme velikost rychlosti o Δv. Cílem je dosáhnout bodu L1.

f) Určete změnu velikosti rychlosti Δv, kterou je nutné sondě udělit na počáteční kruhové dráze, aby se dostala až do bodu L1. Uvažujte mezní případ, kdy sonda dorazí do bodu L1 právě s nulovou rychlostí vzhledem k L1 (tj. $v_1 = 0$). Výslednou velikost rychlosti po udělení impulsu porovnejte s hodnotou únikové (parabolické) rychlosti z výšky $h_0 = 200\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země. Výsledky vyjádřete číselně v $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. [**4 b**]

Potřebnou velikost rychlosti, kterou musí sonda mít, aby se dostala do L1, určíme ze zákona zachování mechanické energie. Celková mechanická energie, kterou bude mít sonda těsně po udělení impulzu, musí být rovna celkové mechanické energii v Lagrangeově bodě L1, kam předpokládáme, že sonda doletí s rychlostí $v_1 = 0$. Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h_0} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2 - G\frac{mM_\mathrm{Z}}{r_1} - G\frac{mM_\mathrm{M}}{D - r_1}\,,$$

kde jsme velikost rychlosti sondy těsně po impulzu označili jako v. Vyjádříme v a dosadíme za ω

$$v = \sqrt{-\frac{G(M_\mathrm{Z} + M_\mathrm{M})}{D^3} r_1^2 - 2G\left(\frac{M_\mathrm{Z}}{r_1} + \frac{M_\mathrm{M}}{D - r_1} - \frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h_0}\right)}\,,$$

po dosazení číselných hodnot nám vyjde $v = 10{,}9\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Původní rychlost v_0 můžeme vyjádřit jako kruhovou rychlost na dráze o poloměru $R_\mathrm{Z} + h_0$, tedy

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h_0}} = 7{,}8\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

Změna velikosti rychlosti tedy vychází $\Delta v = v - v_0 = 3{,}1\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$. Konečně pro únikovou rychlost z výšky h_0 máme

$$\sqrt{\frac{2GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + h_0}} \doteq 11{,}0\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

Vidíme tedy, že aby kosmická loď dosáhla bodu L1, stačí jí udělit rychlost, jejíž velikost je o něco nižší než hodnota druhé kosmické rychlosti.

Dosud jsme pohyb sondy zjednodušovali na dvourozměrný problém, kdy jsme uvažovali, že se dráha sondy nachází v rovině oběhu Měsíce. Tento předpoklad ale neodpovídá reálné situaci. Ve skutečnosti naše sonda startuje z nízké oběžné dráhy Země, která leží v rovině zemského rovníku. Rovina oběhu Měsíce je však vůči rovníkové rovině Země skloněna o jistý úhel α (jehož hodnota se v čase mění mezi 18 a 29 stupni). Pohyb sondy tedy probíhá postupně ve dvou různých rovinách. Aby bylo možné sondu navést na trajektorii směřující k bodu L1 v soustavě Země–Měsíc, je nejprve nutné provést manévr, kterým dojde ke změně inklinace její dráhy tak, aby byla sladěna s rovinou oběhu Měsíce. V následujících částech úlohy se proto na tento manévr zaměříme. Chceme tedy provést impulsní manévr, při kterém dojde ke změně roviny oběžné dráhy sondy o úhel α, přičemž velikost její oběžné

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

rychlosti zůstane po manévru zachována. Je zřejmé, že takovýto manévr má smysl provádět v bodě, kde původní dráha protíná rovinu nové dráhy skloněné o úhel α vůči té původní.

g) Ukažte, že velikost změny rychlosti $\Delta v'$, kterou je nutné sondě na kruhové oběžné dráze při takovém manévru udělit, je dána vztahem

$$\Delta v' = 2\sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z + h_0}}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Může se vám hodit goniometrická identita $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$. V případě, že by počáteční dráha nebyla kruhová, ale eliptická, v jakém speciálním bodě elipsy by bylo provedení takového manévru energeticky nejvýhodnější? Předpokládejte, že elipsu lze v rámci původní orbitální roviny libovolně pootočit tak, aby tento speciální bod souhlasil s průsečíkem počáteční dráhy s rovinou nové. [**2 b**]

Nejprve si načrtneme obrázek, do kterého zakreslíme původní vektor rychlosti $\vec{v}_0$ a nový vektor rychlosti $\vec{v}'$. Oba tyto vektory mají stejnou velikost $v_0 = \sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z+h_0}}$ přičemž svírají úhel α, protože došlo pouze ke změně směru pohybu. Vektor změny rychlosti $\Delta\vec{v}'$ je dán rozdílem těchto dvou vektorů, tedy vektorem spojujícím jejich koncové body. Vzniká nám tak trojúhelník tvořený vektory $\vec{v}_0$, $\vec{v}'$ a $\Delta\vec{v}'$. Pro tento trojúhelník můžeme psát kosinovou větu a z ní vyjádřit $\Delta v'$ jako

$$(\Delta v')^2 = v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2\cos\alpha\,.$$

Odmocníme a vytkneme v_0

$$\Delta v' = v_0\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\,,$$

dále využijeme goniometrickou identitu napovězenou v zadání a dostaneme

$$\Delta v' = \sqrt{2\frac{GM_Z}{R_Z+h_0}\cdot 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{GM_Z}{R_Z+h_0}}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Z výsledného vztahu vidíme, že $\Delta v'$ závisí na úhlu α, který je konstanta, a na rychlosti v_0. Pokud bychom tedy chtěli udělat manévr v případě eliptické dráhy, tak aby byl energeticky co nejvýhodnější (tj. aby $\Delta v'$ bylo co nejmenší), bylo by nejvýhodnější zvolit bod dráhy, kde má sonda na eliptické dráze nejnižší rychlost. Ideální pro manévr je tedy apogeum.

h) Určete rovněž směr tohoto impulzu (v případě, že počáteční dráha byla kruhová). Výsledek zapište jako úhel, který směr impulzu svírá s vektorem původní rychlosti sondy. [**1 b**]

Využijeme opět trojúhelník z předchozí podúlohy. Nejjednodušší bude uvědomit si, že součet úhlů v trojúhelníku musí být 180°, takže pro úhel θ, který svírá vektor v_0 s vektorem $\Delta v'$, dostáváme

$$\theta = \frac{180^\circ + \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}\,.$$

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

F Pružné hvězdy

(max. 20 bodů)

Zatímco v krajském kole jste pomocí numerického výpočtu po vrstvách odhadovali vnitřní strukturu a teplotu statického Slunce, v této úloze se zaměříme na dynamiku hvězd. Budeme uvažovat pulzující hvězdu jako jednoduchý mechanický oscilátor, který periodicky mění svůj objem kolem rovnovážného stavu. Cílem úlohy je odvodit, proč perioda těchto kmitů přímo vypovídá o zářivém výkonu hvězdy a teoreticky tak odůvodnit vztah, který v astronomii slouží jako základní nástroj pro měření intergalaktických vzdáleností. V úloze se budeme pro jednoduchost soustředit na hvězdy hlavní posloupnosti (zatímco typické standardní svíčky jako cefeidy na hlavní posloupnosti neleží).

Nejprve se pokusíme pouze odhadnout, jak by mohl vypadat vztah pro periodu pulzací hvězdy v závislosti na její střední hustotě.

a) Odvoďte vztah pro periodu Π pulzací hvězdy pomocí rozměrové analýzy (tedy až na bezrozměrný koeficient C, o kterém lze předpokládat, že je řádu 1). Předpokládejte, že perioda pulzací hvězdy bude dána střední hustotou ρ_0 hvězdy a Newtonovou gravitační konstantou G. **[1,5 b]**

Hledáme vztah ve tvaru

$$\Pi \propto G^a \rho_0^b \,,$$

kde a, b jsou neznámé exponenty. Fyzikální rozměry jednotlivých veličin jsou $[\Pi] = \mathrm{s}$, $[G] = \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ a $[\rho_0] = \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Výše uvedený vztah pro veličiny znamená, že pro rozměry musí platit

$$[\Pi] = [G]^a [\rho_0]^b \,,$$

a tedy

$$\mathrm{s} = (\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}})^a (\mathrm{kg \cdot m^{-3}})^b \,.$$

Porovnáme exponenty u jednotlivých základních rozměrů, čímž dostaneme tři rovnice

$$\begin{aligned} \mathrm{s} &= \mathrm{s}^{-2a} \,, \\ \mathrm{m}^0 &= \mathrm{m}^{3a} \cdot \mathrm{m}^{-3b} \,, \\ \mathrm{kg}^0 &= \mathrm{kg}^{-a} \cdot \mathrm{kg}^{b} \,, \end{aligned}$$

takže pro exponenty samotné dostáváme

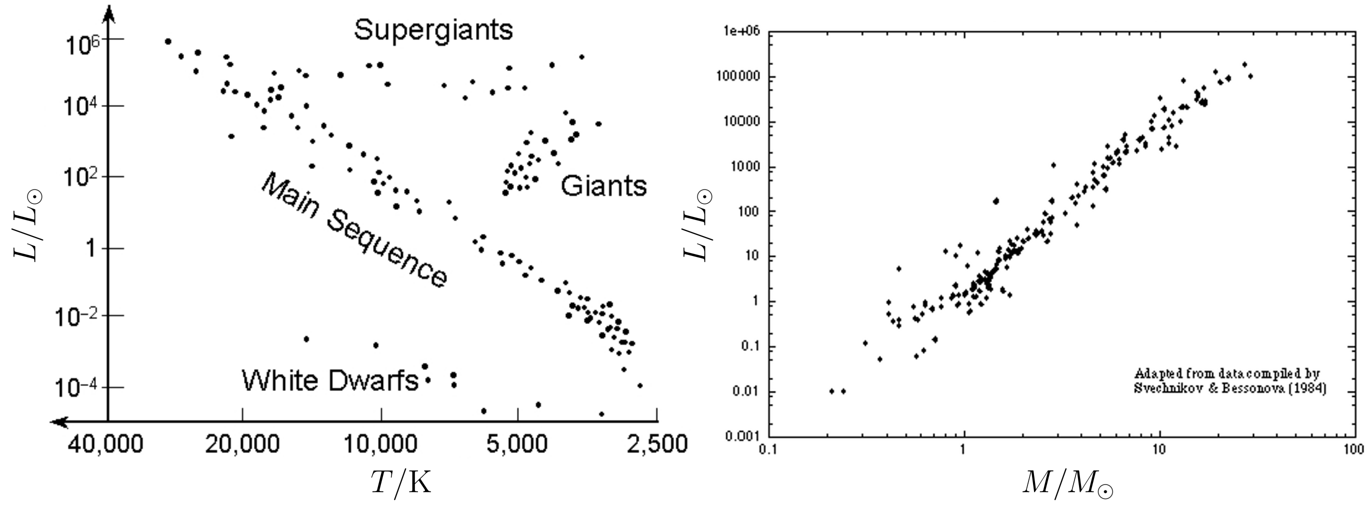
$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2} \,, \\ b &= a = -\frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

Pro periodu pulzací tedy platí vztah

$$\Pi \approx \frac{C}{\sqrt{G\rho_0}} \,,$$

kde C je neznámý bezrozměrný koeficient.

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



(a) HR diagram pro závislost zářivého výkonu v násobcích zářivého výkonu Slunce na povrchové teplotě v kelvinech.[1]

(b) Závislost zářivého výkonu hvězd na hlavní posloupnosti v násobcích zářivého výkonu Slunce na hmotnosti v násobcích hmotnosti Slunce.[2]

Obrázek 3: Diagramy závislostí zářivého výkonu hvězd. Všechny osy jsou v logaritmickém měřítku.

Pro odvození závislosti zářivého výkonu hvězd L na periodě pulzací je potřeba vyjádřit všechny parametry hvězdy právě pomocí zářivého výkonu. K tomu je užitečný jednak diagram závislosti zářivého výkonu na povrchové teplotě T, neboli Hertzsprungův–Russellův diagram, na obrázku 3a a jednak diagram závislosti zářivého výkonu na hmotnosti hvězd M na obrázku 3b.

b) Proložením lineární závislosti daty v grafu na obrázku 3b odhadněte závislost $M(L)$ hmotnosti hvězd hlavní posloupnosti na jejich zářivém výkonu L jako mocninnou funkci. Výsledek napište ve tvaru

$$\frac{M}{M_\odot} \approx \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^p ,$$

kde p je číslo, které přibližně určíte. Využijte rovněž HR diagram na obrázku 3a k určení závislosti $R(L)$ poloměru hvězd hlavní posloupnosti na jejich zářivém výkonu L jako mocninnou funkci. Výsledek vyjádřete ve tvaru

$$\frac{R}{R_\odot} \approx \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^q ,$$

kde q je číslo, které přibližně určíte. **[2,5 b]**

Vyjdeme z grafu 3b, kde body přibližně opisují přímku. Tuto přímku můžeme odhadem popsat jako

$$\log \frac{L}{L_\odot} \approx 4{,}0 \log \frac{M}{M_\odot} .$$

Koeficient úměrnosti získaný z grafu můžeme vepsat jako exponent argumentu logaritmu a umocnit celou rovnici

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4{,}0} ,$$

[1]Zdroj: `https://www.astronomy.ohio-state.edu/thompson.1847/1144/Lecture9.html`
[2]Zdroj: `https://www.astronomynotes.com/starsun/s8.htm`

tedy stačí už jen vyjádřit M
$$M \approx M_\odot \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{0{,}25},$$
tedy $p \approx 0{,}25$. Ani jeden graf výše nevyjadřuje přímo nějakou závislost na poloměru hvězd, avšak ten je se zářivým výkonem a teplotou svázán Stefanovým–Boltzmannovým zákonem
$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,,$$
což pro zjednodušení porovnáme se Sluncem
$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{R}{R_\odot}\right)^2 \left(\frac{T}{T_\odot}\right)^4.$$
Odtud si vyjádříme R jako
$$\frac{R}{R_\odot} = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}\left(\frac{T_\odot}{T}\right)^4}.$$
Stačí si tedy vyjádřit závislost teploty na zářivém výkonu $T(L)$, k čemuž nám poslouží HR diagram. Stejně jako v minulé podúloze jsou zde hvězdy hlavní posloupnosti přibližně uspořádány podél přímky. Osa T je ovšem v logaritmickém měřítku o základu 2, na rozdíl od dekadického logaritmu měřítka zářivého výkonu. Označme si pro přehlednost povrchovou teplotu Slunce $T_\odot \doteq 5\,800\,\mathrm{K}$. Potom platí odhadem
$$\log\frac{L}{L_\odot} \approx 2{,}4\log_2\frac{T}{T_\odot}.$$
Dvojkový logaritmus na pravé straně rovnice převedeme na dekadický
$$\log\frac{L}{L_\odot} \approx \frac{2{,}4}{\log 2}\log\frac{T}{T_\odot} \approx 8{,}0\log\frac{T}{T_\odot},$$
což už můžeme převést do mocninné formy jako
$$\frac{T}{T_\odot} \approx \sqrt[8{,}0]{\frac{L}{L_\odot}}.$$
Po dosazení do Stefanova–Boltzmannova zákona dostáváme
$$\frac{R}{R_\odot} \approx \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{0{,}25},$$
tedy $q \approx 0{,}25$.

c) Určete závislost zářivého výkonu hvězd na jejich periodě pulzací $L(\Pi)$. Výsledek vyjádřete jako mocninnou závislost ve tvaru
$$L \approx K\Pi^\alpha\,,$$
kde přibližně určete exponent α a K je koeficient, který určovat nemusíte. [**1,0 b**]

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Již známe závislost periody pulzací na hustotě hvězdy. Pokud si hustotu vyjádříme jako poměr hmotnosti a objemu, dostáváme

$$\Pi^2 \approx \frac{4\pi R^3 C^2}{3GM} \,.$$

Nyní za M a R dosadíme výsledky z minulých podúloh

$$\Pi^2 \approx \frac{4\pi R_\odot^3 C^2}{3GM_\odot}\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{0{,}5} .$$

Po vyjádření L dostáváme

$$L \approx L_\odot \left(\frac{3GM_\odot}{4\pi R_\odot^3 C^2}\right)^2 \Pi^{4{,}0} \,,$$

tedy $\alpha \approx 4{,}0$.

Pro klasické cefeidy platí tzv. zákon Leavittové

$$M_V = (-2{,}43 \pm 0{,}12)(\log \tfrac{\Pi}{\mathrm{d}} - 1) - (4{,}05 \pm 0{,}02) \,.$$

Tento fundamentální vztah umožňuje z pozorované světelné křivky a délky periody poměrně přesně určit absolutní hvězdnou velikost cefeidy, a tedy z porovnání s vizuální hvězdnou velikostí i její vzdálenost, což z cefeid činí tzv. „standardní svíčky“ pro přesné určování vzdáleností na intergalaktických škálách.

d) Určete závislost $M_V(\Pi)$ absolutní hvězdné velikosti na periodě pulzací pro hvězdy hlavní posloupnosti. Porovnejte váš výsledek se zákonem Leavittové. Případné rozdíly se pokuste stručně vysvětlit. **[1,5 b]**

Opět porovnáme se Sluncem, tentokrát v Pogsonově rovnici

$$M_V = M_{V\odot} - 2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot} \approx M_{V\odot} - 10 \log \Pi + 5 \log \frac{4\pi R_\odot^3 C^2}{3GM_\odot} \,.$$

Již z koeficientu u logaritmu periody je zřejmé, že se náš výsledek od zákona Leavittové liší extrémně. Cefeidy totiž rozhodně nejsou hvězdy hlavní posloupnosti – leží v tzv. pásu nestability, proto pro ně neplatí závislosti získané fitováním zářivého výkonu v závislosti na hmotnosti a teplotě. Pulzy cefeid se navíc řídí tzv. κ-mechanismem, jehož hlavním principem jsou změny opacity, kterou my vůbec neuvažujeme. Vztah $\Pi \propto 1/\sqrt{\rho_0}$ odvozený zpočátku úlohy však platí velmi obecně pro libovolnou kmitající kouli ideálního plynu.

V druhé části úlohy se pokusíme o podrobnější analýzu fyzikálních mechanismů, které stojí za pulzací hvězd. Hvězdu modelujme jako sféricky symetrickou kouli ideálního plynu, ve které se ustavila hydrostatická rovnováha. Označme jako r vzdálenost od středu hvězdy, R_0 rovnovážný poloměr hvězdy a $\rho_0(r) = \rho_0 = \text{konst.}$ (pro $r \leq R_0$) rovnovážnou hustotu hvězdy, o které budeme pro jednoduchost předpokládat, že je homogenní.

e) Napište vztah pro velikost gravitačního zrychlení $g_0(r)$, které by pociťovalo testovací těleso ve vzdálenosti $r \leq R_0$ od středu hvězdy. Výsledek vyjádřete pomocí G, r a ρ_0. **[1,0 b]**

Nápověda: může se vám hodit fakt, že toto gravitační zrychlení je identické gravitačnímu zrychlení, které by způsobil hmotný bod (nacházející se ve středu hvězdy) o hmotnosti $M_0(r)$, která je obsažena v pomyslné kouli o poloměru $r \leq R_0$.

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Nejprve dostaneme

$$M_0(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \,.$$

Použitím nápovědy pak máme

$$g_0(r) = \frac{GM_0(r)}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G r \rho_0 \,.$$

Aby byla hvězda v rovnováze, musí tlak $P_0(r)$ ve hvězdě vhodným způsobem záviset na vzdálenosti r od středu a vyrovnávat tak působení gravitace na materiál hvězdy. Odpovídající podmínku hydrostatické rovnováhy lze formulovat následovně: rozdíl $P_0(r_1) - P_0(r_2)$ rovnovážných tlaků ve vzdálenostech $r_1, r_2 \leq R_0$ od středu hvězdy (volíme $r_1 < r_2$) musí být roven ploše pod grafem funkce $g_0(r)\rho_0(r)$ mezi body $r = r_1$ a $r = r_2$.

Uvážíme-li pak velmi tenkou koncentrickou slupku materiálu hvězdy (tedy $r_1 \lesssim r_2$) a přenásobíme-li rozdíl $P_0(r_1) - P_0(r_2)$ tlaků plochou S této slupky, vidíme, že podmínka hydrostatické rovnováhy ekvivalentně vyjadřuje požadavek, aby rozdíl $(P_0(r_1) - P_0(r_2))S$ tlakových sil působících na slupku byl roven gravitační síle působící na slupku, neboť plocha pod grafem funkce $\rho_0(r) S g_0(r)$ mezi r_1 a r_2 je přibližně rovna $\rho_0(r_2 - r_1) S g_0 = m g_0$, kde $m = \rho_0(r_2 - r_1)S$ je hmotnost slupky a g_0 je průměrné gravitační zrychlení slupky.

f) Odvoďte závislost $P_0(r)$ rovnovážného tlaku na vzdálenosti r od středu pro náš model hvězdy: ukažte, že platí

$$P_0(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 (R_0^2 - r^2) \,.$$

Jaký bude tlak P_c ve středu hvězdy? Výsledky vyjádřete pomocí G, ρ_0, R_0 a r. **[1,5 b]**

Uvědomíme si, že funkce

$$g_0(r)\rho_0(r) = \frac{4}{3}\pi G r \rho_0^2$$

je lineární a že rovnovážný tlak $P_0(R_0)$ na povrchu hvězdy musí být nulový. Potom tlak $P_0(r) = P_0(r) - P_0(R_0)$ spočítáme jako obsah lichoběžníku o výšce $R_0 - r$ a základnách $g_0(r)\rho_0(r)$ a $g_0(R_0)\rho_0(R_0)$. Dostaneme

$$P_0(r) = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 (R_0^2 - r^2) \,.$$

Odpovídající tlak ve středu hvězdy bude

$$P_\mathrm{c} = P_0(0) = \frac{2}{3}\pi G \rho_0^2 R_0^2 \,.$$

Uvažujme nyní, že dochází k malým izotropním periodickým výchylkám $x(t) \ll R_0$ poloměru hvězdy kolem rovnovážného stavu popsaného výše. Poloměr hvězdy během oscilace tedy zapíšeme jako $R(t) = R_0 + x(t)$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že tyto výchylky jsou takové, aby byla hustota $\rho(t)$ hvězdy v každém okamžiku homogenní a že jednotlivé koncentrické slupky materiálu hvězdy se mezi sebou v průběhu oscilací nemíchají. Označme $\Delta\rho = \rho(t) - \rho_0 \ll \rho_0$ odpovídající homogenní nadhustotu hvězdy v obecné fázi oscilace.

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Nápověda: ve zbytku úlohy se vám bude hodit, že pro libovolné reálné číslo η takové, že $|\eta| \ll 1$, platí

$$(1+\eta)^n \approx 1 + n\eta\,,$$

kde jsme zanedbali příspěvky vyšších mocnin v η.

g) Vyjádřete nadhustotu $\Delta\rho$ pomocí x, R_0 a ρ_0. Výsledek napište v přibližném tvaru platném pro $x \ll R_0$ jako přímou úměru v poměru x/R_0 s vhodným koeficientem úměrnosti, vyšší mocniny v x/R_0 zanedbejte. [**1,0 b**]

Na základě požadavku zachování celkové hmotnosti hvězdy a homogenity můžeme psát

$$\Delta\rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{(R_0+x)^3} - \rho_0 = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{R_0}\right)^{-3} - \rho_0 \approx -3\rho_0 \frac{x}{R_0}\,.$$

Zaměřme se na materiál hvězdy, který se v rovnovážném stavu nachází v jisté vzdálenosti r od středu. V obecné fázi cyklu oscilací se tento materiál bude nacházet ve vzdálenosti $r + \xi(r,t)$, kde $\xi \ll r$. Z definice výchylky x poloměru hvězdy je zároveň zřejmé, že musíme požadovat $\xi(R_0, t) = x(t)$.

h) Určete tvar výchylky ξ materiálu v rovnovážné vzdálenosti r takový, aby platilo, že hustota hvězdy zůstává během oscilací homogenní. Výsledek vyjádřete pomocí R_0 a r opět jako přibližnou přímou úměru v x/R_0 s vhodným koeficientem. [**1,5 b**]

Nejprve si uvědomíme, že hmotnost hvězdy uzavřená v kouli o poloměru $r+\xi$ se v průběhu oscilace nemění. Při požadavku homogenity tedy musí platit

$$\frac{4}{3}\pi(r+\xi)^3(\rho_0 + \Delta\rho) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0\,.$$

Levou stranu této rovnice přibližně rozepíšeme jako

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 \left(1 + 3\frac{\xi}{r} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right),$$

kde jsme ponechali pouze členy lineární v x. To nám dá výsledek

$$\xi = -\frac{1}{3} r \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = r\,\frac{x}{R_0}\,.$$

Všimněme si, že po dosazení $r = R_0$ skutečně dostáváme $\xi = x$.

Předpokládejme dále, že časová škála výchylek je dostatečně malá na to, abychom pulzaci hvězdy mohli modelovat jako adiabatický děj. Odpovídající Poissonovu konstantu ideálního plynu, ze kterého hvězda sestává, budeme značit jako γ. Označíme-li tedy jako $p(r,t)$ tlak vychýleného materiálu, který se v obecné fázi cyklu oscilace nachází ve vzdálenosti $r+\xi$ od středu (a který se tedy v rovnovážné poloze nacházel ve vzdálenosti r), musí platit, že výraz $(\rho_0 + \Delta\rho)^{-\gamma}\, p$ je konstantní v čase.

i) Určete tlak p vychýleného materiálu v obecné fázi cyklu oscilace. Výsledek zapište pomocí vzdálenosti r materiálu od středu hvězdy v rovnovážném stavu, ξ, r a Poissonovy konstanty γ, a to ve tvaru $p = f(\xi)P_0$, kde funkci $f(\xi)$ vyjádřete pomocí ξ a γ přibližně jako lineární závislost v $\xi/r \ll 1$ (při zanedbání vyšších mocnin ξ/r). [**1,5 b**]

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Platí

$$(\rho_0 + \Delta\rho)^{-\gamma} p = \rho_0^{-\gamma} P_0(r)\,,$$

a tedy

$$p = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} P_0(r) \approx \left(1 - 3\gamma\frac{\xi}{r}\right) P_0(r)\,.$$

Uvažujme nyní velmi tenkou koncentrickou slupku materiálu hvězdy, která má v rovnovážné poloze poloměr r a tloušťku $d_0 \ll R_0$.

j) Jakou tloušťku d bude tato slupka mít v obecné fázi oscilace, kdy má poloměr $r + \xi$? Výsledek vyjádřete přibližně jako lineární funkcí v ξ pomocí d_0 a r. [**1,5 b**]

Nechť je vnitřní plocha v rovnovážné poloze ve vzdálenosti r od středu. Vnější plocha se pak v rovnovážné poloze nachází ve vzdálenosti $r + d_0$ od středu a v obecné fázi oscilace je vychýlena do vzdálenosti $r + d_0 + \xi(r + d_0)$. Musí tedy platit

$$d = (r + d_0 + \xi(r + d_0)) - (r + \xi(r)) = d_0 + \xi(r + d_0) - \xi(r) \approx d_0\left(1 + \frac{x}{R_0}\right) \approx d_0\left(1 + \frac{\xi}{r}\right).$$

V obecné fázi oscilace je podmínka hydrostatické rovnováhy porušena: rozdíl tlakových sil působících na slupku není vyrovnán gravitační silou a slupka se tedy pohybuje se zrychlením.

k) Napište gravitační sílu ΔF_{g} a také rozdíl $\Delta F_{\mathrm{p}} = (p(r + d_0) - p(r))S$ tlakových sil působících na slupku v obecné fázi oscilace. Jako S jsme označili povrch slupky v obecné fázi oscilace. Výsledky vyjádřete přibližně jako lineární funkce v ξ pomocí r, γ, G, ρ_0, S a d. Konkrétně ukažte, že platí

$$\Delta F_{\mathrm{g}} \approx -\frac{4}{3}\pi G r \rho_0^2 S d\left(1 - 5\,\frac{\xi}{r}\right),$$
$$\Delta F_{\mathrm{p}} \approx +\frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 r S d\left(1 - (3\gamma + 1)\frac{\xi}{r}\right).$$

[**3,5 b**]

Pro gravitační sílu (působící směrem do středu) píšeme

$$\Delta F_{\mathrm{g}} \approx -\frac{G M_0(r) S d(\rho_0 + \Delta\rho)}{(r + \xi)^2} \approx -\frac{4}{3}\pi G r \rho_0^2 S d\left(1 - 3\,\frac{\xi}{r}\right)\left(1 - 2\,\frac{\xi}{r}\right) \approx -\frac{4}{3}\pi G r \rho_0^2 S d\left(1 - 5\,\frac{\xi}{r}\right).$$

Pro tlakovou sílu máme

$$\begin{aligned}\Delta F_{\mathrm{p}} &= (p(r) - p(r + d_0))S \\ &\approx \left(1 - 3\gamma\frac{\xi}{r}\right)(P_0(r) - P_0(r + d_0))S \\ &\approx \frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 r S d_0\left(1 - 3\gamma\frac{\xi}{r}\right),\end{aligned}$$

kde za d_0 můžeme přibližně dosadit

$$d_0 = \left(1 - \frac{\xi}{r}\right) d\,.$$

Dostaneme tedy

$$\Delta F_{\mathrm{p}} \approx \frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 r S d\left(1 - (3\gamma + 1)\frac{\xi}{r}\right).$$

Finále 2025/26, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

l) Napište velikost a zrychlení slupky jako lineární funkci ve výchylce ξ materiálu ve slupce pomocí G, ρ_0 a γ. Jaká je podmínka stability našeho modelu hvězdy v termínech Poissonovy konstanty γ? Jinými slovy: pro jaké hodnoty γ budou malé výchylky ξ periodicky oscilovat a pro jaké hodnoty γ budou tyto hodnoty nekontrolovaně růst? Porovnáním se závislostí zrychlení harmonického oscilátoru na jeho výchylce určete periodu pulzací hvězdy. **[2,0 b]**

Nápověda: harmonický oscilátor se při vychýlení o ξ pohybuje se zrychlením $-(\frac{2\pi}{P})^2\xi$, kde Π je perioda oscilací.

Pro zrychlení a slupky píšeme pohybovou rovnici

$$a = \frac{\Delta F_\mathrm{p} + \Delta F_\mathrm{g}}{\rho_0 S d} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0 (3\gamma - 4)\xi\,.$$

Odtud plyne, že pro $\gamma < 4/3$ se bude při kladném vychýlení ξ slupka rozpínat čím dál rychleji, což by vedlo k explozi, nebo při záporném vychýlení ξ naopak zmenšovat čím dál rychleji, což by vedlo ke zhroucení (a následné explozi) hvězdy. Pro $\gamma = 4/3$ bude zrychlení nulové, což by však znamenalo, že se hvězda při sebemenší výchylce ξ opět začne hroutit, resp. rozpínat. Pro $\gamma > 4/3$ se hvězda při kladném i záporném vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy $\xi = 0$, což ji činí stabilní. Podmínka stability takové hvězdy je tedy

$$\gamma > \frac{4}{3}\,.$$

Jedná se o tzv. *Chandrasekharovo kritérium stability*. Dle nápovědy rovněž dostáváme periodu pulzací

$$\Pi = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho_0(3\gamma - 4)}}\,.$$

Vidíme, že závislost Π na G a ρ_0 je v souladu s rozměrovou analýzou.

Úlohu A navrhl Martin Kudrna, úlohu B navrhli Radka Křížová a Jakub Vošmera, úlohu C navrhl David Němec, úlohu D navrhl Jindřich Jelínek, úlohu E navrhla Radka Křížová a úlohu F navrhli Tomáš Patsch, Jakub Vošmera a Radka Křížová.