Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Hvězdná interferometrie

(max. 10 bodů)

Hvězdná interferometrie je technika používaná k vytváření snímků hvězd s vysokým rozlišením kombinací světla ze dvou nebo více dalekohledů. Rozlišení obrazu je určeno vzdáleností mezi dalekohledy a vlnovou délkou pozorovaného světla.

Hvězda má odhadovaný průměr 1,5 milionu kilometrů a nachází se ve vzdálenosti 10 parseků od Země. Hvězda je pozorována dvěma dalekohledy na vlnové délce 500 nm. Vzdálenost mezi dalekohledy je 100 metrů.

a) Vypočítejte úhlový průměr hvězdy θ_{hvez} při pohledu ze Země.

Pro průměr $D_{\text{hvez}} = 1{,}5 \cdot 10^9$ m a vzdálenost $d = 3{,}086 \cdot 10^{17}$ m bude úhlový průměr hvězdy

$$\theta_{\text{hvez}} = \frac{D_{\text{hvez}}}{d} = \frac{1{,}5 \cdot 10^9}{3{,}086 \cdot 10^{17}}\,\text{rad} = 4{,}86 \cdot 10^{-9}\,\text{rad}\,.$$

b) Vypočítejte úhlové rozlišení interferometru θ_{roz} na této vlnové délce.

Úhlové rozlišení dalekohledu, jehož průměr je $D_{\text{dalek}} = 100$ m a který pozoruje na vlnové délce $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m, je dán vztahem

$$\theta_{\text{roz}} = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{dalek}}} = 1{,}22 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-7}}{100}\,\text{rad} = 6{,}1 \cdot 10^{-9}\,\text{rad}\,.$$

c) Bude interferometr schopen rozlišit disk hvězdy (ANO/NE)? Vysvětlete svou odpověď.

Protože $\theta_{\text{hvez}} < \theta_{\text{roz}}$, nebudeme schopni rozlišit kotouč hvězdy, která se nám tak bude jevit jako bod.

d) Předpokládejte, že interferometr bude modernizován tak, aby používal vlnovou délku 250 nm. Vypočítejte nové úhlové rozlišení θ'_{roz} a určete, zda lze při této vlnové délce rozlišit disk hvězdy (ANO/NE).

Protože je vlnová délka poloviční oproti předchozí situaci, bude úhlová rozlišovací schopnost $\theta'_{\text{roz}} \approx 3 \cdot 10^{-9}$ rad. Nyní už tak bude možné disk hvězdy interferometrem rozlišit.

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

B $\pi = 3$

(max. 10 bodů)

Lední medvěd žijící na severním pólu se dozvěděl, že poměr mezi obvodem kružnice a jejím průměrem je vždy $\pi = 3{,}1415926535\ldots$. Rozhodl se tedy, že si tuto skutečnost musí ověřit na vlastní kůži.

Medvěd vyrazil ze severního pólu po poledníku směrem na jih a ušel vzdálenost ϱ, měřenou po povrchu Země, do bodu A. V něm se otočil o pravý úhel a vydal se kráčet **po rovnoběžce**, dokud nedošel zpět do bodu A. Tím obešel kružnici o obvodu ω. Očekával, že získá

$$\omega = 2\pi\varrho\,,$$

ale namísto toho získal

$$\omega = 2\Pi_\theta\varrho\,,$$

kde Π_θ hraje hodnotu čísla π, ale není to konstanta leč funkce závislá na úhlu $\theta = \pi/2 - \phi$, kde ϕ je zeměpisná šířka. Severnímu pólu odpovídá $\theta = 0$ a jižnímu pólu $\theta = \pi$ radiánů.

Vaše úkoly jsou:

a) Najít funkci Π_θ a vyčíslit ji pro $\theta = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$. Pro jaké θ je $\Pi_\theta = 3$?

Vzdálenost ϱ měřená po povrchu Země o poloměru R je rovna délce oblouku

$$\varrho = R\theta\,.$$

Obvod kružnice na daném θ je

$$\omega = 2\pi R\sin\theta\,,$$

z čehož nám plyne funkce Π_θ

$$\Pi_\theta = \frac{\omega}{2\varrho} = \frac{2\pi R\sin\theta}{2R\theta} = \pi\frac{\sin\theta}{\theta}\,.$$

Dosazením hodnot $\theta = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\}$ získáváme hodnoty $\Pi_\theta = \{3, 2, \frac{3}{5}\}$. $\Pi_\theta = 3$ nastává tedy pro $\theta = \pi/6$.

b) Vyčíslit Π_θ pro situace, kdy $\theta = \pi$ a $\theta \to 0$, ale $\theta \neq 0$. Výsledky vysvětlete.

Pro $\theta = \pi$ medvěd obchází kružnici o „poloměru“ ϱ odpovídající polovině Zemského obvodu, skutečně ale obchází nepatrnou kružnici kolem jižního pólu. Tedy $\omega = 0$, a proto musí být i $\Pi_\theta = 0$. Tento výsledek dostaneme i dosazením do dříve odvozeného vzorce pro Π_θ.

Pro $\theta = 0$ nelze dosadit přímo, protože bychom dělili nulou, ale ptát se na otázku, k čemu se blíží Π_θ, když $\theta \to 0$, má dobrý smysl, což si můžete snadno zkusit na kalkulačce dosazováním malých hodnot. Dostaneme $\Pi_\theta \to \pi$. Čím méně bude medvěd vzdálený od severního pólu, tím méně si bude uvědomovat sféričnost Země. Lokálně se mu bude Zemský povrch jevit jako rovinný, a tak by mělo vyjít, že $\Pi_\theta = \pi$.

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

C Spektroskopická dvojhvězda

(max. 10 bodů)

Astronomové pozorují spektroskopickou dvojhvězdu složenou ze dvou hvězd o různých teplotách a poloměrech. Když se hvězdy vzájemně nepřekrývají, dvojhvězda má hvězdnou velikost $m = 15{,}00\,\mathrm{mag}$. Když ale menší hvězda zakryje větší hvězdu, vzroste pozorovaná hvězdná velikost na $m_\mathrm{z} = 15{,}15\,\mathrm{mag}$. Předpokládejte, že disk menší hvězdy v takové situaci leží zcela na pozadí větší hvězdy. Z měření vyplývá, že maximum vyzařování větší hvězdy je $\lambda_1 = 290\,\mathrm{nm}$ a maximum vyzařování menší hvězdy je $\lambda_2 = 580\,\mathrm{nm}$.

Vypočtěte, kolikrát má první hvězda větší poloměr než hvězda druhá, neboli vyjádřete poměr R_1/R_2.

Součet intenzit vyzařování hvězd je

$$I = \sigma\pi(R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4)\,, \tag{1}$$

kde T_1 a T_2 jsou teploty první a druhé hvězdy. Rovnici jsme získali dosazením do Stefan-Boltzmannova zákona. Intenzita vyzařování v případě zákrytu je

$$I_\mathrm{z} = \sigma\pi([R_1^2 - R_2^2]T_1^4 + R_2^2T_2^4)\,, \tag{2}$$

kde se odečte zářivý výkon části první hvězdy, která je zakrytá hvězdou druhou. Z hvězdných velikostí m a m_z můžeme určit poměr intenzit I a I_z. Rovnice (1) a (2) proto vydělíme a získáme

$$\frac{I_z}{I} = \frac{(R_1^2 - R_2^2)T_1^4 + R_2^2T_2^4}{R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4} = \frac{R_1^2T_1^4 + R_2^2(T_2^4 - T_1^4)}{R_1^2T_1^4 + R_2^2T_2^4} = \frac{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 T_1^4 + T_2^4 - T_1^4}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 T_1^4 + T_2^4}\,,$$

kde jsme poměr intenzity vyjádřili pomocí poměru poloměrů. Nyní z rovnice vyjádříme poměr poloměrů

$$\begin{aligned}
\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 T_1^4\frac{I_\mathrm{z}}{I} + T_2^4\frac{I_z}{I} &= \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 T_1^4 + T_2^4 - T_1^4,\\
\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 T_1^4\left(1 - \frac{I_\mathrm{z}}{I}\right) &= T_1^4 - T_2^4\left(1 - \frac{I_\mathrm{z}}{I}\right),\\
\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4\left(1 - \frac{I_\mathrm{z}}{I}\right)}{1 - \frac{I_\mathrm{z}}{I}}} &= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{I_\mathrm{z}}{I}} - \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Nakonec zbývá vyjádřit poměr teplot pomocí poměru maxim vlnových délek a poměr intenzit z hvězdných velikostí. Z Wienova posunovacího zákona plyne

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,.$$

Z Pogsonovy rovnice získáme

$$\frac{I_\mathrm{z}}{I} = 10^{-\frac{m_\mathrm{z} - m}{2{,}5}}\,.$$

Dosazením těchto vztahů do rovnice pro poměr poloměrů v (3) získáme

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{1}{1-10^{-\frac{m_z-m}{2{,}5}}} - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^4}\,.$$

Po dosazení konkrétních číselných hodnot dostáváme:

$$\frac{R_1}{R_2} = 2{,}77\,,$$

což odpovídá poměru poloměrů hvězd na hlavní posloupnosti daných spektrálních typů.

D Binární systém

(max. 10 bodů)

Oběžné kruhové dráhy složek dvojhvězdy s periodou $P = 80\,\mathrm{d}$ se na nebi jeví jako koncentrické elipsy s excentricitou $\epsilon = \sqrt{3}/2$ a velikostmi úhlových hlavních poloos $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,2\jmath$ (tzn. elipsy splývají v jednu). Dále pozorujeme, že v kombinovaném spektru dvojhvězdy se čára H_α (laboratorní vlnová délka $\lambda_0 = 656{,}28\,\mathrm{nm}$) periodicky rozštěpuje na dvě komponenty s maximální vzdáleností $\Delta\lambda_{\mathrm{max}} = 0{,}4\,\mathrm{nm}$.

Určete hmotnosti složek dvojhvězdy M_1, M_2 v násobcích hmotnosti Slunce a vzdálenost k systému d v parsecích.

Úlohu postupně rozebereme:

1. Protože $\alpha_1 = \alpha_2$, budou mít složky dvojhvězdy stejné poloměry kruhových drah $r_1 = r_2 \equiv r$. Díky tomu budou i hmotnosti složek stejné $M_1 = M_2 \equiv M$, jak plyne z

   $$M_1 r_1 = M_2 r_2\,,$$

   a oběžné rychlosti $v_1 = v_2 \equiv v$

   $$v_1 = \frac{2\pi r_1}{P} = \frac{2\pi r_2}{P} = v_2\,.$$

   Jak plyne ze zadání, složky dvojhvězdy obíhají po *kruhových trajektoriích* a my vidíme rovinu oběhu pod určitým sklonem i. Pokud by $i = 90°$, byla by oběžná rovina kolmá na směr pozorování a trajektorie bychom pozorovali jako soustředné kružnice, naopak pokud by $i = 0°$, stáli bychom jako pozorovatelé v oběžné rovině dvojhvězdy a jejich trajektorie by pro nás vypadaly jako úsečky se společným středem.

2. Nechť α značí velikost úhlové hlavní poloosy a β velikost úhlové vedlejší poloosy elipsy, kterou na nebi pozorujeme. Pak excentricita ϵ souvisí s α a β podle

   $$\epsilon = \sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,.$$

Dosazením zjistíme, že

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2}\,.$$

Vztah mezi β/α a úhlem i je

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sin i\,,$$

z čehož plyne

$$\sin i = \frac{1}{2} \implies i = 30^\circ\,.$$

3. Pokud v představuje velikost kruhových rychlostí složek dvojhvězdy, bude amplituda radiálních rychlostí dána vztahem:

$$v_\mathrm{r} = v\cos i\,.$$

Posun spektrálních čar a radiální rychlost zdroje jsou spjaty Dopplerovým zákonem, ze kterého plyne

$$\frac{\Delta\lambda_\mathrm{max}}{\lambda_0} = \frac{2v_\mathrm{r}}{c} = \frac{2v}{c}\cos i\,.$$

Velikost kruhové rychlosti v každé komponenty je tak

$$v = \frac{1}{2}\frac{\Delta\lambda_\mathrm{max}}{\lambda_0}\frac{c}{\cos i} = \frac{1}{2}\frac{0{,}4}{656{,}28}\frac{3\cdot 10^8}{\cos 30^\circ}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 1{,}06\cdot 10^5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}51\cdot 10^{-4}c\,.$$

4. Rychlost a poloměr kruhové dráhy souvisí vztahem

$$v = \frac{2\pi r}{P}\,.$$

Pro r tedy platí

$$r = \frac{Pv}{2\pi} = \frac{80\cdot 24\cdot 3600\cdot 1{,}06\cdot 10^5}{2\pi}\,\mathrm{m} \doteq 0{,}776\,\mathrm{au}\,.$$

5. Hmotnost dvojhvězdy určíme z 3. Keplerova zákona

$$2M = \frac{\left(2\frac{r}{\mathrm{au}}\right)^3}{\left(\frac{P}{\mathrm{rok}}\right)^2} = \frac{1{,}55^3}{0{,}219^2} = 78\,,$$

tedy $M = 39$. M udává, kolikrát je hmotnost hvězdy větší než hmotnost Slunce. Závěr tak je, že složky dvojhvězdy jsou stejně hmotné a každá váží 39 hmotností Slunce.

6. Zbývá nám určit vzdálenost ke dvojhvězdě. Vyjdeme z rovnice:

$$\alpha = \frac{r}{d}\,,$$

ze které snadno plyne vzdálenost

$$d = \frac{r}{\alpha} = \frac{0{,}776}{0{,}2}\,\mathrm{pc} \doteq 3{,}9\,\mathrm{pc}\,.$$

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

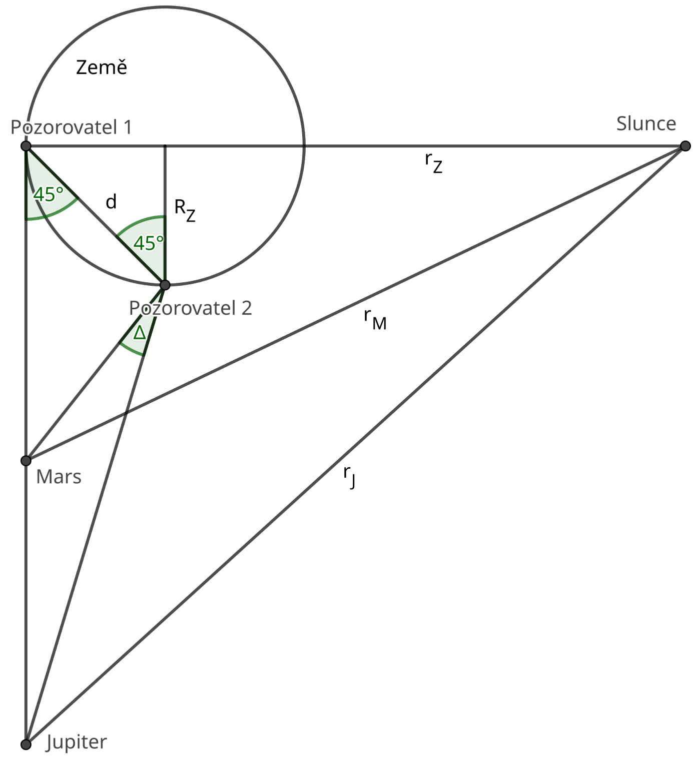
Dlouhé úlohy

E Topocentrická

(max. 20 bodů)

Je pravá půlnoc v den jarní rovnodennosti. Pozorovatel 1 stojí na rovníku a přímo na východním obzoru pozoruje dokonalou konjunkci Marsu a Jupiteru (středy disků se překrývají).

a) Spočítejte vzdálenost Marsu $d_{\mathrm{M},1}$ a Jupiteru $d_{\mathrm{J},1}$ od místa pozorovaní. Předpokládejte, že dráhy planet kolem Slunce jsou kružnice v rovině ekliptiky.



Obrázek 1: Nákres popsaného uspořádání. Poloha druhého pozorovatele je zakreslená přibližně. Ve skutečnosti je na spojnici středu Země a Jupiteru, ale vzhledem k tomu, že velikost Země je řádově menší než vzdálenost k Jupiteru, můžeme polohu pozorovatele aproximovat bodem v nákresu.

Nechť je R_Z poloměr Země a r_Z, r_M a r_J jsou vzdálenosti Země, Marsu a Jupiteru od Slunce. Pak vzdálenost planet určíme z Pythagorovy věty

$$d_{\mathrm{M/J},1} = \sqrt{r_{\mathrm{M/J}}^2 - (r_\mathrm{Z} + R_\mathrm{Z})^2}\,,$$

a tedy

$$d_{\mathrm{M},1} \doteq 1{,}7 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\,,$$
$$d_{\mathrm{J},1} \doteq 7{,}6 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\,.$$

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

b) O kolik se bude lišit vzdálenost Marsu a Jupiteru pro pozorovatele 2 stojícího ve stejnou chvíli na Zemi v místě, kde má Jupiter v zenitu? Tzn. spočítejte $d_{\mathrm{M},1} - d_{\mathrm{M},2}$ a $d_{\mathrm{J},1} - d_{\mathrm{J},2}$. Dejte si pozor na zaokrouhlovací chyby.

Vzdálenost mezi pozorovateli bude $d = \sqrt{2} R_{\mathrm{Z}}$. Vzdálenost planet od druhého pozorovatele pak bude

$$d_{\mathrm{M/J},2} = \sqrt{d^2 + d_{\mathrm{M/J},1}^2 - 2 d d_{\mathrm{M/J},1} \cos 45^\circ}\,.$$

a tedy

$$d_{\mathrm{M},1} - d_{\mathrm{M},2} \doteq 6\,377\,900\ \mathrm{m}\,,$$
$$d_{\mathrm{J},1} - d_{\mathrm{J},2} \doteq 6\,378\,000\ \mathrm{m}\,.$$

c) Jaká bude úhlová vzdálenost Δ středů disků planet pro druhého pozorovatele? Budou se překrývat? Odpovězte ANO/NE a svoji odpověď zdůvodněte.

Vzdálenost středů disků bude

$$\Delta = \arccos\left(-\frac{(d_{\mathrm{J},1} - d_{\mathrm{M},1})^2 - d_{\mathrm{M},2}^2 - d_{\mathrm{J},2}^2}{2 d_{\mathrm{M},2} d_{\mathrm{J},2}}\right) \doteq 6{,}0''\,.$$

Úhlový průměr planet na obloze bude pro druhého pozorovatele

$$\delta_{\mathrm{M},2} = \arctan \frac{2R_{\mathrm{M}}}{d_{\mathrm{M},2}} \doteq 8{,}2''\,,$$
$$\delta_{\mathrm{J},2} = \arctan \frac{2R_{\mathrm{J}}}{d_{\mathrm{J},2}} \doteq 39''\,,$$

kde R_{M} a R_{J} jsou poloměry Marsu a Jupiteru. Vychází nám, že disk Marsu bude před diskem Jupiteru a budou se tedy překrývat.

d) Na jakém azimutu (měřeno od jihu) A_1 uvidí první pozorovatel Jupiter a Mars? Na jaké zeměpisné šířce φ_2 stojí pozorovatel 2?

Planety jsou na ekliptice, která o půlnoci na rovníku za jarní rovnodennosti protíná obzor o $\varepsilon \doteq 23{,}5^\circ$ od východu směrem k jihu. Azimut tedy bude

$$A_1 = 270^\circ + \varepsilon \doteq 293{,}5^\circ \doteq 19^{\mathrm{h}}\,34^{\mathrm{m}}\,.$$

Pozorovatel 2 vidí úkaz v zenitu. Musí tedy nejen být o 6 časových pásem východněji, ale zároveň o ε na jižní polokouli, jeho zeměpisná šířka tedy bude

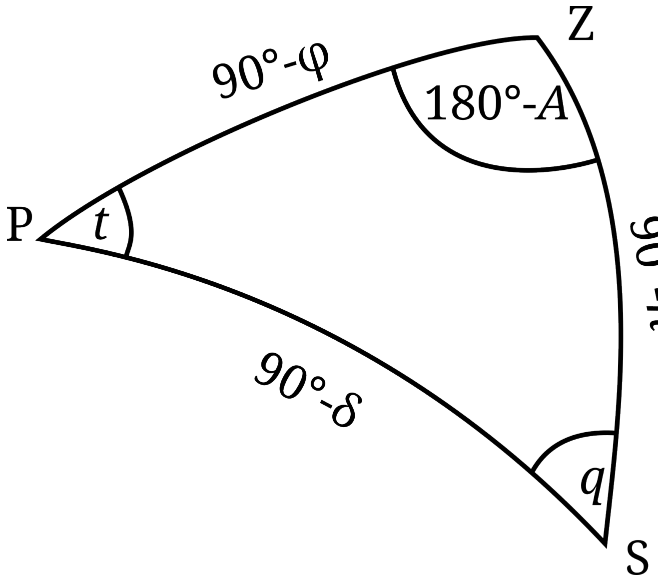
$$\varphi_2 = -\varepsilon \doteq -23{,}5^\circ\,.$$

e) Pro strany sférického trojúhelníku a, b, c a jim příslušné protilehlé strany platí sinová a kosinová věta ve tvaru

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}\,,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \qquad \text{(a cyklické záměny)}\,.$$

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Pozorovatel 2 se rozhodl úkaz vyfotit dalekohledem na azimutální montáži. Ta ale na rozdíl od paralaktické nezaručí, že se během dlouhé expozice při sledování objektu nestočí pole. Spočítejte úhel ω, o který se stočí pole v dalekohledu, pokud začne fotit hodinu potom, co byl Jupiter v Zenitu. Délka expozice snímku je $\tau = 5\,\mathrm{min}$. Nápověda: stočení pole odpovídá změně paralaktického úhlu q, který je u jednoho z vrcholů nautického trojúhelníku v obrázku 2.



Obrázek 2: Nautický trojúhelník, kde t je hodinový úhel, A azimut, φ zeměpisná šířka, δ deklinace, h výška nad obzorem a q paralaktický úhel. P je severní nebeský pól, Z zenit a S objekt na obloze.

Z předchozí části známe zeměpisnou šířku druhého pozorovatele φ_2. Snadno si rozmyslíme, že deklinace planet je $\delta = \varepsilon = \varphi_2$. Expozice snímku začne hodinu po kulminaci, v tu chvíli mají planety hodinový úhel $t_1 = 1^{\mathrm{h}}$, konec expozice nastane na hodinovém úhlu $t_2 = \tau + t_1 = 1^{\mathrm{h}}\,5^{\mathrm{m}}$. Nyní si můžeme vyjádřit výšku nad obzorem

$$
\begin{aligned}
\cos(90^\circ - h) &= \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta)\cos t\,,\\
\sin h &= \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t\,,\\
\sin h &= \sin^2\delta + \cos^2\delta\cos t\,.
\end{aligned}
$$

Paralaktický úhel pak bude

$$\sin q = \sin(90^\circ - \varphi)\frac{\sin t}{\sin(90^\circ - h)} = \cos\delta\frac{\sin t}{\cos h}\,.$$

Dosazením hodnot t_1 a t_2 dostaneme

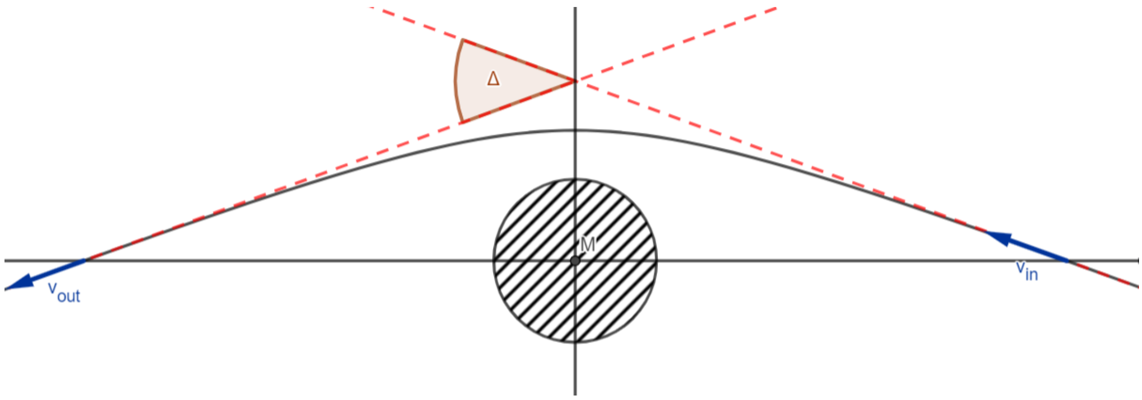
$$\omega = q(t_2) - q(t_1) \doteq -15'\,.$$

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

F Gravitační deflexe

(max. 20 bodů)

V této úloze se budete zabývat téměř katastrofickou situací, kdy do těsného okolí Země přilétne asteroid. Ten do Země naštěstí nenarazí, jen kolem ní prolétne a přitom změní svůj směr letu. Úhel svíraný vstupním vektorem $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}$ a výstupním vektorem $\mathbf{v}_{\mathrm{out}}$ rychlosti budeme nazývat *úhlem deflexe* (úhlem ohybu) a značit jako Δ, viz obr. 3. Vaším úkolem bude odvodit velikost tohoto úhlu, obecně i číselně. Celý výpočet budete provádět v systému Země.



Obrázek 3: Ilustrace gravitační deflexe. Obrázek není úplně přesný, neboť vektor $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}$ má představovat rychlost přilétajícího tělesa, když se nachází ještě *v nekonečnu* (mimo dosah gravitačního pole). Podobně $\mathbf{v}_{\mathrm{out}}$ představuje rychlost, jakou těleso bude mít, až odlétne do nekonečna. Po přerušovaných přímkách testovací částice (asteroid) z nekonečna přilétá/do nekonečna odlétá. Tyto přímky se nazývají *vstupní asymptota* a *výstupní asymptota*.

Než přistoupíte k samotné úloze, mohlo by být pro vás užitečné si připomenout základní fakta o pohybu tělesa v centrálním gravitačním poli. Pokud má ústřední těleso hmotnost M a v jeho gravitačním poli se pohybuje testovací těleso o hmotnosti m, má soustava obou těles celkovou mechanickou energii E:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}\,,$$

kde r je vzájemná vzdálenost mezi ústředním tělesem a pohybujícím se testovacím tělesem o rychlosti v. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je gravitační konstanta.

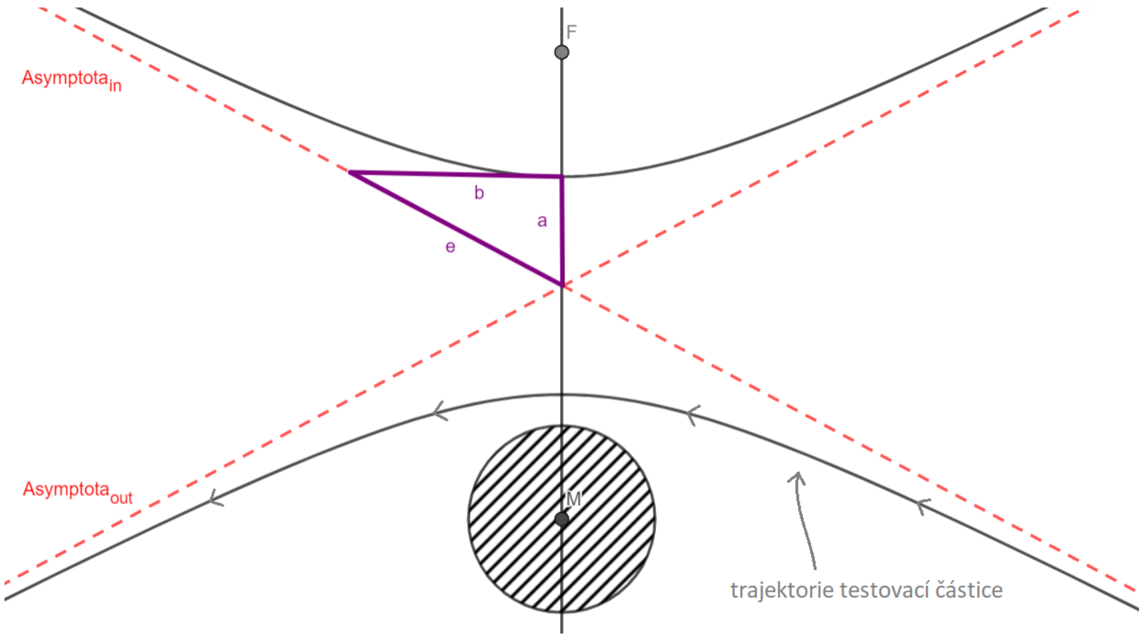
Podle hodnoty E se může testovací těleso pohybovat po třech (popř. čtyřech) různých typech trajektorií:

1. $E < 0$: Trajektorií je elipsa, popř. kružnice. Testovací těleso je k ústřednímu trvale vázáno.
2. $E = 0$: Trajektorií je parabola. Testovací těleso není k ústřednímu gravitačně vázáno a uniká po parabole do nekonečna.
3. $E > 0$: Trajektorií je hyperbola. Testovací těleso opět není k ústřednímu gravitačně vázáno a uniká po hyperbole do nekonečna.

V této úloze se testovací těleso, kterým je asteroid, bude pohybovat po hyperbole v gravitačním poli Země, proto si o tomto typu trajektorie povíme trochu více.

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

- Podobně jako u elipsy definujeme i u hyperboly veličiny *hlavní poloosa* a, *vedlejší poloosa* b, *délková výstřednost* $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ a *číselnou výstřednost* $\epsilon = e/a = \sqrt{1 + b^2/a^2}$.
- Hyperbola má též dvě ohniska, která zde budeme značit M a F. Zatímco v M se nachází centrum gravitačního pole, ohnisko F je prázdné.
- Hyperbola není tvořena z jedné, ale rovnou ze dvou křivek, tzv. větví hyperboly. Testovací částice se bude pohybovat jen po jedné z nich a to té, která je blíže ohnisku M. Viz obr. 4.
- Hyperbola má dvě asymptoty - přímky, ke kterým se větve hyperboly blíží, jak odcházíme dál od jejich průsečíku. Testovací částice přilétá po vstupní asymptotě (v obrázku $\text{Asymptota}_{\text{in}}$) a odlétá po výstupní asymptotě (v obrázku $\text{Asymptota}_{\text{out}}$).



Obrázek 4: Hyperbola (obě větve, jen jedna z nich je trajektorií), asymptoty a ohniska (jen v M je soustředěná hmotnost).

Definujeme ještě jeden parametr, tzv *impaktní parametr*, značí se b_∞, který udává vzdálenost mezi vstupní asymptotou a její rovnoběžkou, která prochází centrem gravitačního pole, viz obr. 5.

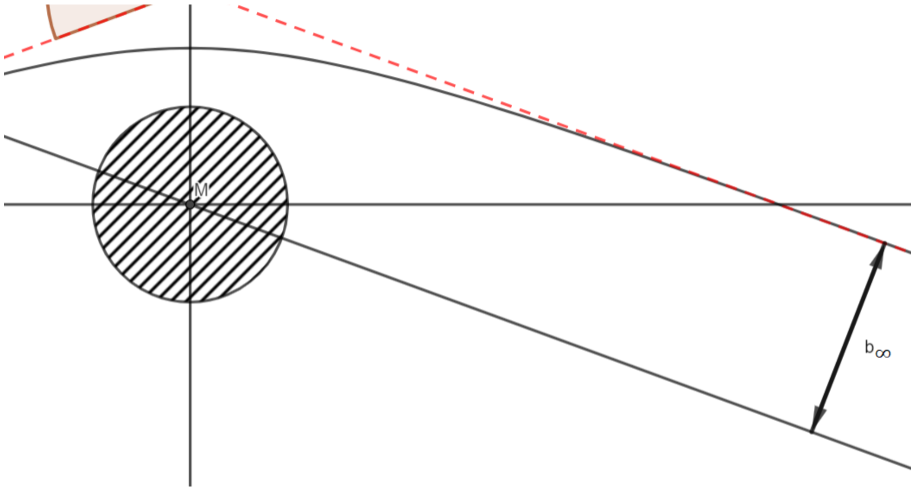
Bude se vám hodit znát vztah mezi energií $E > 0$ a hlavní poloosou a hyperboly

$$E = \frac{GMm}{2a}\,.$$

Energie není jediná veličina, která se při pohybu testovací částice zachovává. V této úloze budete pracovat s další takovou veličinou a to *momentem hybnosti* částice, jehož velikost je

$$L = mvr_\perp\,,$$

kde m je hmotnost testovací částice, v je velikost její okamžité rychlosti a $r_\perp$ je vzdálenost mezi přímkou, na které se nachází vektor rychlosti, a její rovnoběžkou, která prochází centrem gravitačního



Obrázek 5: Impaktní parametr

pole. Například, pokud se nachází částice v nekonečnu, je $r_\perp = b_\infty$. Moment hybnosti takové částice je potom

$$L = m v_\infty b_\infty \,.$$

Nyní už je na řadě zadání. Podúkoly jsou následující.

a) Asteroid přilétá po vstupní asymptotě s rychlostí $\mathbf{v}_{\mathrm{in}}$, jejíž velikost budeme značit v_∞. Určete, jak závisí hlavní poloosa a na gravitační konstantě G, hmotnosti Země M a v_∞.

Jak víme podle úvodu, hlavní poloosa a energie spolu souvisí podle

$$E = \frac{GMm}{2a} \,.$$

Protože $E = E_{\mathrm{kin},\infty} = \frac{1}{2} m v_\infty^2$, snadno dostaneme

$$a = \frac{GM}{v_\infty^2} \,.$$

b) Určete, na jakou nejbližší vzdálenost k centru Země b_c se asteroid dostane. Výsledek uveďte v závislosti na hlavní poloose a a impaktním parametru b_∞.

Vyjdeme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_\mathrm{c}^2 - \frac{GMm}{b_\mathrm{c}}$$

a momentu hybnosti

$$m b_\infty v_\infty = m b_\mathrm{c} v_\mathrm{c} \,,$$

kde index c značí, že jde o nejbližší přiblížení (*closest*). Jak obrázek 4 naznačuje, v okamžiku nejbližšího přiblížení jsou vektory průvodiče a rychlosti na sebe kolmé. Vzájemnou kombinací rovnic a řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$b_\mathrm{c} = -a + \sqrt{a^2 + b_\infty^2} \,.$$

c) Jestliže je vzdálenost asteroidu k centru Země v momentě největšího přiblížení rovna vzdálenosti R Měsíce od centra Země, najděte odpovídající b_∞. Výsledek uveďte v závislosti na a a R.

Podmínka zní

$$b_\mathrm{c} = R\,,$$

a pro impaktní parametr to znamená

$$b_\infty = R\sqrt{1 + 2\frac{a}{R}}\,.$$

d) Určete, jak závisí číselná výstřednost kuželosečky na hlavní poloose a a impaktním parametru b_∞.
Nápověda: Excentricita trajektorie částice o energii E a momentu hybnosti L je dána vztahem

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{G^2M^2m^3}}\,,$$

kde m je hmotnost testovací částice, M je hmotnost centrálního tělesa a G je gravitační konstanta.

Energie a moment hybnosti jsou

$$E = \frac{GMm}{2a}\,, \quad L = mb_\infty v_\infty\,,$$

přitom už víme

$$v_\infty^2 = \frac{GM}{a}.$$

Dosazením za E a L do rovnice v nápovědě dostaneme

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b_\infty^2}{a^2}}\,.$$

e) Určete, jak závisí vedlejší poloosa b trajektorie tělesa na v_∞, b_∞, G a M. Výsledek nemusí záviset nutně na všech zmíněných veličinách.

Numerická excentricita hyperboly závisí na hlavní a vedlejší poloose podle

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Dříve jsme odvodili, že

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{b_\infty^2}{a^2}},$$

proto $b = b_\infty$.

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

f) Částice přilétá z nekonečna po vstupní asymptotě a odlétá do nekonečna po výstupní asymptotě. Vstupní a výstupní směr spolu svírají úhel Δ (úhel deflexe). Určete $\tan\frac{\Delta}{2}$ v závislosti na a a b_∞.

Z obrázků v úvodu lze vyčíst, že Δ závisí na b/a podle

$$\tan\frac{\Delta}{2} = \frac{a}{b_\infty}\,.$$

g) Určete, jak úhel Δ závisí na G, M, R a v_∞. Krom obecného vzorce ukažte i tvar zjednodušeného vzorce, který je dobře platný za splnění podmínky $GM/Rv_\infty^2 \ll 1$.

Nápověda: Funkci $\tan x$ lze rozvinou do nekonečně řady, jejímiž prvními členy jsou

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots\,,$$

přitom za tečkami se skrývají členy s mocninami 7, 9, 11, 13 atd.

Stačí dosadit do předchozího výsledku za a a b_∞

$$\tan\frac{\Delta}{2} = \frac{GM}{Rv_\infty^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{GM}{Rv_\infty^2}}},$$

z čehož plyne

$$\Delta = 2\arctan\left(\frac{GM}{Rv_\infty^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{GM}{Rv_\infty^2}}}\right)\,. \tag{4}$$

Pokud platí

$$\frac{GM}{Rv_\infty^2} \ll 1,$$

je úhel Δ malý a předchozí rovnice se zjednoduší do tvaru

$$\Delta \simeq \frac{2GM}{Rv_\infty^2}\,. \tag{5}$$

h) Najděte hodnotu úhlu Δ číselně pro $M = 5{,}974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $v_\infty = 10\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$, $R = 3{,}84\cdot 10^5\,\mathrm{km}$, $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$. Použijte obecný i zjednodušený tvar vzorce pro Δ z předchozího bodu.

Po dosazení do přesného vzorce (4) dostaneme $\Delta = 1{,}177°$. Dodejme, že

$$\frac{GM}{Rv_\infty^2} = 0{,}010\,4.$$

Je tedy dobře splněn předpoklad přibližného vzorce (5), který dává výsledek $\Delta = 1{,}189°$.