Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A OPAVA-1

(max. 10 bodů)

Řešitelé krajského kola AO se pro špatné počasí rozhodli vypustit na oběžnou dráhu Země kosmický dalekohled. Mise OPAVA-1 se pyšní primárním zrcadlem o průměru $D = 20\,\mathrm{cm}$ a citlivou CCD kamerou, které stačí pouhých $N = 100$ fotonů k registrování signálu. Vypočtěte horní limit m_{lim} magnitudy hvězd, které uvidíte na snímcích s expozičním časem $\tau = 30\,\mathrm{s}$. Výsledek uveďte číselně v mag. Pro zjednodušení předpokládejte, že se každá hvězda zobrazí pouze na jeden pixel snímače a hvězdy vyzařují celý svůj výkon na $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$. Zanedbejte atmosférickou extinkci a všechny zdroje šumu.

Nechť r_{E} je vzdálenost Země od Slunce, $m_\odot$ bolometrická hvězdná velikost Slunce a $L_\odot$ zářivý výkon Slunce. Pak bolometrický tok záření ze Slunce na Zemi určíme z rovnice

$$\mathcal{F}_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi r_{\mathrm{E}}^2}\,.$$

Energie jednoho fotonu je dána vztahem

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}\,,$$

kde h je Planckova konstanta a c rychlost světla ve vakuu. Tok fotonů od Slunce pak bude dán jako

$$\Phi_\odot = \frac{\mathcal{F}_\odot}{E_\gamma} = \frac{L_\odot \lambda}{4\pi r_{\mathrm{E}}^2 hc}\,.$$

Mezní bolometrický tok $\mathcal{F}_{\mathrm{lim}}$ záření určíme z rovnice

$$N = \Phi_{\mathrm{lim}}\tau\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{lim}}\tau\pi D^2}{4E_\gamma} = \frac{\mathcal{F}_{\mathrm{lim}}\tau\pi D^2\lambda}{4hc}\,,$$

a tedy

$$\mathcal{F}_{\mathrm{lim}} = \frac{4Nhc}{\tau\pi D^2\lambda}\,.$$

Mezní pozorovatelnou hvězdnou velikost m_{lim} dostaneme z Pogsonovy rovnice

$$m_{\mathrm{lim}} = m_{\mathrm{bol}} - 2{,}5\log\frac{\mathcal{F}_{\mathrm{lim}}}{\mathcal{F}_\odot} = m_{\mathrm{bol}} - 2{,}5\log\frac{16Nhcr_{\mathrm{E}}^2}{\tau D^2\lambda L_\odot} \doteq 22{,}0\,\mathrm{mag}\,.$$

B Gravitační refrakce

(max. 10 bodů)

Malý princ v jednom ze svých (nepublikovaných) dobrodružství přilétl na povrch neutronové hvězdy HESS J1731-347, která má ze všech známých neutronových hvězd nejmenší hmotnost. V rozmaru chvíle pohlédl na nebe a začal počítat hvězdy. Po chvilce si uvědomil, že dokáže vidět výrazně větší část oblohy, než by viděl ze své domovské planetky. Určete, jak velkou část p oblohy (číselně v procentech) vidí Malý princ, pokud má daná neutronová hvězda hmotnost $M = 0{,}8M_\odot$, poloměr $R = 10\,\mathrm{km}$ a velmi velkou periodu rotace. Uvažujte, že Malý princ je opravdu malý, a tudíž můžeme v této úloze jeho výšku ignorovat.

Nápověda: Obecná teorie relativity předpovídá, že paprsky světla se při průletu centrálním gravitačním polem nerotujícího a nenabitého sféricky symetrického tělesa ohnou o úhel

$$\Delta = 2\eta + \left(\frac{15}{16}\pi - 1\right)\eta^2 - \left(\frac{15}{16}\pi - \frac{61}{12}\right)\eta^3 + \dots\,,$$

kde $\eta = 2GM/(r_{\min}c^2)$ a $r_{\min}$ je nejmenší radiální vzdálenost paprsku od středu gravitujícího tělesa.

Budeme na nebeskou sféru nahlížet jako na sféru o jednotkovém poloměru. Pokud by gravitační refrakce nebyla přítomna, neviděl by Malý princ přesně polovinu nebeské sféry, která má plochu 2π. Díky refrakci ale vidí pod horizont o (zatím nespecifikovaný) úhel θ. Místo celé polosféry tak nevidí jen kulovou úseč s polárním úhlem $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ a ploše

$$S_{\text{nevidí}} = 2\pi(1 - \cos\theta') = 2\pi(1 - \sin\theta)\,.$$

Plocha, kterou vidí, je tedy rovna

$$S_{\text{vidí}} = 2\pi(1 + \sin\theta)\,.$$

Podíl plochy nebeské sféry, kterou dokáže Malý princ pozorovat, tedy určíme jako

$$p = \frac{S_{\text{vidí}}}{4\pi} = \frac{1 + \sin\theta}{2}\,.$$

Úhly Δ a θ jsou svázány rovnicí

$$\theta = \frac{\Delta}{2}\,,$$

kde při výpočtu Δ dosazujeme $r_{\min} = R$, protože limitní paprsek, který ještě dopadne do princova oka, musí být přesně tečný k povrchu neutronové hvězdy. Po dosazení dostaneme $\Delta \doteq 35°$, takže $\theta \doteq 18°$ a konečně

$$p \doteq 65\,\%\,.$$

Poznámka: zadaný vztah pro úhel Δ v závislosti na η představuje první tři členy Taylorova rozvoje přesného vztahu

$$\Delta = -\pi + 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \eta(1 - x^3)}}\,,$$

který plyne z rovnice geodetiky pro foton ve Schwarzschildově prostoročasu. Číselným dosazením bychom pro danou neutronovou hvězdu dostali $\Delta \doteq 36°$, což je v dobrém souladu s přibližným výpočtem výše. V případě težších neutronových hvězd bychom ovšem potřebovali ponechat více řádů v rozvoji.

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Noční můra Řehoře XIII.

(max. 10 bodů)

Perioda precese rotační osy Země je $P = 25\,725\,\text{let}$ a označuje se jako Platónský rok. Způsobuje posun jarního bodu tak, že v antickém Řecku byl jarní bod v Beranovi a dnes je v Rybách. Kromě toho dochází ke stáčení apsidální přímky Zemské orbity kolem Slunce, a to s periodou přibližně $\Pi = 112\,000\,\text{let}$. Precese apsidální osy Zemské dráhy je tzv. pozitivní, dochází k ní tedy ve směru obíhání Země kolem Slunce. Země v současné době vstupuje do perihelia 3. ledna a jarní rovnodennost nastává 20. nebo 21. března. Tropický rok trvá $Y_\mathrm{T} \doteq 365{,}242\,19\,\text{dne}$. Gregoriánský kalendář využívá následujících pravidel:

1. Rok, který není přestupný, má 365 dní.
2. Je-li rok dělitelný čtyřmi, pak je přestupný (má 366 dní).
3. Je-li ale rok dělitelný stem, pak přestupný není.
4. Je-li ovšem dělitelný čtyřmi sty, pak ovšem přestupný je.

a) Určete střední délku gregoriánského roku Y_G (číselně ve dnech). Určete, jak dlouho trvá, aby se gregoriánský kalendář rozešel vůči ročním obdobím o jeden den. Rok, ve kterém tento rozchod o den nastane, počítejte od zavedení gregoriánského kalendáře roku 1582.

Staré kalendáře užívaly pouze prvního pravidla, a jejich střední rok měl 365 dní. Juliánský kalendář užívá první dvě pravidla a jeho rok má 365,25 dne. Gregoriánský rok je kratší o 3 dny na 4 století, tedy jeho střední rok trvá o 3/400 dne méně, tj.

$$Y_\mathrm{G} = 365{,}25\,\mathrm{d} - \frac{3}{400}\,\mathrm{d} = 365{,}242\,5\,\mathrm{d}\,.$$

K rozchodu kalendářů tedy dojde za

$$\frac{1\,\mathrm{d}}{Y_\mathrm{G} - Y_\mathrm{T}} = 3\,225\,,$$

oběhů Země kolem Slunce, tedy kolem roku

$$1582 + \frac{1\,\mathrm{d}}{Y_\mathrm{G} - Y_\mathrm{T}} = 4807\,.$$

b) Určete, zda se bod na obloze, kde je Slunce v periheliu a jarní bod pohybují v souhlasném nebo nesouhlasném směru po ekliptice. Svoje tvrzení odůvodněte. Určete, jak často dochází ke koincidencím perihelia a jarního bodu (číselně v letech). Určete co nejpřesněji datum a rok nejbližší takovéto koincidence.

Perihelium a jarní bod se pohybují po ekliptice v nesouhlasném směru. Perihelium se posouvá do jara, protože precese apsid je pozitivní. Na obloze se jeví jako posun perihelia ve směru ročního pohybu Slunce, jeho ekliptikální délka narůstá. Naopak efekt orbitální precese posouvá jarní bod proti ročnímu pohybu Slunce. Efekty se tedy sčítají a ke koincidencím obou bodů dochází s periodou p, kde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{P} + \frac{1}{\Pi}\,.$$

Numericky vyjde

$$p \doteq 20\,919\,\mathrm{let}\,.$$

Perihelium předchází jarní rovnodennost o 76 dní. K nejbližší koincidenci dojde za

$$\frac{76}{365{,}25}\,p \doteq 4\,352\,\mathrm{let}\,.$$

tj. v roce 6376. Datum ovšem zůstane skoro stejné jako rovnodennost našeho století: gregoriánský kalendář byl sestaven účelně pro dobrou korespondenci s tropickým rokem. Datum tedy bude 18. až 20. března, protože došlo ke kalendářnímu posuvu o trochu více, než jeden den.

D Údržba fotovoltaické elektrárny

(max. 10 bodů)

Vyspělá civilizace získává část elektrické energie z fotovoltaické elektrárny ve vesmíru. Solární panely jsou namířeny kolmo k hvězdě místní soustavy a dopadá na ně zářivý tok $k = 1\,400\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Problém, který musí údržba elektrárny řešit, je klesající účinnost panelů. Konkrétně, účinnost panelů klesá z počátečních 50 % a při dosažení 30 % je zadáním panel vyměnit za nový. Účinnost panelů nicméně klesá nerovnoměrně a rychlost degradace je značně nehomogenní. Určitě se proto nevyplatí vyměnit panely vždy po uplynutí jisté doby od instalace. Zároveň není účinnost každého panelu měřena automaticky a takové měření by i s použitím autonomního robota zabralo spoustu času. Techniky proto napadlo sledovat účinnost zatížených panelů termokamerou (zatíženým panelem se rozumí panel připojený k elektrické síti, ze kterého je odváděna elektrická energie).

a) Předpokládejme, že existuje kritická teplota panelu T_c, která odpovídá účinnosti 30 %. Rozhodněte, zda jsou k výměně určeny všechny panely s nižší, nebo vyšší teplotou.

K výměně jsou určeny všechny panely s vyšší teplotou než je T_c, protože se více zahřívají, méně energie se přeměňuje na elektrickou a jejich účinnost musí být nižší než 30 %.

b) Určete kritickou teplotu T_c, kterou má zatížený solární panel s účinností 30 % ve stavu termodynamické rovnováhy se svým okolím. Předpokládejte, že panel je rovinná deska, která pohltí veškeré dopadající záření a vyzařuje jako absolutně černé těleso z obou svých povrchů. Dále určete teplotu nového panelu T_n s účinností 50 % ve stavu termodynamické rovnováhy se svým okolím. Výsledky uveďte číselně v K.

Energetická bilance solárního panelu lze popsat rovnicí

$$P = P_\mathrm{e} + P_\mathrm{z}\,, \qquad (1)$$

kde P je výkon dopadajícího záření, P_e je elektrický výkon a P_z je vyzařovací výkon panelu. Označíme-li plochu solárního panelu jako S, pak je výkon dopadajícího záření na solární panel $P = kS$. Elektrický výkon lze vyjádřit jako

$$P_e = \eta k S\,,$$

kde η je elektrická účinnost solárního panelu. Vyzařovací výkon P_z je

$$P_z = 2\sigma T^4 S\,,$$

kde σ je Stefanova–Boltzmannova konstanta, tedy $\sigma \doteq 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ a faktor 2 odpovídá vyzařování oběma povrchy. Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$k = \eta k + 2\sigma T^4\,,$$

odkud vyjádříme kritickou teplotu T_c odpovídající kritické účinnosti $\eta_c = 30\,\%$ jako

$$T_c = \sqrt[4]{\frac{k(1-\eta_c)}{2\sigma}}\,.$$

číselně vychází $T_c \doteq 305\,\mathrm{K}$. Pro panel s účinností 50 % vyjde $T_n \doteq 280\,\mathrm{K}$.

Dlouhé úlohy

E Tisserandův invariant

(max. 20 bodů)

Ve Sluneční soustavě velmi často dochází k těsným přiblížením planet a menších těles (planetek nebo komet), v důsledku nichž se mohou oběžné dráhy těchto malých těles drasticky měnit. Cílem této úlohy bude odvození jisté funkce orbitálních elementů planetky (tzv. Tisserandova parametru), jejíž hodnota zůstává před a po přiblížení k planetě téměř nezměněna. Uvidíme, že tato veličina je velmi užitečná pro studium poruch drah malých těles ve Sluneční soustavě.

Uvažujme systém obsahující centrální těleso (hvězdu) o hmotnosti M, kolem něhož po kruhové dráze o poloměru R obíhá těleso (planeta) o hmotnosti $m \ll M$.

a) Napište výraz pro oběžnou (kruhovou) rychlost v planety kolem centrální hvězdy pomocí G, M a R.

Máme

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Dále budeme uvažovat těleso (planetku) o hmotnosti $\mu \ll m \ll M$, která obíhá centrální hvězdu po dráze o velké poloose a a excentricitě e. Sklon roviny této dráhy vůči rovině oběhu planety označme jako i. Uvažujme pro jednoduchost nejprve, že $i = 0$.

b) Napište výraz pro velikost v rychlosti planetky v okamžiku, když se od centrálního tělesa nachází ve vzdálenosti, která je rovna poloměru R kruhové dráhy planety. Výsledek zapište pomocí V, R a a.

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Ze vztahu pro celkovou mechanickou energii planetky lze odvodit

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{2 - \frac{R}{a}}\,V\,.$$

c) Určete průmět $v_\parallel$ této rychlosti do směru tečného k oběžné dráze planety. Výsledek vyjádřete pomocí V, R, a a e.

Označme v_p rychlost planetky v perihelu. Ze zákona zachování momentu hybnosti můžeme psát

$$v_\parallel R = v_\mathrm{p} a(1-e) = \sqrt{GM\left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right]}\,a(1-e) = \sqrt{GMa(1-e^2)}\,,$$

a tedy

$$v_\parallel = \sqrt{\frac{GMa}{R^2}(1-e^2)} = \sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}\,V\,.$$

Předpokládejme nyní, že dojde k těsnému přiblížení planetky a planety.

d) Vypočtěte velikost u rychlostí (vzhledem k planetě), kterou planetka vstupuje do oblasti, kde dominuje gravitační vliv planety. Z pohledu gravitačního působení planety se tedy jedná o rychlost „v nekonečnu“, avšak můžeme stále uvažovat, že se planetka nachází ve vzdálenosti R od centrální hvězdy. Výsledek vyjádřete pomocí veličin V, R, a a e.

Jelikož máme $m \ll M$, bude velikost oblasti gravitačního vlivu planety velmi malá v porovnání s R. Vzhledem k centrálnímu objektu tedy bude planetka do gravitačního vlivu planety vstupovat rychlostí o velikosti v. Odpovídající velikost u rychlosti v soustavě planety pak určíme jako

$$u = \sqrt{(v_\parallel - V)^2 + v_\perp^2}\,,$$

kde jako $v_\perp^2 = v^2 - v_\parallel^2$ jsme označili kvadrát složky rychlosti planetky kolmé na dráhu planety. Máme tedy

$$u = \sqrt{(v_\parallel - V)^2 + v^2 - v_\parallel^2} = \sqrt{v^2 - 2Vv_\parallel + V^2}\,,$$

Dosadíme-li za $v, v_\parallel$ a V z předchozích podúloh, dostaneme

$$u = \sqrt{3 - \frac{R}{a} - 2\sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}}\,V\,.$$

e) Jak by se změnil výsledek úkolu c) pro průmět $v_\parallel$ rychlosti planetky do směru tečného k oběžné dráze planety v případě nenulového sklonu i vůči rovině oběhu planety?

Označme jako β úhel, který svírá rychlost planetky s jejím průvodičem. Potom můžeme psát

$$v_\parallel = v \sin\beta \cos i\,,$$

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

neboli

$$v \sin \beta = \frac{v_\parallel}{\cos i}\,.$$

Velikost momentu hybnosti na jednotku hmotnosti planetky ve vzdálenosti R od centrální hvězdy tedy nyní musíme vyjádřit jako

$$vR \sin \beta = \frac{v_\parallel R}{\cos i} = \sqrt{GMa(1-e^2)}\,,$$

odkud máme

$$v_\parallel = \sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}\,V \cos i\,.$$

f) Napište rovněž, jak by se změnil výsledek úkolu d) v případě nenulového sklonu i. Výraz pro velikost rychlosti u nyní zapište pomocí V a *Tisserandova parametru*

$$\mathcal{T} = \frac{R}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}\,\cos i\,,$$

který chápeme jako funkci $\mathcal{T}(a, e, i)$ orbitálních elementů a, e a i planetky.

Označíme-li $v_\perp^2 = v^2 - v_\parallel^2$ kvadrát průmětu rychlosti planetky do roviny kolmé na tečnu k oběžné dráze planety, dostaneme opět

$$u = \sqrt{(v_\parallel - V)^2 - v_\parallel^2 + v^2}\,.$$

Dosadíme-li nyní za $v_\parallel$ z výsledku předchozí části, dostaneme podobným postupem jako v části d)

$$u = \sqrt{3 - \frac{R}{a} - 2\sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}\cos i}\,V\,.$$

To lze pomocí Tisserandova parametru vyjádřit jako

$$u = \sqrt{3 - \mathcal{T}}\,V\,.$$

Vlivem přiblížení planetky k planetě dojde ke změně orbitálních parametrů planetky. Jejich nové hodnoty označme jako a', e' a i'.

g) Zdůvodněte, proč se hodnota Tisserandova parametru planetky následkem přiblížení k planetě nezmění. Jinými slovy ukažte, že platí

$$\mathcal{T}(a, e, i) = \mathcal{T}(a', e', i')\,.$$

Ve vztažné soustavě planety je průlet popsán elastickou srážkou (mechanická energie se v centrálním poli planety zachovává). Velikost rychlosti u', kterou planetka vzhledem k planetě vylétává (opět „v nekonečnu“) z oblasti gravitačního působení planety, tedy splňuje

$$u' = u\,.$$

Jelikož u' můžeme podobně vyjádřit jako $\sqrt{3 - \mathcal{T}'}\,V$, kde $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(a', e', i')$, dostáváme okamžitě, že

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T}\,.$$

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

U planetky 2018 UA byla v říjnu roku 2018 pozorována náhlá porucha orbitálních elementů: původní hodnoty $a = 2{,}873 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, $e = 0{,}5470$, $i = 6{,}368°$ se v horizontu několika dní změnily na nové hodnoty $a' = 2{,}080 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$, $e' = 0{,}4474$, $i' = 2{,}644°$. V úvahu tedy připadá změna orbitálních elementů v důsledku těsného průletu planetky kolem Země, nebo Marsu.

h) Vypočtěte poloměr dráhy R rušícího tělesa (číselně v m) a na základě toho rozhodněte, jestli planetka proletěla kolem Země, nebo kolem Marsu. Pro jednoduchost předpokládejte, že inklinace dráhy rušícího tělesa vzhledem k rovině ekliptiky byla rovna nule.

Ze zachování Tisserandova parametru před a po průletu plyne rovnost

$$\frac{R}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{R}(1-e^2)}\,\cos i = \frac{R}{a'} + 2\sqrt{\frac{a'}{R}(1-e'^2)}\,\cos i'\,,$$

odkud můžeme vyjádřit

$$R = \left\{\frac{2aa'}{a'-a}\left[\sqrt{a'(1-e'^2)}\,\cos i' - \sqrt{a(1-e^2)}\,\cos i\right]\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme $R \doteq 1{,}499 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$. Oběžná dráha planetky tedy byla změněna v důsledku průletu kolem Země.

F Brouk Pytlík astronomem

(max. 20 bodů)

Málokdo to ví, ale brouk Pytlík byl obstojným amatérským astronomem. Proto nebyl zaskočen, když se jednou ocitl na průzkumné sondě o hmotnosti $m = 1{,}0\,\mathrm{t}$ na neznámém místě v Galaxii. Jako první si pomocí směrů ke vzdáleným hvězdám definoval kartézskou souřadnicovou soustavu (x, y, z) s počátkem odpovídajícím poloze jeho sondy.

Vlastně v Pytlíkově okolí není docela pusto. Ve vzdálenosti $\varepsilon = 3{,}0\,\mathrm{km}$ v kladném směru osy x si všiml identické sondy taktéž s hmotností $m = 1{,}0\,\mathrm{t}$. Avšak nevšiml si blízké Schwarzschildovy černé díry s hmotností $M = 1{,}0\,M_\odot$ ve vzdálenosti $r = 7{,}0 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$, protože ji nevidí. Konfigurace těles a souřadnicové soustavy v čase $t = 0$ je zobrazena na obrázku 1. Čistě náhodou obě sondy obíhají černou díru po kruhových drahách v rovině (x, y).

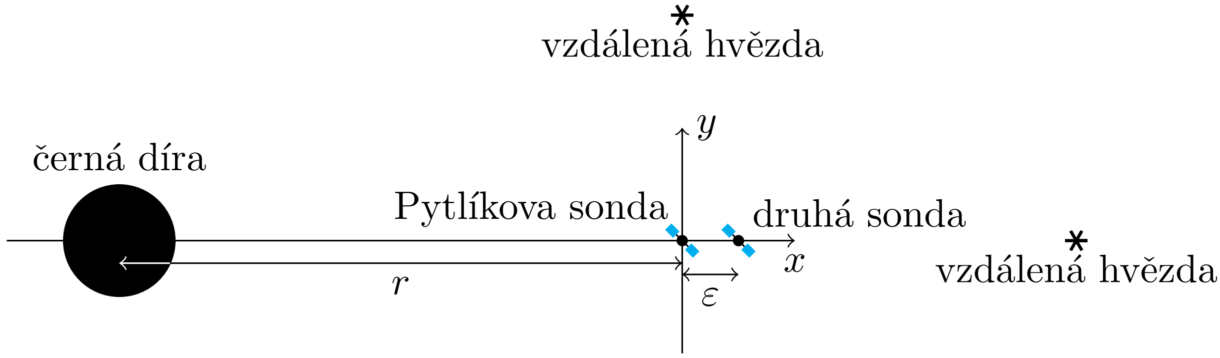
Brouk Pytlík má přístroje, s jejichž pomocí může s vysokou přesností měřit čas, polohy a jasnosti okolních hvězd, vzdálenost druhé sondy i její polohu vůči hvězdám. Nemůže ale ovládat pohyb svojí sondy, ta obíhá po stále stejné kruhové dráze.

Nejdříve si uděláme jasno, jaké aproximace můžeme použít.

a) Zdůvodněte, proč je v tomto případě možné zanedbat efekty obecné teorie relativity, a přestože se jedná o pohyb v okolí černé díry, vystačíme si s klasickou fyzikou.

Význam efektů obecné relativity na naše dvě sondy můžeme posoudit tak, že porovnáme gravitační potenciál

$$\Psi = -\frac{GM}{r} \doteq -1{,}90 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}\,.$$



Obrázek 1: Umístění obou sond a černé díry v čase $t = 0$ při pohledu „shora“ (z kladného směru osy z). Brouk Pytlík se nachází v sondě bližší k černé díře. Sondy obíhají černou díru v rovině (x, y). Souřadnicová soustava je vytyčená vzhledem ke vzdáleným hvězdám.

s rychlostí světla na druhou. Získáme poměr

$$p = \frac{|\Psi|}{c^2} \doteq 2{,}1 \cdot 10^{-6}\,.$$

Jelikož $p \ll 1$, můžeme efekty obecné teorie relativity zanedbat.

Jiné zdůvodnění spoléhá na to, že černá díra má stejnou hmotnost jako Slunce a Pytlíkova sonda obíhá ve vzdálenosti přibližně rovné poloměru Slunce. Nezáleží, jestli se vznášíme v blízkosti povrchu Slunce a hmotnost $1\,M_\odot$ se nachází v kouli o poloměru $6{,}96 \cdot 10^5$ km nebo jestli je ta stejná hmotnost stlačena pod Schwarzschildův poloměr. Obě situace jsou ekvivalentní. Jelikož v blízkosti povrchu Slunce nehraje obecná relativita podstatnou roli, ani v případě Pytlíkovy sondy ji nemusíme použít. Vždyť Arthur Eddington naměřil v roce 1919 při zatmění Slunce ohyb paprsků hvězd způsobený hmotou Slunce v řádu úhlových vteřin, což je velmi malá hodnota.

b) Jakou silou F_s (číselně v N) na sebe působí obě sondy? O jakou vzdálenost Δl (číselně v m) by se sondy přiblížily za 1 rok, kdyby se nenacházely v blízkosti černé díry a kdyby začínaly s nulovou vzájemnou rychlostí? Na základě výsledků usuďte, zda je nutné pro krátké časové škály uvažovat vzájemné gravitační působení obou sond.

Sondy na sebe působí přitažlivou gravitační silou

$$F_\mathrm{s} = \frac{Gm^2}{\varepsilon^2} \doteq 7{,}42 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{N}\,.$$

Na každou sondu tudíž působí zrychlení

$$a_\mathrm{s} = \frac{Gm}{\varepsilon^2} \doteq 7{,}42 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}\,.$$

Zrychlení je opravdu velmi malé, zkusíme tedy ze začátku odhadnout posun každé sondy pomocí vztahu známého z kinematiky

$$\Delta\varepsilon \approx \frac{1}{2} a_\mathrm{s} t^2\,,$$

kam dosadíme za čas $t = 1{,}0\,\mathrm{yr} \doteq 3{,}156 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$. Při použití tohoto vztahu předpokládáme, že tělesa se vůči sobě za čas t přiblížila zanedbatelně málo, takže můžeme zrychlení a_s považovat za konstantní. Jen pokud by $\Delta\varepsilon$ vyšlo nezanedbatelné oproti ε, museli bychom použít přesnější metodu. Po dosazení čísel vyjde přiblížení jedné sondy

$$\Delta\varepsilon \doteq 3{,}70\,\mathrm{m}\,.$$

Musíme si ale uvědomit, že obě sondy se posunou o tuto vzdálenost, jelikož zrychlení každé z nich je stejné. Za jeden rok se k sobě tudíž sondy přiblíží o vzdálenost $\Delta l = 2\Delta\varepsilon \doteq 7{,}4\,\mathrm{m}$, což je zanedbatelné proti původní vzdálenosti $\varepsilon = 3{,}0\,\mathrm{km}$. Na časových škálách menších než 1 rok proto při našem stupni přesnosti (všechny vstupní hodnoty jsou zadané na dvě platné číslice) můžeme zcela jistě zanedbat pohyby způsobené vzájemnou přitažlivostí sond.

Hint: V podúlohách c) a d) se vám možná budou hodit následující aproximační vztahy platné pro $|x| \ll 1$

$$\begin{aligned}(1+x)^n &\approx 1 + nx, \quad n \in \mathbb{R}, |x| \ll \frac{1}{|n|}\\ \sin(x) &\approx x,\\ \cos(x) &\approx 1.\end{aligned}$$

Taktéž možná využijete součtové vztahy pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,\\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

c) Jaké jsou perioda T (číselně v hodinách) a úhlová rychlost ω oběhu Pytlíkovy sondy okolo černé díry? O jakou hodnotu $\Delta\omega$ se úhlová rychlost druhé sondy liší od Pytlíkovy sondy? Úhlové rychlosti uvádějte číselně v $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Ze třetího Keplerova zákona můžeme spočítat oběžnou periodu Pytlíkovy sondy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \doteq 1{,}0 \cdot 10^4\,\mathrm{s} \doteq 2{,}8\,\mathrm{h}\,.$$

Úhlová rychlost oběhu Pytlíkovy sondy je

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \doteq 6{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Druhá sonda obíhá po kruhové dráze s poloměrem $r + \varepsilon$, kde $\varepsilon \ll r$. Její úhlová rychlost je tudíž

$$\omega' = \omega + \Delta\omega = \sqrt{\frac{GM}{(r+\varepsilon)^3}} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)^{-3/2} = \omega\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)^{-3/2}\,.$$

Nyní můžeme použít aproximaci $(1+x)^n \approx 1+nx$ platnou pro $|x| \ll 1$ (v našem případě $x = \varepsilon/r$ a $n = -3/2$)

$$\omega' \approx \omega - \frac{3}{2}\omega \cdot \frac{\varepsilon}{r}\,.$$

Vidíme, že pro malé ε/r je změna úhlové rychlosti rovna

$$\Delta\omega = -\frac{3}{2}\omega \cdot \frac{\varepsilon}{r} \doteq -4{,}0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}\,. \tag{2}$$

d) Brouk Pytlík ve své souřadnicové soustavě pozoruje, že druhá sonda se vůči jeho sondě pohybuje. Najděte (obecně pomocí ε, ω, t), jak se v čase vyvíjí polohový vektor $(x(t), y(t))$ druhé sondy vůči Pytlíkově sondě v režimu, kdy platí $|\Delta\omega\, t| \ll 1$, kde $\Delta\omega$ je rozdíl v úhlových rychlostech obou sond. Během aproximací můžete zanedbat všechny členy obsahující $\varepsilon\Delta\omega$, ε^2, $\Delta\omega^2$ nebo vyšší mocniny, neboť se jedná o zanedbatelně malé veličiny.

Pytlíkova bližší sonda se s úhlovou rychlostí ω pohybuje po kružnici o poloměru r. Její polohový vektor $(x(t), y(t))$ vůči černé díře se v čase vyvíjí jako

$$\vec{r}(t) = \Big(r\cos(\omega t), r\sin(\omega t)\Big)\,.$$

Druhá sonda se pohybuje po kružnici s poloměrem $r+\varepsilon$ s úhlovou rychlostí $\omega' = \omega + \Delta\omega$. Polohový vektor druhé sondy vůči černé díře je

$$\begin{aligned}\vec{r}\,'(t) &= (r+\varepsilon)\Big(\cos((\omega+\Delta\omega)t), \sin((\omega+\Delta\omega)t)\Big)\\ &= (r+\varepsilon)\Big(\cos(\omega t)\cos(\Delta\omega t) - \sin(\omega t)\sin(\Delta\omega t), \sin(\omega t)\cos(\Delta\omega t) + \cos(\omega t)\sin(\Delta\omega t)\Big)\\ &\approx (r+\varepsilon)\Big(\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\Delta\omega t, \sin(\omega t) + \cos(\omega t)\Delta\omega t\Big)\,,\end{aligned}$$

kde jsme použili nejprve vztahy pro rozklad goniometrických funkcí

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\,,\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

a poté aproximace $\sin(x) \approx x$ a $\cos(x) \approx 1$ platné pro $|x| \ll 1$ (v našem případě $x = \Delta\omega t \ll 1$). Polohu druhé sondy vůči Pytlíkově sondě spočítáme z rozdílu polohových vektorů

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{r} = \Big(\varepsilon\cos(\omega t) - r\sin(\omega t)\Delta\omega t, \varepsilon\sin(\omega t) + r\cos(\omega t)\Delta\omega t\Big)\,.$$

Zanedbali jsme členy obsahující součin $\varepsilon\Delta\omega$, neboť ε i $\Delta\omega$ jsou malé. Za $\Delta\omega$ dosadíme z rovnice (2)

$$\Delta\vec{r} = \left(\varepsilon\cos(\omega t) + \frac{3}{2}\varepsilon\sin(\omega t)\omega t, \varepsilon\sin(\omega t) - \frac{3}{2}\varepsilon\cos(\omega t)\omega t\right)\,. \tag{3}$$

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Brouk Pytlík sledoval druhou sondu po dobu mnoha oběhů okolo černé díry. Znovu připomínáme, že Pytlík o černé díře neví! Vypozoroval, že druhá sonda se okolo jeho pohybuje po spirále (kruhový pohyb s rostoucím poloměrem). Nyní jsme v režimu

$$\frac{\varepsilon}{r} \ll \frac{1}{\omega t} \ll 1,$$

kde ω je úhlová rychlost Pytlíkovy sondy okolo černé díry. Ve všech následujících podúlohách můžete použít tuto aproximaci.

Brouk Pytlík není žádné ťululum a astronomii má nastudovanou z knih. Proto zvětšování vzdálenosti mezi sondami interpretoval jako důsledek rozpínání vesmíru. Vzdálenost mezi sondami může brouk Pytlík určit ze zpoždění rádiové komunikace mezi sondami (má velice přesné hodiny).

e) Jakou Hubbleovu konstantu H' ze svých dat Pytlík spočítal? Nejprve odvoďte obecný vztah, jak Pytlíkova konstanta H' závisí na čase, a poté ji vyčíslete v jednotkách $\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$ v okamžiku po $N = 100$ obězích černé díry.

V předchozí podúloze jsme odvodili vztah (3) pro polohový vektor druhé sondy vůči Pytlíkově sondě. Aproximace ze zadání

$$\frac{\varepsilon}{r} \ll \frac{1}{\omega t} \ll 1$$

znamená, že už uběhlo dostatečně velké množství oběhů okolo černé díry, aby platilo $\omega t \gg 1$ (tím pádem můžeme zjednodušit rovnici (3), jak si za chvíli ukážeme). Zároveň je počet oběhů stále dostatečně malý, aby platilo i $\varepsilon/r \ll 1/(\omega t)$ (kdyby toto nebylo splněno, odvození rovnice (3) by pozbylo platnosti). Díky aproximaci platí $\omega t \gg 1$, takže můžeme zjednodušit vztah (3) na

$$\Delta\vec{r} \approx \frac{3}{2}\varepsilon\omega t\left(\sin(\omega t), -\cos(\omega t)\right) .$$

Vektor $(\sin(\omega t), -\cos(\omega t))$ naznačuje pohyb sondy po kružnici, avšak poloměr kružnice (tzn. vzdálenost mezi oběma sondami)

$$r(t) = \frac{3}{2}\varepsilon\omega t\,,$$

s časem roste! To znamená pohyb po spirále. Růst vzdálenosti je lineární s časem, takže rychlost vzdalování

$$v = \frac{3}{2}\varepsilon\omega$$

je konstantní. Hubbleův vztah definuje Hubbleovu konstantu H jako konstantu úměrnosti mezi rychlostí vzdalování v a vzdáleností r

$$v = Hr\,.$$

Brouk Pytlík tudíž z pohybu druhé sondy odvodil závislost Hubbleovy konstanty na čase

$$H'(t) = \frac{v}{r(t)} = \frac{\frac{3}{2}\varepsilon\omega}{\frac{3}{2}\varepsilon\omega t} = \frac{1}{t}\,.$$

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

V podúloze c) jsme spočítali oběžnou periodu Pytlíkovy sondy. Sto oběhů nastane za čas $t = 1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{s}$. V tu chvíli bude mít Pytlíkova Hubbleova konstanta hodnotu

$$H' = \frac{1}{t} \doteq 9{,}90 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1} = 9{,}90 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \left(\frac{3{,}086 \cdot 10^{19}\,\mathrm{km}}{1\,\mathrm{Mpc}}\right) \doteq 3{,}05 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}\,.$$

Mimochodem, Hubbleova konstanta nepřímo úměrná času není nesmyslná. Z Friedmanových rovnic se dá odvodit, že pro vesmír dominovaný hmotou i pro vesmír dominovaný zářením platí $H \propto 1/t$, kde t je věk vesmíru.

f) Podle čeho všeho mohl Pytlík poznat, že měření interpretuje špatně? Uveďte alespoň jeden způsob, kterým by brouk Pytlík mohl vyvrátit svou svéráznou interpretaci měření.

Jelikož Pytlíkova úvaha je naprosto špatná, existuje více experimentů nebo pozorování, které můžou vyvrátit Pytlíkovu myšlenku, že vzdalování druhé sondy je způsobené rozpínáním vesmíru.

Jelikož rozpínání časoprostoru probíhá v celém objemu vesmíru, při hodnotě Hubbleovy konstanty $H' = 3{,}05 \cdot 10^{13}\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1} \cdot \mathrm{Mpc}^{-1}$ by světlo hvězd mělo takový červený posuv, že by žádné hvězdy nebyly vidět. Maximum spektra, které se normálně nachází ve viditelném světle nebo blízko, by bylo posunuto daleko do delších vlnových délek.

Další z možných vyvrácení je, že v soustavě dvou sond se nezachovává moment hybnosti. Druhá sonda obíhá okolo Pytlíkovy sondy se stále stejnou úhlovou rychlostí ω, avšak poloměr dráhy roste s časem $r(t) = 3\varepsilon\omega t/2$. Tím pádem moment hybnosti roste s časem

$$l(t) \propto \omega r^2 = \frac{9}{4}\varepsilon^2\omega^3 t^2\,.$$

Rozpínání vesmíru je však izotropní, tudíž zachovává moment hybnosti.

Další z možných vyvrácení je spočítat Hubbleův čas, neboli odhad věku vesmíru

$$t_\mathrm{H} = \frac{1}{H'} = 1{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{s}\,.$$

To je velice nízká hodnota, kratší než broukův život.

K udělení plného počtu bodů za tuto podúlohu stačí jen jedno zdůvodnění, které dává smysl. Může se jednat i o jiné zdůvodnění, než tři příklady, které jsme uvedli zde ve vzorovém řešení.

Nakonec brouk Pytlík došel ke stejným závěrům jako Vy v podotázce f) a uvědomil si, že zvláštní pohyb druhé sondy se dá vysvětlit jedině tak, že obě sondy obíhají okolo neviditelného masivního tělesa.

g) Jakou metodou může Pytlík zjistit hmotnost černé díry? Brouk Pytlík zná hodnotu gravitační konstanty G.

Pozn.: Snažte se jasně vysvětlit, které veličiny brouk Pytlík potřebuje, jestli je dokáže naměřit, a jak z nich spočítá hmotnost černé díry. Pokud opravovatel bude mít problém vyznat se ve vašich úvahách, nemusíte dostat plný počet bodů.

Finále 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Uvedeme dvě metody, jak by brouk Pytlík mohl určit hmotnost černé díry. Základ obou dvou tvoří třetí Keplerův zákon. Brouk Pytlík může pozorovat spirálovitý oběh sondy s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}, \tag{4}$$

kde M je hmotnost černé díry a r je poloměr dráhy okolo černé díry. Z těchto veličin však Pytlík zná jenom gravitační konstantu G a úhlovou frekvenci ω, kterou změřil. Chtěl by spočítat hmotnost M, ale nezná poloosu r.

Poloosu oběhu sondy okolo černé díry může zjistit metodou paralaxy. V pozemských podmínkách metoda paralaxy funguje tak, že známe poloosu oběžné dráhy Země, změříme úhlový pohyb hvězdy po obloze v průběhu roku, a na základě toho spočítáme vzdálenost hvězdy. Brouk Pytlík dokáže s vysokou přesností změřit pohyb hvězdy po obloze (bylo řečeno v zadání), avšak nezná svou velkou poloosu. Tím pádem musí najít nějaké hvězdy, u nichž zná vzdálenost. Pokud má štěstí a v jeho okolí se nachází nějaké cefeidy, může z měření jejich periody pulzací a hvězdné velikosti určit jejich vzdálenosti. Ze znalosti vzdálenosti hvězd a jejich paralaktického pohybu spočítá svou velkou poloosu r a ze vztahu (4) vyjádří hmotnost černé díry M. Pochopitelně se hodí použít data z co nejvíce cefeid, protože jednotlivé cefeidy se odchylují od zprůměrovaného vztahu perioda pulzací vs. průměrná absolutní hvězdná velikost.

Další možností by bylo pečlivě prohlédnout celou hvězdnou oblohu, dokud nenajde místo, kde je světlo hvězd zdeformováno černou dírou. Černou díru uvidí jako temný kotouček na pozadí vzdálených hvězd a může změřit jeho úhlový poloměr θ, který bude dán jako funkce závislá na Schwarzschildově poloměru R_S a na vzdálenosti r

$$\theta = \theta(R_\mathrm{S}, r)\,.$$

Schwarzschildův poloměr je přímo úměrný hmotnosti černé díry

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}\,.$$

Tím pádem dostaneme soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými M a r

$$\theta = \theta(M, r)\,,$$
$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}\,,$$

jejímž vyřešením zjistíme hmotnost černé díry.