

**Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení****A Planetárium***(max. 30 bodů)*

Na zvláštním listu.

B Přehledový test*(max. 30 bodů)*

POKYNY: U každé otázky vyber **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

1. Světlo ze Slunce dorazí na Mars přibližně za

- [a] 5 minut.
- [b] 8 minut.
- [c] **13 minut.**
- [d] 27 minut.

2. Kolik známých měsíců má trpasličí planeta Pluto?

- [a] 2
- [b] 3
- [c] 4
- [d] **5**

3. Mezi trpasličí planety Sluneční soustavy nepatří

- [a] **Vesta.**
- [b] Ceres.
- [c] Pluto.
- [d] Eris.

4. Trpasličí planeta Ceres byla objevena v roce

- [a] 1601.
- [b] **1801.**
- [c] 1930.
- [d] 2002.

5. Které těleso nepatří mezi ostatní?

- [a] Titan
- [b] Enceladus
- [c] Mimas
- [d] **Amalthea**

6. Kdo si jako první nechal patentovat dalekohled?

- [a] Galileo Galilei
- [b] Johannes Kepler
- [c] Isaac Newton
- [d] **Hans Lippershey**

7. Co znamenají písmena LGM v názvu prvního objeveného pulsaru?

- [a] **little green men**
- [b] lone gunmen
- [c] let's go Mets
- [d] little gray men

8. Který výrok na severní polokouli neplatí?

- [a] **Meteorologické jaro začíná 20. 3. nebo 21. 3.**
- [b] Astronomické jaro začíná nejčastěji 20. 3.
- [c] V březnu začíná ekologické předjaří.
- [d] Meteorologické jaro začíná 1. 3.

9. Kdo provedl první výstup člověka do volného vesmíru?

- [a] Edwin Aldrin
- [b] John Glenn.
- [c] Alan Shepard
- [d] **Alexej Leonov**



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

10. Ve kterém roce byla otevřena petřínská hvězdárna pojmenovaná na počest M. R. Štefánika?

- [a] 1898
- [b] 1908
- [c] 1918
- [d] **1928**

11. Které vozítko nejezdilo po Marsu?

- [a] Opportunity
- [b] **Lunochod**
- [c] Sojourner
- [d] Curiosity

12. Která vesmírná sonda poprvé dosáhla únikové rychlosti pro opuštění Sluneční soustavy (3. kosmické rychlosti)?

- [a] Sputnik 1
- [b] Luna 1
- [c] **Pioneer 10**
- [d] New Horizons

13. Kolik známých planetek se nachází mezi Marsem a Jupiterem?

- [a] **statisíce**
- [b] stamiliony
- [c] stovky
- [d] desítky

14. Kolik trpasličích planet se nachází v hlavním pásu planetek mezi Marsem a Jupiterem?

- [a] žádná
- [b] **jedna**
- [c] dvě
- [d] tři

15. Který jev není nikde ve Sluneční soustavě pozorovatelný?

- [a] přechod Saturnu přes sluneční disk
- [b] zákryt Měsíce planetkou
- [c] **duha na Merkuru**
- [d] meteorický roj mimo zemskou atmosféru

16. Plocha povrchu Měsíce je téměř 40 milionů km^2 . Jak velký je jeho povrch v poslední čtvrti?

- [a] 10 milionů km^2
- [b] 20 milionů km^2
- [c] 30 milionů km^2
- [d] **40 milionů km^2**

17. Co je Aldebaran?

- [a] **Nejjasnější hvězda souhvězdí Býka.**
- [b] Nejjasnější hvězda souhvězdí Orionu.
- [c] Nejjasnější hvězda souhvězdí Berana.
- [d] Nejjasnější hvězda souhvězdí Forda.

18. Jaká je hodnota rychlosti světla?

- [a] $300\,000\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
- [b] **$300\,000\text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$**
- [c] $300\,000\text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
- [d] $300\,000\text{ ly}$

19. Jak je vzdálená galaxie v Andromedě M31?

- [a] 2 500 000 kg
- [b] 2 500 000 km
- [c] 2 500 000 au
- [d] **2 500 000 ly**

20. V jaké fázi je Měsíc při zatmění Měsíce?

- [a] v novu
- [b] v první čtvrti
- [c] **v úplňku**
- [d] v poslední čtvrti

21. Která planeta má nejmenší hustotu?

- [a] Jupiter
- [b] **Saturn**
- [c] Uran
- [d] Neptun

22. Jak se z vodíku na Slunci uvolňuje energie?

- [a] hořením
- [b] **termonukleární přeměnou na helium**
- [c] Vodík je zde v kovové fázi a tečou jím obrovské proudy, které Slunce zahřívají.
- [d] anihilací



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

23. Jakou barvu má Slunce?

- [a] červenou
- [b] žlutou
- [c] modrou
- [d] **bílou**

24. Na které planetě Sluneční soustavy je nejvyšší povrchová teplota?

- [a] na Merkuru
- [b] **na Venuši**
- [c] na Zemi
- [d] na Marsu

25. Co je to terminátor?

- [a] **rozhraní mezi osvětlenou a neosvětlenou částí tělesa**
- [b] rozhraní mezi zimou a jarem
- [c] robotický dalekohled
- [d] robotická sonda určená k průzkumu Měsíce

26. Sluneční skvrna je

- [a] teplejší než okolní povrch Slunce.
- [b] stejně teplá jako okolní povrch Slunce.
- [c] **chladnější než okolní povrch Slunce.**
- [d] o 1 000 °C chladnější než sluneční jádro.

27. Newtonův dalekohled zpravidla obsahuje

- [a] pouze čočky.
- [b] pouze zrcadla.
- [c] **čočku i zrcadlo.**
- [d] spojku a rozptylku.

28. Kdy na severní polokouli začíná léto?

- [a] **Když Slunce svítí v pravé poledne kolmo na obratník Raka.**
- [b] Když Slunce svítí v pravé poledne kolmo na rovník.
- [c] Když Slunce svítí v pravé poledne kolmo na nultý poledník.
- [d] Když Slunce svítí v pravé poledne kolmo na Zemi.

29. Proč je hvězda Polárka významná?

- [a] Protože je to nejjasnější hvězda na severní polokouli.
- [b] Protože je vždy blízko zenitu.
- [c] **Protože je v současné době blízko severního světového pólu.**
- [d] Protože je vždy poblíž jarního bodu.

30. Jaká je teplota na povrchu Pluta?

- [a] 22 °C
- [b] -22 °C
- [c] **-220 °C**
- [d] -2 200 °C



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

C Přechod Venuše

(max. 20 bodů)

Dva astronomové, tučňák a kapybara, chtějí změřit vzdálenost Země od Slunce, která je jim zatím neznámá a která odpovídá velikosti astronomické jednotky. Napadlo je, že by k tomu mohli využít pozorování přechodu Venuše přes sluneční disk. Konkrétně metodu paralaxy, což je úhlový posun polohy objektu vzhledem k pozadí, který vzniká při pohledu na objekt ze dvou různých míst. V případě tučňáka s kapybarou bude oním objektem Venuše, kterou bude každý pozorovat z jiného místa na Zemi na pozadí slunečního disku: tučňák z obratníku Raka a kapybara z obratníku Kozoroha.¹

Ještě před začátkem pozorování přechodu mohou spočítat některé důležité informace. Z dlouhodobého pozorování znají synodickou periodu oběhu Venuše $T_{\text{syn}} = 583,92$ dní. Jak už z krajského kola víš, jedná se o dobu, za kterou se Venuše dostane do stejné polohy vzhledem k Zemi a Slunci, například mezi dvěma po sobě jdoucími konjunkcemi. Kromě toho samozřejmě znají i siderickou periodu oběhu Země kolem Slunce, tedy $T_{Z,\text{sid}} = 365,25$ dne.

a) Nakresli obrázek tučňáka nebo kapybary při pozorování přechodu Venuše.

Čím hezčí, tím lepší. :)

b) Z výše zadaných údajů spočítej siderickou periodu oběhu Venuše kolem Slunce $T_{V,\text{sid}}$. Výsledek uveď s přesností na celé dny.

Jelikož Země i Venuše obíhají kolem Slunce stejným směrem, pro synodickou úhlovou rychlost oběhu platí

$$\omega_{\text{syn}} = \omega_{V,\text{sid}} - \omega_{Z,\text{sid}}.$$

Dosadíme za úhlové rychlosti $\omega = 360^\circ/T$. Dostáváme tedy

$$\frac{360^\circ}{T_{\text{syn}}} = \frac{360^\circ}{T_{V,\text{sid}}} - \frac{360^\circ}{T_{Z,\text{sid}}},$$

odkud zkrácením 360° dostaneme vztah

$$\frac{1}{T_{\text{syn}}} = \frac{1}{T_{V,\text{sid}}} - \frac{1}{T_{Z,\text{sid}}}.$$

Konečně můžeme vyjádřit

$$T_{V,\text{sid}} = \frac{T_{\text{syn}} T_{Z,\text{sid}}}{T_{\text{syn}} + T_{Z,\text{sid}}}.$$

Číselně dostáváme $T_{V,\text{sid}} \doteq 225$ dní.

Tohoto výsledku chtějí obě zvířátka využít k určení poměru velké poloosy dráhy Venuše a Země. Naštěstí znají 3. Keplerův zákon (ovšem pouze ve tvaru, v němž vystupuje poměr velkých poloos a oběžných period, nikoli hmotnost Slunce, kterou stejně neznají).

c) Spočti číselně poměr p velkých poloos Venuše a Země, tedy $p = a_V/a_Z$. Výsledek uveď s přesností na dvě desetinná místa.

¹Případný rozdíl zeměpisných délek pozorovatelů nebude hrát v této úloze roli.

Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Ze 3. Keplerova zákona můžeme psát

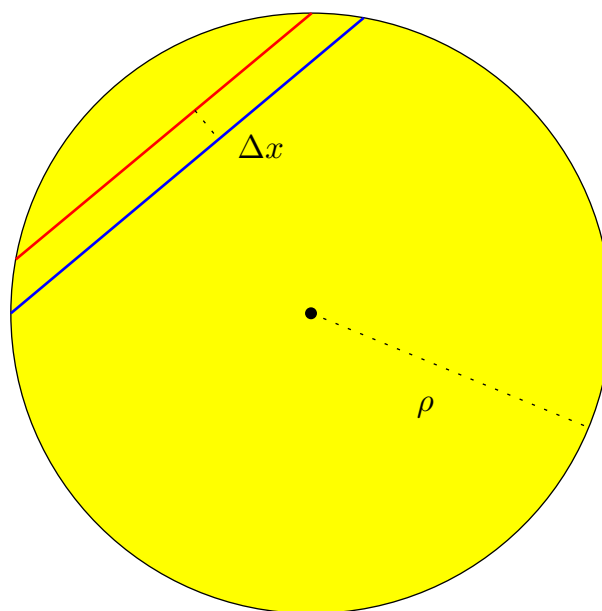
$$\frac{T_{V,\text{sid}}^2}{T_{Z,\text{sid}}^2} = \frac{a_V^3}{a_Z^3}.$$

Odtud můžeme vyjádřit

$$p = \frac{a_V}{a_Z} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_{V,\text{sid}}}{T_{Z,\text{sid}}}\right)^2}.$$

Číselně $p \doteq 0,72$.

Zbytek informací potřebných k výpočtu astronomické jednotky získala zvířátka při pozorování přechodu Venuše přes sluneční disk, jehož úhlový poloměr označme jako ρ . Pozorovala ho ze dvou různých míst na Zemi, proto pro každého vypadal přechod trochu jinak. Aby svá pozorování mohli porovnat, zakreslila napozorované dráhy Venuše přes disk Slunce do jednoho obrázku, který vypadá jako obrázek 1, který vidíš níže. Červená čára ukazuje dráhu Venuše tak, jak ji viděl tučňák, modrá odpovídá dráze, kterou pozorovala kapybara. Bohužel, poté co pozorování zakreslili, zjistili že jsou tyto dvě čáry ve skutečnosti až příliš blízko sebe a změřit jejich úhlovou vzdálenost Δx z nákresu je velmi obtížné. Jinými slovy, paralaxa Δx Venuše na pozadí slunečního disku je velmi malá.



Obrázek 1: Dráha Venuše promítnutá na sluneční disk z pohledu dvou různých pozorovatelů na povrchu Země (červená čára odpovídá tučňákovi, modrá kapybáře).

Napadl je ale přesnější způsob, jak ji určit. Oba si naštěstí zaznamenali časy okamžiků, tzv. *kontaktů*, kdy kotouček Venuše vstupoval na sluneční disk a kdy ho opouštěl. Při přechodu Venuše lze pozorovat čtyři kontakty planety se slunečním kotoučem, viz také obrázek 2.

1. *kontakt:* Venuše je ještě zcela mimo sluneční disk, kterého se právě poprvé dotkla, a pohybuje se směrem dovnitř.

Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

2. *kontakt*: Venuše se ocitá zcela uvnitř slunečního disku, přestává se dotýkat jeho okraje a dále se pohybuje směrem dovnitř.

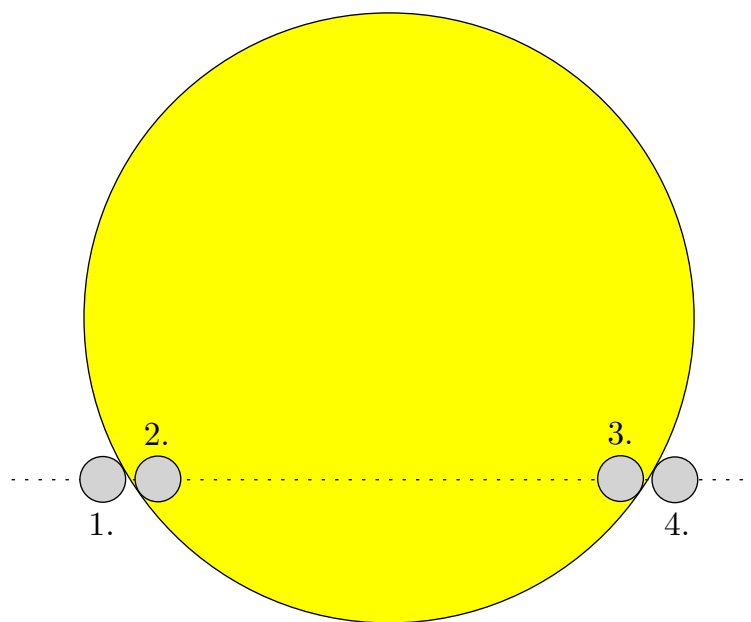
3. *kontakt*: Venuše je stále zcela uvnitř slunečního disku a právě se znovu dotkla jeho okraje, pohybuje se směrem ven.

4. *kontakt*: Venuše zcela opouští sluneční disk.

Časy těchto kontaktů pro oba dva astronomy můžeš najít v tabulce 1 níže.

Pozorovatel	1. kontakt t_1	2. kontakt t_2	3. kontakt t_3	4. kontakt t_4
tučňák	10:31:48	10:54:13	15:53:55	16:16:20
kapybara	10:27:21	10:49:46	15:58:22	16:20:47

Tabulka 1: Časy kontaktů disku Venuše se slunečním diskem pozorované tučňákem a kapybarou (ve formátu HH:MM:SS).



Obrázek 2: Kontakty disku Venuše při přechodu přes sluneční disk.

d) Spočítej doby T_t a T_k trvání přechodu Venuše přes sluneční disk pro tučňáka a kapybaru. Výsledek uveď v sekundách. Vzhledem k další části úlohy rozuměj dobou trvání přechodu čas mezi oběma kontakty STŘEDU disku Venuše s okrajem Slunce.

Rozumíme-li dobou trvání přechodu čas mezi prvním a posledním kontaktem středu disku planety, měli bychom nejprve spočítat časy těchto kontaktů. Čas prvního kontaktu středu disku T_1 bude průměrem času 1. a 2. kontaktu, tedy

$$T_1 = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Obdobně čas druhého kontaktu středu disku T_2 bude průměrem času 3. a 4. kontaktu, tedy

$$T_2 = \frac{t_3 + t_4}{2}.$$

Doba trvání přechodu pak bude

$$T = T_2 - T_1.$$

Dosazením časů jednotlivých kontaktů z tabulky vyjde doba trvání přechodu pro tučňáka $T_t \doteq 19\,327\text{ s}$ a pro kapybaru $T_k \doteq 19\,861\text{ s}$.

Poznámka: vzhledem k symetrii lze dobu přechodu vypočítat také jako rozdíl časů 3. a 1. nebo 4. a 2. kontaktu.

e) Zvířátka na obou pozorovacích stanovištích si rovněž změřila úhlovou rychlost, jakou se z jejich pohledu Venuše vzhledem ke Slunci pohybuje. Oběma vyšla hodnota přibližně $\omega = 1,59^\circ \cdot \text{d}^{-1}$. Vypočti úhlové délky l_t a l_k dráhy Venuše po slunečním disku pro tučňáka a kapybaru v úhlových minutách.

Za předpokladu, že je trajektorie planety na slunečním disku úsečka, spočteme její úhlovou délku l jako

$$l = \omega T.$$

Po dosazení a převodu na úhlové minuty vyjde pro tučňáka $l_t \doteq 21,34'$ a pro kapybaru $l_k \doteq 21,93'$.

Pro výpočet vzdálenosti nás bude zajímat úhlová vzdálenost Δx napozorovaných drah na slunečním disku, neboli paralaxa Venuše na pozadí slunečního disku. K jejímu určení můžeš využít obrázku 3, kde jsme jako x označili kolmou (úhlovou) vzdálenost dráhy Venuše od středu slunečního disku. Předpokládej, že úhlový poloměr Slunce ρ je roven $16'$.

f) Urči hodnotu Δx v úhlových minutách.

Z obrázku lze vidět, že vyznačený trojúhelník je pravoúhlý. Z Pythagorovy věty tedy postupně určíme vzdálenost x nejbližšího bodu obou pozorovaných trajektorií planety ke středu slunečního disku, tedy

$$x = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

Označíme-li tuto veličinu pro tučňáka jako x_t a pro kapybaru jako x_k , dostaneme hodnoty

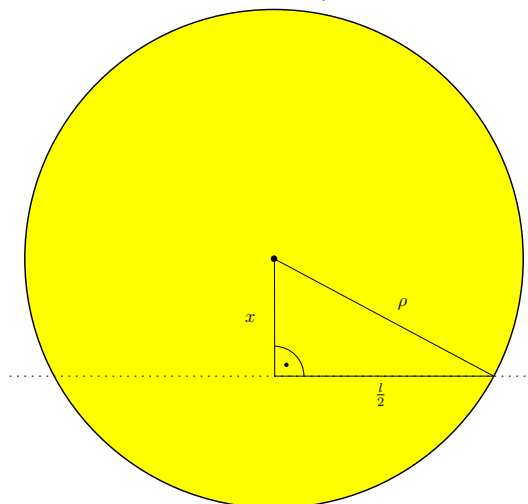
$$x_t \doteq 11,92' \quad \text{a} \quad x_k \doteq 11,65'.$$

Pro úhlovou vzdálenost trajektorií od sebe potom bude platit

$$\Delta x = |x_t - x_k|.$$

Číselně vyjde v úhlových minutách $\Delta x \doteq 0,27'$.

Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

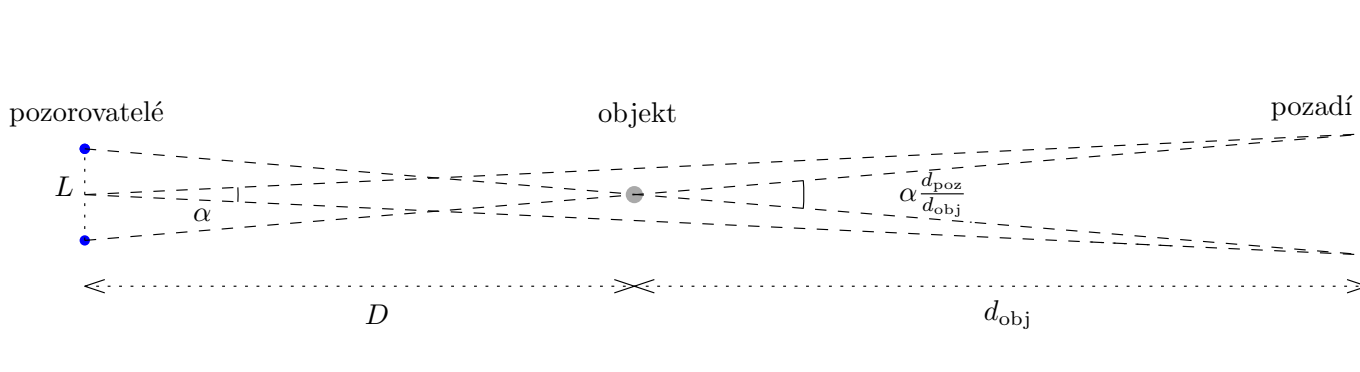


Obrázek 3: Geometrie přechodu Venuše přes sluneční disk.

Nakonec musíme převést paralaxu Δx na vzdálenost Venuše od Země. Jelikož paralaxu určujeme vzhledem k pozadí, které od astronomů není nekonečně daleko, musíme použít obecný vztah

$$\frac{L}{D} = \frac{d_{\text{poz}}}{d_{\text{obj}}} \alpha,$$

kde α je paralaxa v radiánech, L je vzdálenost pozorovatelů kolmá na spojnici Země–objekt (základna paralaxy), D je vzdálenost objektu od pozorovatelů a konečně d_{obj} a $d_{\text{poz}} = D + d_{\text{obj}}$ jsou vzdálenosti objektu a pozorovatelů od pozadí, na které paralaxu promítáme. Viz také obrázek 4. Předpokládáme, že úhel α je velmi malý. Vidíme, že v limitě nekonečné vzdálenosti pozadí od pozorovatelů a objektu bude přibližně platit $\frac{d_{\text{poz}}}{d_{\text{obj}}} \approx 1$ a dostaneme tedy obvyklý vztah pro paralaxu.



Obrázek 4: Paralaxa objektu na konečně vzdáleném pozadí.

g) Určete vzdálenost $D = a_Z - a_V$ a pomocí výsledku z části c) také vzdálenost a_Z . Oba výsledky uveďte v metrech zaokrouhlené na 3 platné číslice. Můžete předpokládat, že kolmou vzdálenost L tučňáka a kapybary lze spočítat jako $L = R_Z \sin 2\varepsilon \doteq 4665$ km, kde $\varepsilon \doteq 23,5^\circ$ značí sklon rotační osy Země vůči rovině ekliptiky.²

²Zde využíváme faktu, že spojnice rovin obratníku Raka a Kozoroha je rovnoběžná se světovou osou a svírá tedy s rovinou ekliptiky vždy úhel $90^\circ - \varepsilon$.



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Dosadíme-li $d_{\text{obj}} = a_V$, $d_{\text{poz}} = a_Z$ a $\alpha = \Delta x$, dostaneme

$$\frac{L}{D} = \Delta x \frac{a_Z}{a_V} = \frac{\Delta x}{p},$$

a tedy

$$D = \frac{p}{\Delta x} L \doteq 42,8 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Také máme

$$\frac{D}{a_Z} = 1 - \frac{a_V}{a_Z} = 1 - p,$$

a tedy

$$a_Z = \frac{D}{1 - p} \doteq 153 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

D Slunce a Jupiter

(max. 20 bodů)

Slunce tvoří téměř 99,87 % hmotnosti Sluneční soustavy. Dalšíh 0,1 % hmotnosti připadá na Jupiter a zbylé objekty tvoří pouze 0,03 % celkové hmotnosti. Pro tuto úlohu si proto celou Sluneční soustavu zjednodušíme jen na systém Slunce a Jupiteru. Známe vzdálenost Jupiteru od Slunce $r = 5,2 \text{ au}$ a také hmotnosti obou těles: $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ a $M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$.

Libovolná dvě hmotná tělesa na sebe vzájemně působí gravitační silou, jejíž velikost označme jako F_g . Pokud tato tělesa obíhají po kruhových drahách v *inerciální* soustavě, kde nepůsobí žádné další síly, je tato síla vždy rovna síle dostředivé, jejíž velikost označme jako F_d . Pro obě tyto síly platí vztahy

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{R^2}, \quad F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta, m_1 a m_2 jsou hmotnosti obou těles a R je jejich vzdálenost. V případě dostředivé síly je v kruhová rychlost oběhu tělesa a r poloměr kružnice, po které obíhá.

a) Předpokládejme nejdříve, že z pohledu inerciální vztažné soustavy Jupiter obíhá po kružnici, jejíž střed leží uprostřed Slunce. Určete pomocí rovnosti gravitační a dostředivé síly kruhovou rychlost oběhu Jupiteru v_J . Vyjádřete vzorec nejprve obecně a až poté do něj dosadte číselné hodnoty. Výsledek uveďte v metrech za sekundu zaokrouhlený na celé číslo.

Vyjdeme z rovnosti

$$F_g = F_d.$$

Dosazením vzorců ze zadání dostaneme

$$\frac{GM_{\odot}M_J}{r^2} = \frac{M_Jv_J^2}{r}.$$



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Vydělením M_J a vynásobením r dostaneme

$$v_J^2 = \frac{GM_\odot}{r}.$$

Odmocněním získáme vzorec pro rychlost oběhu

$$v_J = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r}}.$$

Číselně $v_J \doteq 13\,062 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ve skutečnosti ale Slunce i Jupiter v inerciální vztažné soustavě obíhají po kružnicích se středem ve společném bodě. Tento bod zároveň neustále leží na spojnici Slunce-Jupiter. Odtud vidíme, že obě tělesa musí obíhat po kružnicích rovnoměrně se stejnou periodou.

b) Vyjádřete periodu oběhu Slunce a Jupiteru (označme P_\odot a P_J) kolem společného středu obecně pomocí jejich kruhových rychlostí v_\odot a v_J a vzdáleností r_\odot a r_J od společného středu.

Jedná se o rovnoměrný pohyb po kružnici, můžeme tedy použít vztah

$$P = \frac{s}{v},$$

kde s je dráha, kterou těleso urazí za jednu periodu (tedy obvod kružnice). Odtud dostaneme

$$P_\odot = \frac{2\pi r_\odot}{v_\odot}, \quad P_J = \frac{2\pi r_J}{v_J}.$$

c) Srovnajte velikost gravitační síly, kterou působí Slunce na Jupiter, s gravitační silou, kterou působí Jupiter na Slunce. Výsledek uveďte v newtonech s přesností na 3 platné číslice.

Síla působící na obě tělesa má stejnou velikost, liší se ve směru působení. Číselně $F_g = 4,17 \cdot 10^{23} \text{ N}$.

d) Slunce i Jupiter obíhají v inerciální vztažné soustavě po kružnicích kolem společného středu. Gravitační síly na ně působící se tedy musí rovnat dostředivým silám. S využitím předchozí části srovnajte dostředivé síly působící na obě tělesa. Za pomoci výsledků z části b) vyjádřete poměr vzdáleností od společného středu $r_\odot : r_J$ pomocí poměru hmotností obou těles. Je společný střed oběhu něčím významný?

Velikost gravitační síly působící na obě tělesa je stejná, proto se musí rovnat i odpovídající velikosti dostředivých sil. Máme tedy

$$F_{d,\odot} = F_{d,J}.$$

Odtud

$$\frac{M_\odot v_\odot^2}{r_\odot} = \frac{M_J v_J^2}{r_J}.$$

Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Rovnici upravíme, abychom na jedné straně měli poměr hmotností, tedy

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = \frac{r_{\odot} v_{\text{J}}^2}{r_{\text{J}} v_{\odot}^2}.$$

Za pomoci výsledků z části b) si nyní potřebujeme vyjádřit poměr rychlostí. Ze zadání části b) víme, že se periody oběhu musí rovnat, neboli

$$P_{\odot} = P_{\text{J}}.$$

Dostaneme tedy poměr

$$\frac{r_{\odot}}{v_{\odot}} = \frac{r_{\text{J}}}{v_{\text{J}}}.$$

Převědeme-li rychlosti na jednu stranu a vzdálenosti na druhou, dostaneme

$$\frac{v_{\text{J}}}{v_{\odot}} = \frac{r_{\text{J}}}{r_{\odot}}.$$

Obě strany rovnice umocníme, abychom mohli výsledek přímo dosadit do původního vztahu. Dostaneme

$$\frac{v_{\text{J}}^2}{v_{\odot}^2} = \frac{r_{\text{J}}^2}{r_{\odot}^2}.$$

Dosadíme do upravené rovnosti dostředivých sil, tedy

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = \frac{r_{\odot} r_{\text{J}}^2}{r_{\text{J}} r_{\odot}^2}.$$

Po zkrácení máme

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = \frac{r_{\text{J}}}{r_{\odot}}.$$

Společný střed oběhu je tedy zároveň hmotným středem soustavy.

e) Využitím vztahu $r = r_{\odot} + r_{\text{J}}$ spočítejte vzdálenost r_{\odot} společného středu soustavy od Slunce. Leží společný střed uvnitř, nebo vně Slunce?

Vyjádríme si vzdálenost r_{J} pomocí vzdálenosti Slunce od Jupiteru r , kterou známe ze zadání, a vzdálenosti společného středu od Slunce r_{\odot} , tedy

$$r_{\text{J}} = r - r_{\odot}.$$

Dosadíme do výsledku z části d), dostaneme

$$\frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = \frac{r - r_{\odot}}{r_{\odot}}.$$

Postupně upravujeme, abychom vyjádřili r_{\odot} . Celou rovnici vynásobíme r_{\odot}

$$r_{\odot} \frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = r - r_{\odot}.$$



Finále 2022/23, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Přičteme r_{\odot} , aby na jedné straně rovnice byly jen výrazy s r_{\odot}

$$r_{\odot} + r_{\odot} \frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}} = r.$$

Vytkneme r_{\odot} z výrazu na levé straně

$$r_{\odot} \cdot \left(1 + \frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}}\right) = r.$$

Vydělíme rovnici výrazem v závorce, aby na levé straně zůstalo jenom r_{\odot}

$$r_{\odot} = \frac{r}{1 + \frac{M_{\odot}}{M_{\text{J}}}}.$$

Nakonec převedeme na jednoduchý zlomek

$$r_{\odot} = r \frac{M_{\text{J}}}{M_{\odot} + M_{\text{J}}}.$$

Číselně $r_{\odot} \doteq 7,4 \cdot 10^8 \text{ m} \doteq 4,96 \cdot 10^{-3} \text{ au}$. Tato vzdálenost je větší než poloměr Slunce, společný (hmotný) střed proto leží vně Slunce.