

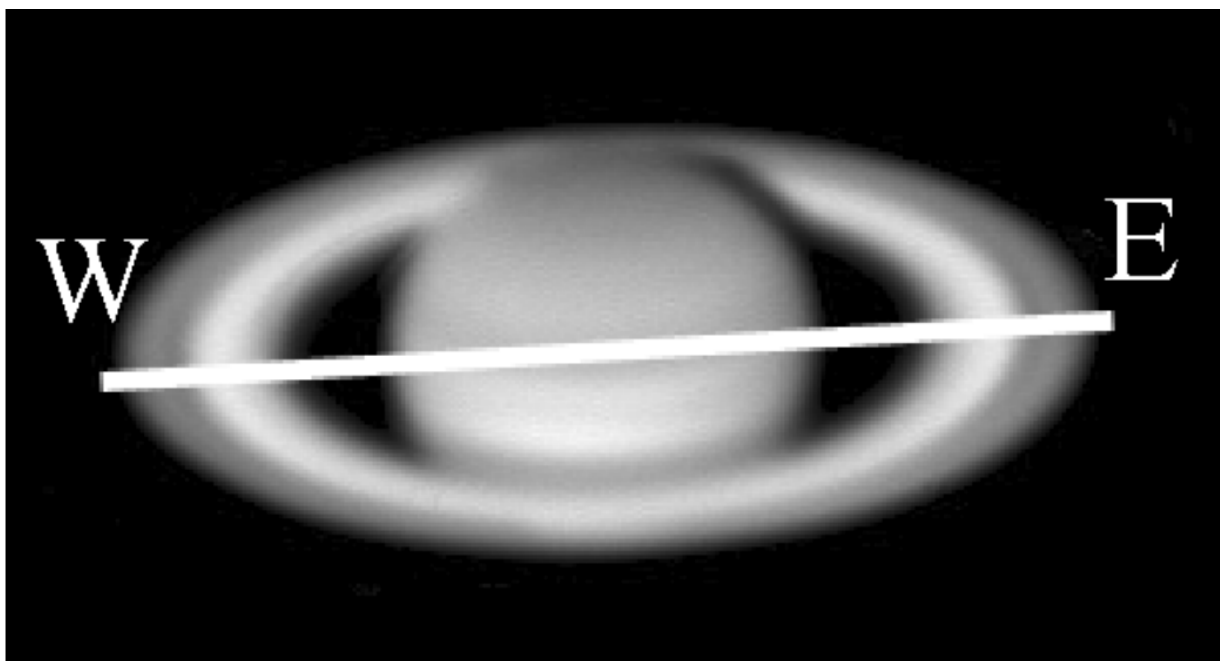
Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Analýza dat
Úlohy

G Odhad hmotnosti Saturnu

(max. 20 bodů)

Spektrum planety Saturn a jeho prstence bylo pozorováno 25. 2. 2002 2,5metrovým dalekohledem z observatoře La Palma. Spektroskopická štěrбина byla umístěna přes planetu tak, jak je znázorněno na obrázku 1. Pozorované spektrum (obrázek 2) představuje sluneční spektrum odražené od Saturnu a prstence. Přímé vertikální čáry jsou absorpční čáry vznikající, když světlo prochází zemskou atmosférou. Na druhou stranu skloněné absorpční čáry pocházejí z odraženého slunečního spektra. Dvě nejsilnější pozorované čáry jsou čáry D1 a D2 neutrálního sodíku s vlnovými délkami 589,0 nm a 589,6 nm pozorovanými v laboratorní soustavě.

V následujících úlohách předpokládejte, že Saturnovy prstence jsou rovinné, kruhové útvary, ležící v rovině Saturnova rovníku, otáčející se stejným směrem jako planeta.

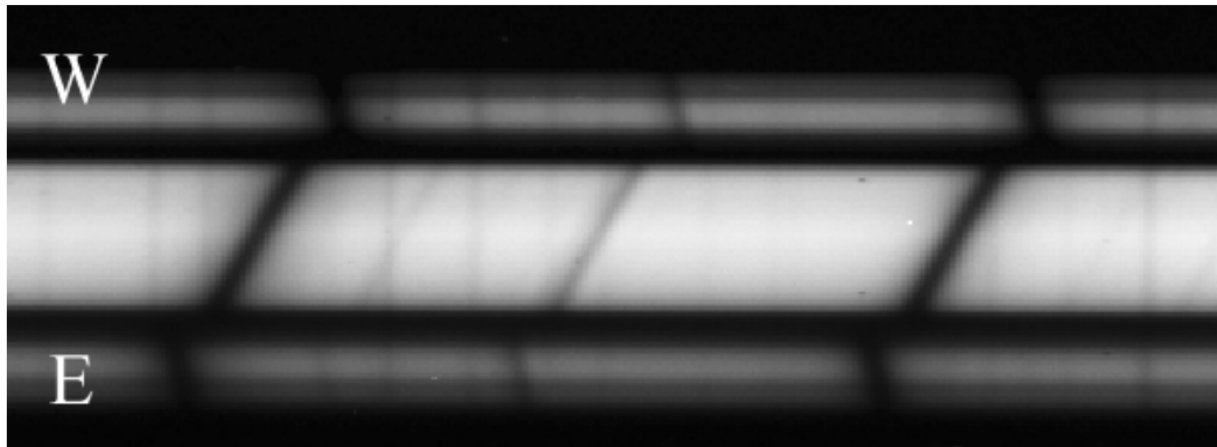


Obrázek 1: Poloha spektroskopické štěrbině na Saturnu. Západ a východ jsou označeny jako W a E.

a) S pomocí spektra na obrázku 2 ukažte, že Saturnův prstenec není tuhým tělesem, ale je tvořen spoustou malých úlomků (ledu a prachu) obíhajících planetu po Keplerovských orbitách. Načrtněte, jak by spektrum vypadalo, kdyby jeho prstenec naopak byl tuhým tělesem.

Při odrazu světla od otáčejícího se Saturnu dochází v důsledku Dopplerova jevu ke změně vlnové délky. Samotný Saturn jako tuhé těleso rotuje a z jeho spektra vidíme, že jeho východní pólka se otáčí směrem k nám, neboť jsou pozorované vlnové délky kratší. V případě jeho prstence na druhou stranu máme východněji delší vlnové délky. To vzhledem

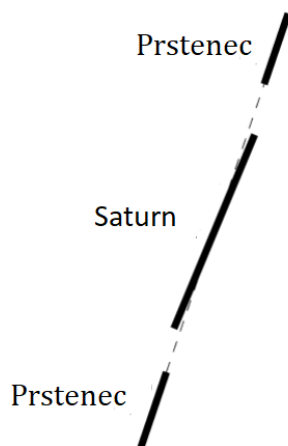
Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 2: Sluneční spektrum odražené od Saturnu. W a E znázorňují orientaci štěrbin a vlnové délky se zvětšují směrem napravo.

k faktu, že Saturnův prstenec obíhá ve stejném směru, jako planeta rotuje, odpovídá tomu, že obvodová rychlost planety při oběhu klesá se vzdáleností.

Absorpční čára by v případě tuhých prstenců vypadala například jako na obrázku 3.



Obrázek 3: Absorpční čára, kdyby byl prstenec tuhým tělesem.

b) Siderická perioda rotace Saturnu je rovna $P = 10,66$ h. S pomocí pozorovaného spektra určete rovníkový průměr d planety (číselně v km).

Řekli jsme, že absorpční čáry jsou skloněné v důsledku Dopplerova jevu. Je však třeba si uvědomit, jak přesně se tento jev projeví na našem spektru. Pokud je pozorovaná obvodová rychlost Saturnu u , tak rozdíl v rychlostech mezi východním a západním okrajem planety je $2u$. Dále víme, že pro změnu vlnové délky při (nerelativistickém) Dopplerově jevu platí

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c},$$



Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

kde v je vzájemná rychlost zdroje a pozorovatele. V našem případě však není zdrojem Saturn, ale Slunce. Dopplerův jev se tedy projeví dvakrát: poprvé při dopadu paprsku a podruhé při odrazu. Změna vlnové délky vzhledem k laboratorní délce pro jeden okraj Saturnu tedy je

$$\frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{2u}{c}.$$

V našem případě je však praktičtější z fotografie porovnávat vlnové délky východního a západního okraje. Rozdíl mezi nimi je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4u}{c}.$$

Dále bychom měli vyřešit, že rychlost u není skutečná obvodová rychlost, neboť z obrázku 1 jasně vidíme, že je osa rotace Saturnu vůči pozorovateli skloněná. Pokud tento sklon osy označíme i , tak bude pro skutečnou obvodovou rychlost platit

$$u = v \cos i.$$

Obvodovou rychlost dále přepíšeme pomocí úhlové rychlosti

$$d = 2v\omega,$$

čímž získáme vztah pro průměr Saturnu

$$d = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \frac{c}{2 \cos i} \frac{T}{2\pi}.$$

Zbývá z fotografií určit neznámé veličiny. Začneme inklinací, na obrázku 1 vidíme, že kruhový prstenec se zdeformoval na elipsu. Velká poloosa má délku přibližně 12,9 cm a malá má 5,7 cm (je možné, že v papírové verzi budou absolutní rozměry trochu jiné, ty však pro naši úlohu nejsou podstatné, náš zájmem jsou jen poměry a ty se změnou měřítka nezmění). Poměrem těchto délek bychom získali $\sin i$, pro výpočet $\cos i$ musíme využít Pythagorovu větu, tedy

$$\cos i = \frac{\sqrt{12,9^2 - 5,7^2}}{12,9} \doteq 0,90.$$

Dále potřebujeme rozdíl vlnových délek mezi spodním a horním koncem absorpční čáry. K tomu využijeme znalost rozdílu vlnových délek dvou výrazných čar sodíku. Konkrétně máme, že přibližně 9,2 cm odpovídá 589,6 nm – 589,0 nm = 0,6 nm. K měření vodorovné vzdálenosti mezi východním a západním koncem čáry využijeme čáru uprostřed mezi sodíkovými (o vlnové délce přibližně 589,3 nm), protože je ostřejší než sodíkové. Vzdálenost máme přibližně 1,0 cm, což odpovídá rozdílu vlnových délek

$$\Delta\lambda = \frac{1,1 \text{ cm}}{9,2 \text{ cm}} \cdot 0,6 \text{ nm} \doteq 0,065 \text{ nm}.$$

Celkem tedy máme

$$d \doteq 120\,000 \text{ km},$$

což v rámci naší přesnosti měření hezky odpovídá skutečným rozměrům Saturnu.

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

c) Určete hmotnost M Saturnu (číselně v kg).

K odhadu hmotnosti Saturnu určíme rychlost jeho rotujícího prstence, a následně pomocí 3. Keplerova zákona spočítáme hmotnost

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}.$$

Z obrázků jsme schopni určit poloměr prstence a a jeho obvodovou rychlost V , rovnici tedy přepíšeme na

$$V^2 a = GM,$$

kde jsme využili, že $2\pi a/P = V$. Z rovnice odvozené v předchozí části máme

$$V = \frac{c \Delta\lambda_2}{4 \lambda},$$

kde λ_2 je nový rozdíl vlnových délek, který získáme z obrázku. Pro poloměr prstence jednoduše využijeme, že známe průměr Saturnu. Na obrázku má Saturn průměr 1,9 cm a vnitřní průměr prstence je přibližně 2,8 cm, z čehož dostaneme, že a je

$$a = \frac{2,8}{1,9} \cdot \frac{120\,000 \text{ km}}{2} \doteq 88\,000 \text{ km}.$$

Měříme vnitřní průměr prstence, protože ten má větší oběžnou rychlost a jsme tedy schopni z obrázku určit rozdíl vlnových délek s větší relativní přesností. Po změření vzdálenosti na obrázku vypočítáme, že rozdíl vlnových délek je přibližně roven $\Delta\lambda_2 = 0,15 \text{ nm}$. Oběžná rychlost pak je $V = 19,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. A konečně z 3. Keplerova zákona dostaneme odhad hmotnosti Saturnu

$$M \doteq 5,1 \cdot 10^{26} \text{ kg}.$$

H Zpracování CCD snímku

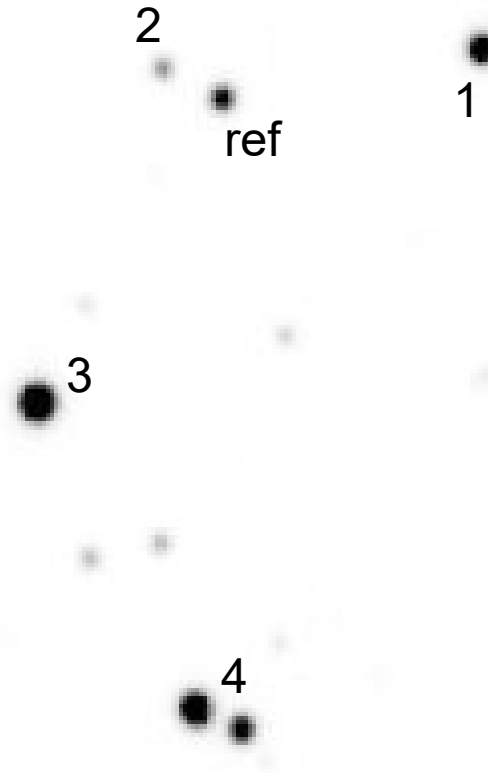
(max. 20 bodů)

Na obrázku 4 vidíte výřez ze snímku hvězdného pole v souhvězdí Kefeia (rovníkové souřadnice středu R.A. 21 h 47 m 36.1 s, Dec. +57° 11' 39.8"), pořízeného dne 2. 8. 2022 z Hvězdárny ve Valašském Meziříčí (zeměpisné souřadnice 49° 27' 50" s.š., 17° 58' 25" v.d.). Snímek byl pořízen CCD kamerou Moravské přístroje G2-1600 na dalekohledu typu Newton 150/750.

Spolu s obrázkem máte k dispozici tabulku naměřených dat jednotlivých pixelů CCD kamery pro odpovídající pole. Jednotlivé číselné hodnoty jsou udány v analogově-digitálních jednotkách (ADU), odpovídajících energii záření, které dopadlo na jednotlivé pixely. V tabulce jsme zvolili binning 4×4 , tedy jedna buňka tabulky udává hodnotu ADU odečtenou z oblasti 4×4 pixely. Snímek byl upraven pomocí dark-frame a flat-field snímků. Délka expozice byla $t = 180 \text{ s}$.

a) Určete průměrnou hodnotu ν_0 energie jednoho pixelu (v ADU), který odpovídá pozadí. Určete také odpovídající nejistotu.

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Výřez CCD snímku.

V tabulce vybereme větší počet buňek, které odpovídají pozadí. Spočítáme-li aritmetický průměr a jeho směrodatnou odchylku, dostaneme

$$\nu_0 = (210 \pm 1) \text{ ADU}.$$

b) Spočítejte nekalibrovanou instrumentální hvězdnou velikost referenční hvězdy, hvězd 1 až 3 a dvojhvězdy 4 na obrázku (číselně v mag).

Nápověda: Instrumentální hvězdnou velikost definujeme jako

$$m_I = -2,5 \log \Phi,$$

kde Φ je zářivý tok od hvězdy (v tomto případě v jednotkách $\text{ADU} \cdot \text{s}^{-1}$). Ten lze vyjádřit jako

$$\Phi = \frac{n_* - n_0}{t},$$

kde n_* značí hodnotu ADU odpovídající hvězdě. Tu zjistíme jako součet hodnot z vhodně zvolené oblasti pokrývající N_* pixelů v okolí hvězdy. Od hodnoty n_* musíme dále odečíst hodnotu $n_0 = \nu_0 N_*$ odpovídající pozadí. Konečně t je délka expozice snímku.

Je potřeba si na základě snímku zvolit v tabulce vhodný rozměr hvězd, ideálně čtverec 3×3 až 5×5 se středem v nejvyšší hodnotě, zpracovat větší rozměry by bylo zbytečné, jelikož v těchto místech hodnoty odpovídají průměrným hodnotám pozadí.



Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 1: Hodnoty instrumentálních hvězdných velikostí.

Hvězda	$\frac{n_*}{\text{ADU}}$	N_*	$\frac{m_I}{\text{mag}}$
ref	5810	9	-3,35
1	10232	9	-4,16
2	3218	9	-2,17
3	28364	9	-5,42
4	24873	24	-5,11

Zvolíme-li jako velikost hvězdy čtverec 3×3 (pro dvojhvězdu obdélník 6×4), dostaneme hodnoty v tabulce 1.

Vztah mezi nekalibrovanou instrumentální hvězdnou velikostí m_I a skutečnou vizuální magnitudou m_v lze vyjádřit jako

$$m_I = m_v + a\tau + \Delta m,$$

kde a je extinkční koeficient udávající změnu hvězdné velikosti při průchodu vrstvou atmosféry v zenitu, τ je (normovaná) optická tloušťka atmosféry a Δm nějaká konstanta.

c) V okamžik pořízení snímku se nacházelo sledované pole ve výšce $h = 70^\circ$ nad obzorem. Uvažujte extinkční koeficient $a = 0,35 \text{ mag}$. Za pomoci znalosti skutečné (katalogové) hvězdné velikosti referenční hvězdy $m_{\text{ref}} = 12,24 \text{ mag}$ spočítejte velikost konstanty Δm (číslně v mag).

Pro atmosferickou extinkci sledovaného pole platí

$$a\tau = \frac{a}{\cos z} \doteq 0,37 \text{ mag},$$

kde z je zenitová vzdálenost pozorované hvězdy. Pro konstantu Δm tedy platí

$$\Delta m = m_I - m_v - a\tau.$$

Číslně $\Delta m = -15,96 \text{ mag}$.

d) Spočítejte skutečné vizuální hvězdné velikosti m_v hvězd 1 až 3 a dvojhvězdy 4 (číslně v mag).

Po dosazení do vztahu $m_v = m_I - a\tau - \Delta m$ dostaneme hodnoty v tabulce 2.

Tabulka 2: Hodnoty vizuálních hvězdných velikostí.

Hvězda	$\frac{m_v}{\text{mag}}$
1	11,43
2	13,42
3	10,17
4	10,49

e) CCD kamera má velikost pixelu $9 \times 9 \mu\text{m}$. Spočítejte úhlovou velikost θ , která odpovídá jedné buňce tabulky na obrázku 5 (číslně v úhlových vteřinách).



Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Pro úhlovou velikost platí

$$\theta = \frac{d}{f},$$

kde θ je úhlová velikost (v radiánech), d velikost pixelu a f ohnisková vzdálenost dalekohledu. Za uvážení binningu 4×4 tedy dostaneme

$$\theta = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{0,75} \doteq 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \doteq 9,9''.$$

f) Spočítejte plošnou jasnost S temné oblohy (číselně v $\text{mag} \cdot \text{arcsec}^{-1}$) na snímku. Porovnejte s plošnou jasností oblohy za bezměsíčné noci v centru Prahy ($S_{\text{Praha}} = 18,5 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-1}$) na Lysé hoře ($S_{\text{LH}} = 21,5 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-1}$) a na Astronomickém ústavu v Ondřejově ($S_{\text{Ondřejov}} = 21,0 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-1}$).

Pro plošnou jasnost S objektu o skutečné vizuální hvězdné velikosti m_v a úhlové velikosti A (v arcsec) platí

$$\begin{aligned} S &= m_v + 2,5 \log A \\ &= m_I - \Delta m + 2,5 \log A. \end{aligned}$$

Po dosazení za instrumentální hvězdnou velikost dostaneme

$$S = -2,5 \log \frac{\Phi}{A} - \Delta m.$$

Pro tento výpočet zvolíme

$$\Phi = \frac{\nu_0}{t}$$

a $A = \theta^2$. Odtud dostaneme

$$S = -2,5 \log \frac{\nu_0}{\theta^2 t} - \Delta m.$$

Číselně

$$S = -2,5 \log \frac{210}{180 \cdot 9,9^2} + 15,96 \doteq 20,77 \text{ mag} \cdot \text{arcsec}^{-1}.$$

Vidíme tedy, že podmínky na Hvězdárně ve Valmezu jsou výrazně lepší, než podmínky v centru Prahy, o něco horší než v Ondřejově a poněkud horší než na Lysé hoře.



Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

213	211	206	206	211	211	212	202	204	214	218	213	208	211	214	215	213	211	215	205	210	213	209	214	218	207	212
208	205	207	215	204	211	221	204	207	210	210	214	216	208	214	210	209	213	210	209	216	213	212	221	216	226	209
207	207	214	220	211	209	211	211	207	207	210	222	205	210	210	208	214	205	208	211	218	225	209	238	328	263	222
206	209	209	202	209	208	217	220	221	214	210	215	214	212	223	204	216	211	213	210	211	210	226	450	3762	769	234
206	209	215	205	212	210	208	232	730	419	222	220	210	215	223	209	216	209	210	213	205	209	222	416	3327	679	229
208	211	207	211	214	203	210	229	586	367	248	593	360	222	204	211	213	211	214	209	206	212	218	230	273	241	217
206	203	211	210	210	207	205	210	220	223	286	2516	881	226	205	207	211	208	209	206	211	212	214	204	218	210	218
213	204	207	206	207	204	216	212	215	215	242	400	284	216	217	217	212	209	211	212	212	208	210	209	218	212	215
215	208	210	208	207	214	216	204	211	213	215	221	215	216	218	211	206	213	204	203	208	210	210	210	216	204	215
214	208	205	206	205	204	217	220	229	207	203	210	212	219	214	204	207	205	208	213	204	208	206	205	206	210	200
208	214	198	206	216	209	208	212	243	219	207	210	211	207	212	199	209	204	202	202	216	210	205	214	215	213	212
222	210	210	203	210	206	201	204	217	213	206	198	211	204	217	208	214	208	205	205	211	212	212	210	219	209	215
204	208	208	212	208	201	206	214	215	206	209	200	208	213	214	205	215	208	200	204	213	222	219	208	220	215	214
215	209	210	220	211	207	211	208	207	214	219	201	209	210	217	210	203	203	211	202	219	230	210	211	210	213	204
208	217	206	208	209	210	206	205	204	212	209	206	206	211	206	206	213	206	211	210	207	212	214	208	214	204	215
214	211	214	216	216	224	212	194	203	210	206	203	209	215	211	212	206	206	205	206	208	205	213	211	207	210	219
216	209	211	214	319	317	204	210	207	204	210	210	219	216	214	214	213	205	203	215	206	202	214	212	206	210	205
211	209	208	218	230	243	212	208	199	211	202	212	211	217	321	279	223	213	203	212	206	204	209	205	214	212	213
206	220	228	222	213	203	209	220	209	216	210	211	210	214	398	326	221	213	204	212	200	211	205	213	209	205	217
209	240	290	251	227	214	205	211	212	208	210	208	210	218	218	220	211	203	210	209	210	214	203	213	265	243	214
237	486	2445	761	241	221	210	220	222	208	208	205	205	213	205	210	207	218	210	208	214	206	213	222	341	264	224
240	1214	17017	3018	282	225	220	219	213	204	212	211	215	209	202	211	209	224	209	211	217	209	207	211	223	219	218
232	452	2282	689	245	213	219	213	213	213	216	211	205	208	200	211	207	205	206	204	210	202	211	213	207	206	212
213	240	267	238	224	206	209	210	214	213	220	216	215	216	208	204	204	207	215	208	208	206	205	206	212	210	220
220	216	233	216	203	205	203	210	215	213	209	225	217	210	207	202	207	212	208	202	207	213	208	210	212	216	212
206	212	213	213	210	211	209	209	212	212	213	210	211	213	214	202	210	209	210	211	212	217	210	214	205	218	212
204	216	219	211	210	212	204	211	218	208	207	206	211	204	212	205	215	216	212	206	208	214	216	215	207	219	207
210	215	216	209	214	211	210	213	300	240	213	216	212	205	214	215	214	214	206	211	204	215	205	208	206	214	208
205	210	216	212	286	390	220	236	717	328	216	215	209	208	209	213	206	206	203	212	201	206	211	207	207	208	206
207	215	211	207	347	570	232	221	256	218	204	206	211	211	222	209	206	210	209	205	207	205	207	206	213	205	206
216	209	214	215	220	219	209	218	208	207	204	208	208	213	218	213	211	210	204	210	209	211	207	205	210	207	214
213	215	219	221	219	210	208	213	207	211	217	212	211	211	208	213	203	216	214	210	213	214	215	205	204	214	216
222	220	220	228	209	221	208	203	214	208	213	218	213	212	247	231	228	221	205	214	212	211	213	213	207	210	214
225	242	208	214	207	207	210	207	216	209	213	219	214	225	365	235	204	217	203	210	210	212	211	217	207	211	207
198	207	211	209	207	206	207	206	217	225	245	224	219	216	226	218	205	210	214	243	213	211	215	218	217	213	214
210	215	204	216	220	214	218	210	226	388	873	327	233	221	218	233	214	206	217	247	222	210	215	212	212	213	208
210	215	212	211	216	215	212	221	248	1408	8761	850	464	308	224	228	210	200	208	213	218	211	208	212	215	212	210
204	217	207	210	204	212	214	221	231	547	2256	634	3564	973	233	214	213	217	210	214	215	214	204	206	215	205	207
202	204	214	221	217	207	216	215	224	233	266	288	918	432	244	213	211	213	204	212	221	207	205	205	209	207	203
217	213	211	214	216	205	217	213	215	213	223	227	238	267	256	215	216	210	205	202	214	211	200	206	212	216	209

Obrázek 5: Tabulka naměřených hodnot v ADU.