

**Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení  
Analýza dat****Úlohy****G Měření vzdálenosti supernovy 1987A***(max. 20 bodů)*

23. února 1987 bylo možné na obloze okem pozorovat supernovu 1987A. Tato naprosto unikátní událost nám umožní spočítat vzdálenost k Velkému Magellanovu mračnu, ve kterém k výbuchu došlo. Supernova je obklopena 3 prstenci. Nás bude zajímat pouze menší vnitřní prstenec, k jehož formaci došlo dříve než při výbuchu. Díky ultrafialovému záření ze supernovy začal prstenec po výbuchu jasně zářit.

a) V obrázku 1 vidíte hvězdy v okolí supernovy. Vzdálenost hvězd 1 a 2 je  $3,0''$ , 1 a 3  $1,4''$ , 2 a 3  $4,3''$ . Určete úhlový průměr  $\delta$  menšího jasněho prstence kolem hvězdy 1 podél hlavní poloosy. Nezapomeňte uvést přepočítání z cm na  $''$  (měřítko).

Je třeba určit poměr mezi úhlovou vzdáleností na obloze a vzdáleností na papíře pro všechny 3 dvojice hvězd. Průměrnou hodnotu pak použijeme k přepočtu velikosti prstence na papíře, měřené podél hlavní poloosy elipsy, na úhlovou velikost na obloze. Vyjde nám  $\delta \doteq 7,76 \cdot 10^{-6}$  rad.

b) Ve skutečnosti je elipsa prstence kruh natočený o úhel  $i$  od roviny kolmé ke spojnici pozorovatele a hvězdy. Určete proto ještě úhlový průměr  $\beta$  prstence hvězdy 1 podél malé poloosy, abyste mohli určit inklinaci  $i$ .

Stejným způsobem jako v předchozí úloze můžeme změřit i úhlový průměr prstence podél malé poloosy  $\beta \doteq 5,76 \cdot 10^{-6}$  rad. Inklinace pak bude

$$i = \arccos \frac{\beta}{\delta} \doteq 0,733 \text{ rad.}$$

c) Po výbuchu supernovy bylo pozorováno záření, jehož světelná křivka je v obrázku 2. Přestože se celý prstenec rozzářil ve stejný okamžik, vlivem konečné rychlosti světla se k nám signál z různých částí prstence dostal v různou dobu. Nejprve bylo pozorované záření z k Zemi nejbližší části prstence; světelná křivka dosáhla maxima, když k nám doputovalo světlo z nejbližší části a svítil celý prstenec. Spočítejte skutečný průměr prstence  $D$ .

Mezi rozsvícením nejbližší a nejvzdálenější části prstence uběhlo přibližně  $t = 325$  d. Průměr prstence bude

$$D = \frac{ct}{\sin i} \doteq 0,408 \text{ pc,}$$

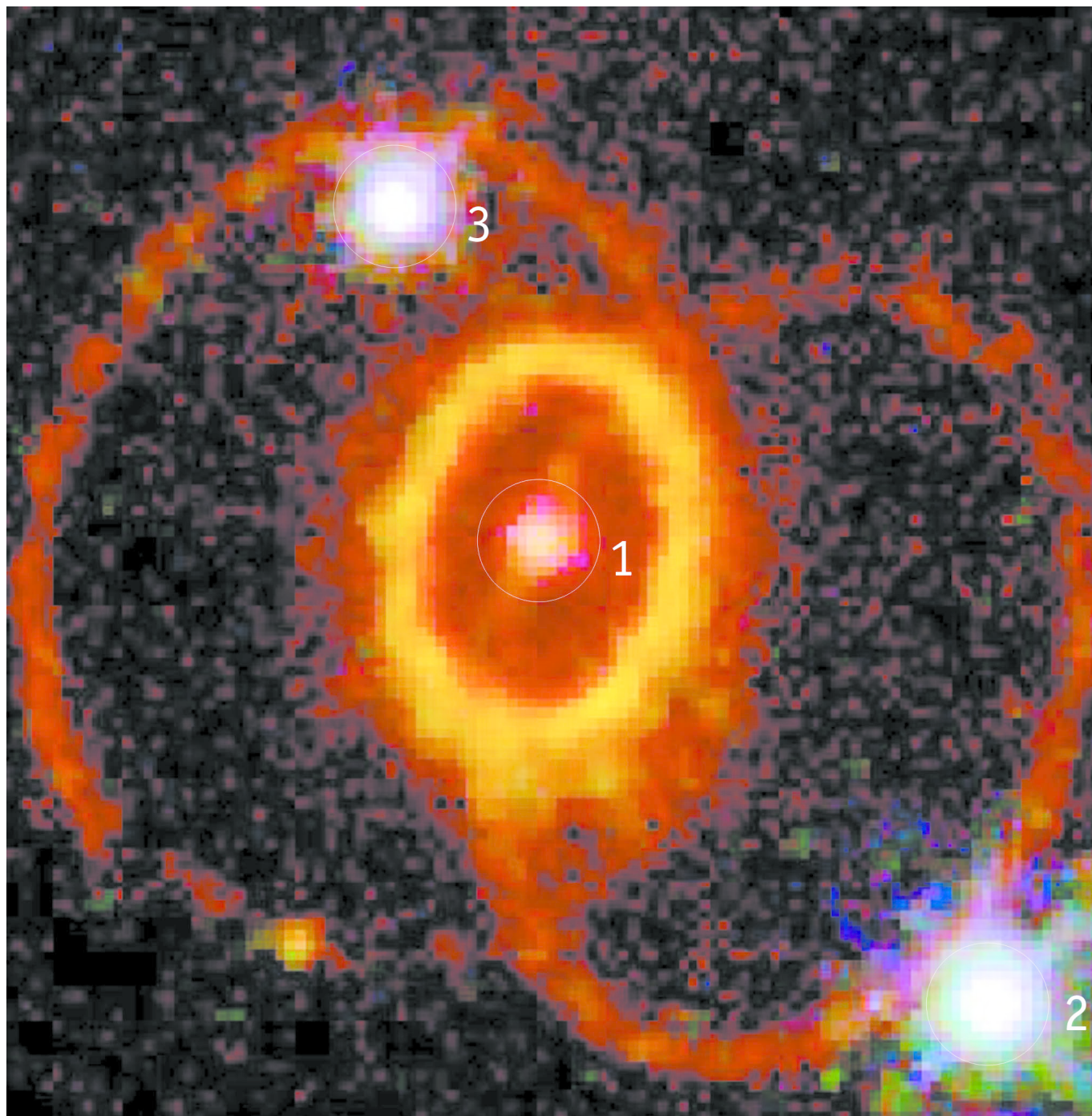
kde  $c$  je rychlost světla.

d) Z předchozích výsledků určete vzdálenost k supernově  $d$ .

Vzdálenost k supernově je

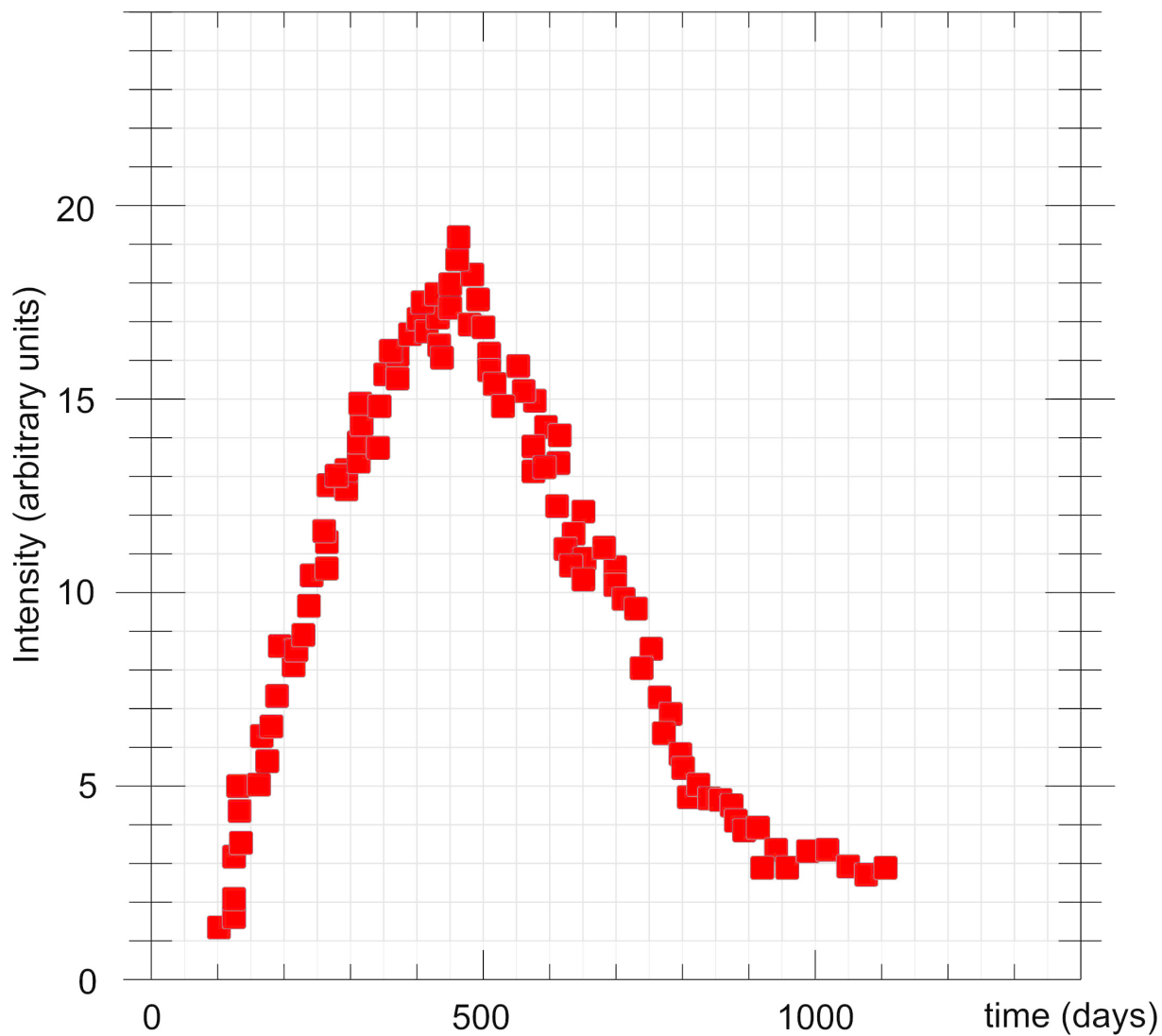
$$d = \frac{D}{\tan \delta} \approx \frac{D}{\delta} \doteq 52,5 \text{ kpc.}$$

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Hvězdy v okolí supernovy 1987A. Zdroj: ESO

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



**Obrázek 2:** Světelná křivka prstence kolem supernovy 1987A. Zdroj: ESO

**Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**
**Tabulka 1:** Hvězdy do 7,50 vizuální hvězdné velikosti z jedné oblasti oblohy.<sup>1</sup>

1	2	3	4	5	6
#	HIP číslo	$B$ (mag)	$V$ (mag)	$\pi$ (mas)	spektrální typ
1	76267	2,22	2,24	43,46	A1
2	75695	3,97	3,68	29,17	F2
3	76952 A	4,01	4,05	22,33	A0
4	78159	5,36	4,13	13,49	K2
5	76127 A	4,14	4,30	8,69	B6
6	77512	5,43	4,63	19,50	G5
7	78493	4,92	4,97	8,77	A0
8	77048	6,65	5,58	12,60	G9
9	75312 A	6,12	5,58	55,98	G2
10	75674	7,64	6,02	3,53	M1
11	77397	7,90	6,39	3,94	K5
12	75919	6,64	6,45	5,37	A4
13	76456	6,86	6,46	28,30	F5
14	78429	7,69	6,60	7,45	K0
15	76944	8,09	6,71	4,99	K2
16	78431	8,26	7,06	4,02	K0
17	78709	7,87	7,10	46,23	G8
18	78288	8,25	7,11	6,10	K2
19	76610	7,45	7,21	9,72	A3
20	76993	7,71	7,26	14,42	F8
21	78260	8,90	7,34	3,11	K5
22	77721	8,85	7,36	3,00	K5
23	77373	7,89	7,43	11,01	F6
24	75583	8,83	7,47	2,60	K3

## H Barevný exces

(max. 20 bodů)

V tabulce 1 naleznete data o 24 hvězdách nacházejících se ve stejné oblasti oblohy. Druhý sloupec obsahuje číslo hvězdy v katalogu Hipparcos, třetí a čtvrtý sloupec tabulky obsahují hvězdné velikosti v  $B$  a  $V$  filtru pozorované ze Země, pátý sloupec je paralaxa  $\pi$  v úhlových milivteřinách (mas) a šestý sloupec je spektrální typ hvězdy. Tabulka 2 pak obsahuje souřadnice sedmi nejjasnějších z nich.

Světlo kratších vlnových délek se rozptyluje na mezihvězdném prachu více než světlo delších vlnových délek. Tím pádem při letu světla od hvězdy k Zemi je relativní pokles intenzity v modré části světla vyšší než relativní pokles intenzity v červené části spektra, dochází k tzv. červenání hvězd. To může být vyjádřeno takzvaným barevným excesem  $E(B - V)$ , na nějž se v této úloze podíváme.

<sup>1</sup>Data pocházejí z hvězdného katalogu SIMBAD: <http://simbad.cds.unistra.fr/simbad/sim-fbasic>

<sup>2</sup>Souřadnice hvězd pocházejí z programu *Stellarium*.

<sup>3</sup>Hodnoty pocházejí z knihy B. W. Carroll, D. A. Ostlie: *An Introduction to Modern Astrophysics*, Cambridge University Press (2017), Appendix G



## Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

**Tabulka 2:** Souřadnice sedmi nejjasnějších hvězd.<sup>2</sup>

#	Bayerovo značení	HIP číslo	rektascenze	deklinace	$V$ (mag)
1	$\alpha$	76267	15h 35m 41s	26°38'	2,24
2	$\beta$	75695	15h 28m 48s	29°01'	3,68
3	$\gamma$	76952 A	15h 43m 44s	26°13'	4,05
4	$\epsilon$	78159	15h 58m 33s	26°48'	4,13
5	$\theta$	76127 A	15h 33m 53s	31°17'	4,30
6	$\delta$	77512	15h 50m 34s	26°00'	4,63
7	$\iota$	78493	16h 02m 23s	29°47'	4,97

a) Do připravené souřadnicové soustavy (obrázek 3) zanešte hvězdy z tabulky 2. Hvězdy znázorněte jako kotoučky tak, aby větší kotouček znamenal jasnější hvězdu ve filtru  $V$ . Nezapomeňte uvést vztah, podle kterého jste přepočítali hvězdnou velikost na průměr/poloměr kotoučku a také v mapě nakreslete měřítko hvězdných velikostí. Ze kterého souhvězdí hvězdy pocházejí? Uveďte český název souhvězdí i jeho třípísmennou IAU zkratku.

Mapu se zakreslenými hvězdami si můžete prohlédnout na obrázku 4. Kotoučky znázorňující hvězdy mají průměr

$$d = 8 - V,$$

kde  $d$  je průměr kotoučku v milimetrech a  $V$  je hvězdná velikost ve filtru  $V$  naměřená na Zemi. V mapě jsme taktéž znázornili vizuální měřítko pro odhady hvězdných velikostí.

Jedná se o souhvězdí Severní koruna s třípísmennou zkratkou CrB.

b) Pro všechny hvězdy z tabulky 1 spočítejte jejich vzdálenost od Země v parsecích.

Mezi paralaxou  $\pi$  v úhlových vteřinách a vzdáleností v parsecích je vztah

$$d = \frac{1}{\pi}.$$

Musíme si dát pouze pozor, že v pátém sloupci tabulky 1 je paralaxa uvedena v milivteřinách, čili v tisícinách úhlové vteřiny, tudíž musíme číslo z tabulky vydělit 1 000, abychom dostali paralaxu  $\pi$  ve vteřinách.

Vzdálenosti jednotlivých hvězd najdete v šestém sloupci v tabulce 4.

c) Spočítejte pro každou hvězdu z tabulky 1 její barevný index  $B - V$  pozorovaný na Zemi.

Barevný index  $B - V$  spočítáme tak, že v tabulce 1 odečteme hodnoty ze sloupce  $V$  od sloupce  $B$ .

Barevné indexy  $B - V$  pro našich 24 hvězd najdete v sedmém sloupci tabulky 4.

d) Spočítejte absolutní hvězdné velikosti  $M_V$  ve vizuálním filtru  $V$  pro hvězdy z tabulky 1. Na základě dat z tabulky 3 rozhodněte, do které třídy svítivosti která hvězda patří. Pokud některé z hvězd leží svojí absolutní hvězdnou velikostí v polovině mezi třídami I a III nebo III a V a nelze je tudíž jednoznačně zařadit do jedné ze tříd, poznačte to. Tyto hvězdy můžete vyřadit z další analýzy.



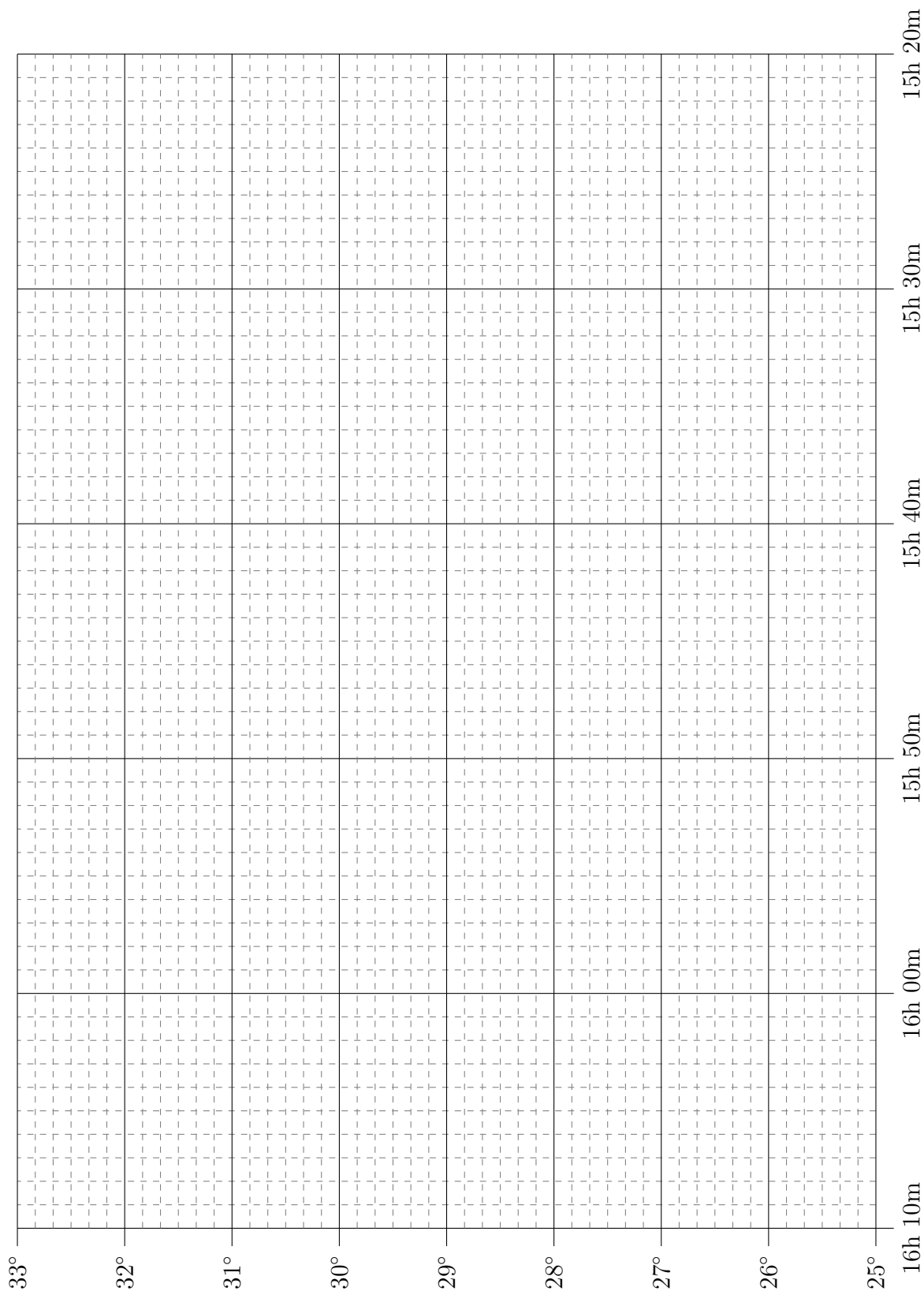
## Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

**Tabulka 3:** Absolutní hvězdná velikost a barevný index hvězd různých tříd svítivosti. <sup>3</sup>

spektrální typ	třída svítivosti V		třída svítivosti III		třída svítivosti I	
	$M_V$	$(B - V)_0$	$M_V$	$(B - V)_0$	$M_V$	$(B - V)_0$
O5	-5,1	-0,33	-5,9	-0,32	-6,5	-0,31
O6	-5,1	-0,33	-5,7	-0,32	-6,5	-0,31
O7	-4,9	-0,32	-5,6	-0,32	-6,6	-0,31
O8	-4,6	-0,32	-5,5	-0,31	-6,6	-0,29
B0	-3,4	-0,30	-4,7	-0,29	-6,9	-0,23
B1	-2,6	-0,26	-4,1	-0,26	-6,9	-0,19
B2	-1,6	-0,24	-3,4	-0,24	-6,7	-0,17
B3	-1,3	-0,20	-3,2	-0,20	-6,7	-0,13
B5	-0,5	-0,17	-2,3	-0,17	-6,6	-0,10
B6	-0,1	-0,15	-1,8	-0,15	-6,4	-0,08
B7	0,3	-0,13	-1,4	-0,13	-6,3	-0,05
B8	0,6	-0,11	-1,0	-0,11	-6,3	-0,03
B9	0,8	-0,07	-0,6	-0,07	-6,3	-0,02
A0	1,1	-0,02	-0,4	-0,03	-6,3	-0,01
A1	1,3	0,01	-0,2	0,01	-6,3	0,02
A2	1,5	0,05	-0,1	0,05	-6,3	0,03
A5	2,2	0,15	0,6	0,15	-6,3	0,09
A8	2,7	0,25	1,0	0,25	-6,4	0,14
F0	3,0	0,30	1,3	0,30	-6,4	0,17
F2	3,4	0,35	1,4	0,35	-6,4	0,23
F5	3,9	0,44	1,5	0,43	-6,4	0,32
F8	4,3	0,52	-	-	-6,4	0,56
G0	4,7	0,58	1,3	0,65	-6,3	0,76
G2	4,9	0,63	1,3	0,77	-6,3	0,87
G8	5,6	0,74	1,0	0,94	-6,1	1,15
K0	5,7	0,81	1,0	1,00	-6,1	1,24
K1	6,0	0,86	0,9	1,07	-6,0	1,30
K3	6,5	0,96	0,8	1,27	-5,9	1,46
K4	6,7	1,05	0,8	1,38	-5,8	1,53
K5	7,1	1,15	0,7	1,50	-5,7	1,60
K7	7,8	1,33	0,4	1,53	-5,6	1,63
M0	8,9	1,40	0,0	1,56	-5,8	1,67
M1	9,6	1,46	-0,2	1,58	-5,8	1,69
M2	10,4	1,49	-0,4	1,60	-5,8	1,71
M3	11,1	1,51	-0,4	1,61	-5,5	1,69
M4	11,9	1,54	-0,4	1,62	-5,2	1,76
M5	12,8	1,64	-0,4	1,63	-4,8	1,80
M6	13,8	1,73	-0,4	1,52	-	-
M7	14,7	1,80	-	-	-	-



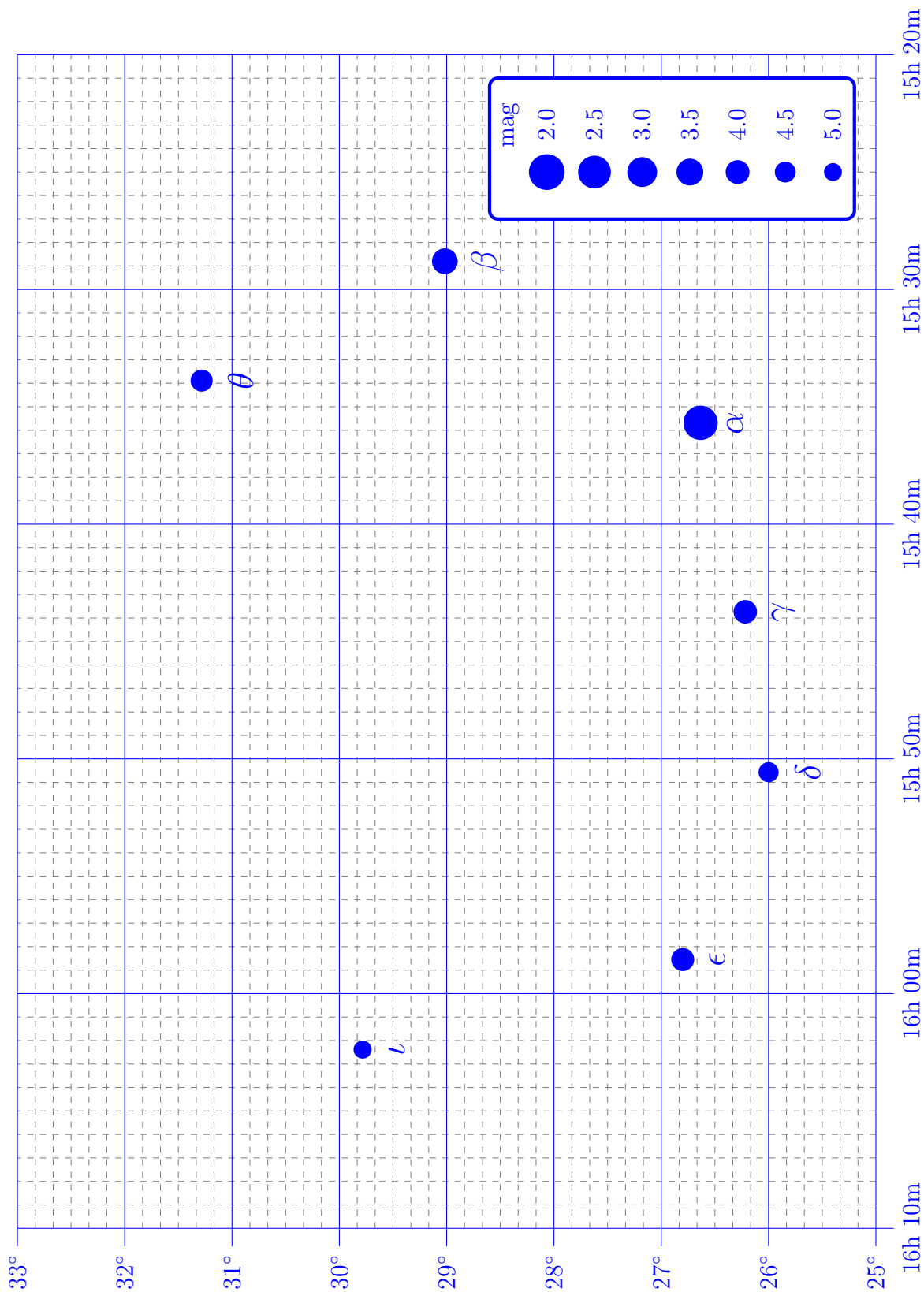
Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Mapka pro zakreslení hvězd.



Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Mapka se zakreslenými hvězdami a měřítkem.





## Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Absolutní hvězdnou velikost spočítáme jako

$$M_V = V + 5 - 5 \log d = V + 5 + 5 \log \pi,$$

kde  $d$  je vzdálenost hvězdy v parsecích a  $\pi$  je paralaxa v úhlových vteřinách. Číselné výsledky si můžete prohlédnout v osmém sloupci v tabulce 4.

Podle absolutní hvězdné velikosti  $M_V$  a podle spektrálního typu můžeme s pomocí tabulky 3 určit třídu svítivosti hvězd. Nemusíme uvažovat mezihvězdnou extinkci, neboť rozdíly v absolutních hvězdných velikostech mezi třídami jsou v řádu jednotek magnitud, zatímco na vzdálenostech desítek a nižších stovek parseků (všechny naše hvězdy) bude mezihvězdná extinkce maximálně v řádu desetin magnitudy.

Odhadnuté třídy svítivosti jsou napsané v devátém sloupci v tabulce 4. Tam, kde hodnota  $M_V$  ležela přibližně v polovině mezi dvěma luminozitními třídami, jsme do devátého sloupečku napsali obě luminozitní třídy (hvězdy 1, 5 a 23).

e) Spočítejte barevný exces  $E(B - V) = (B - V)_{\text{pozorovaný}} - (B - V)_0$  pro hvězdy z tabulky 1. Tam, kde chybí v tabulce 3 barevný index  $(B - V)_0$  pro některý spektrální typ, interpolujte pomocí čísel z okolních řádků.

V desátém sloupci v tabulce 4 jsme z tabulky 3 opsali očekávané hodnoty barevného indexu  $(B - V)_0$  podle spektrálního typu a třídy svítivosti. Tam, kde se v tabulce 3 nevyskytoval řádek pro konkrétní spektrální typ, tam jsme index interpolovali z okolních řádků. Například pro spektrální typ G5 luminozitní třídy III, který v tabulce 3 chybí, jsme z okolních hodnot pro typy G2 ( $(B - V)_0 = 0,77$ ) a G8 ( $(B - V)_0 = 0,94$ ) interpolovali index jako  $(B - V)_0 = 0,85$ .

Odečtením sloupce 10 od sloupce 7 získáme barevný exces  $E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0$ , jehož hodnoty jsou napsané ve sloupci 11 v tabulce 4.

f) Nechť koeficient mezihvězdné extinkce ve filtru  $B$  je  $A_B$  a koeficient mezihvězdné extinkce ve filtru  $V$  je  $A_V$  (jednotka koeficientu mezihvězdné extinkce je  $\text{mag} \cdot \text{kpc}^{-1}$ ). Odvoďte vztah, jak barevný exces  $E(B - V)$  závisí na vzdálenosti pozorovatele od hvězdy.

Nechť absolutní hvězdné velikosti hvězdy ve filtrech  $B$  a  $V$  jsou  $B_0$  a  $V_0$ . Barevný index takové hvězdy je  $(B - V)_0 = B_0 - V_0$ . Mezihvězdná extinkce snižuje jasnost pozorovanou na Zemi ještě více, než by odpovídalo prostému poklesu intenzity světla se čtvercem vzdálenosti. Pozorované hvězdné velikosti ve filtrech  $B$  a  $V$  budou

$$B = B_0 - 5 + 5 \log d + A_B d,$$

$$V = V_0 - 5 + 5 \log d + A_V d.$$

Odečtením rovnic od sebe získáme výraz

$$B - V = B_0 - V_0 + (A_B - A_V)d = (B - V)_0 + (A_B - A_V)d,$$

odkud můžeme vyjádřit závislost barevného excesu na vzdálenosti  $d$

$$E(B - V) = (B - V) - (B - V)_0 = (A_B - A_V)d.$$

Vidíme, že barevný exces  $E(B - V)$  roste lineárně se vzdáleností  $d$ . Jak jsme si řekli na začátku zadání úlohy, kratší vlnové délky se při průletu vesmírem rozptylují více, takže musí platit  $A_B > A_V$ .

**Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**
**Tabulka 4: Výsledky podúloh b)-e).**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
#	$B$ (mag)	$V$ (mag)	$\pi$ (mas)	typ	$d$ (pc)	$B - V$	$M_V$	třída	$(B - V)_0$	$E(B - V)$
1	2,22	2,24	43,46	A1	23,01	-0,02	0,43	III, V	0,01	-0,03
2	3,97	3,68	29,17	F2	34,28	0,29	1,00	III	0,35	-0,06
3	4,01	4,05	22,33	A0	44,78	-0,04	0,79	V	-0,02	-0,02
4	5,36	4,13	13,49	K2	74,12	1,23	-0,22	III	1,17	0,06
5	4,14	4,30	8,69	B6	115,1	-0,16	-1,00	III, V	-0,15	-0,01
6	5,43	4,63	19,50	G5	51,29	0,80	1,08	III	0,85	-0,05
7	4,92	4,97	8,77	A0	114,0	-0,05	-0,31	III	-0,03	-0,02
8	6,65	5,58	12,60	G9	79,39	1,07	1,08	III	0,97	0,10
9	6,12	5,58	55,98	G2	17,86	0,55	4,32	V	0,63	-0,08
10	7,64	6,02	3,53	M1	282,9	1,62	-1,24	III	1,58	0,04
11	7,90	6,39	3,94	K5	253,6	1,51	-0,63	III	1,50	0,01
12	6,64	6,45	5,37	A4	186,3	0,19	0,10	III	0,12	0,07
13	6,86	6,46	28,30	F5	35,33	0,40	3,72	V	0,44	-0,04
14	7,69	6,60	7,45	K0	134,3	1,09	0,96	III	1,00	0,09
15	8,09	6,71	4,99	K2	200,3	1,38	0,20	III	1,17	0,21
16	8,26	7,06	4,02	K0	248,7	1,20	0,08	III	1,00	0,20
17	7,87	7,10	46,23	G8	21,63	0,77	5,43	V	0,74	0,03
18	8,25	7,11	6,10	K2	163,9	1,14	1,04	III	1,17	-0,03
19	7,45	7,21	9,72	A3	102,9	0,24	2,15	V	0,08	0,16
20	7,71	7,26	14,42	F8	69,37	0,45	3,05	V	0,52	-0,07
21	8,90	7,34	3,11	K5	321,5	1,56	-0,20	III	1,50	0,06
22	8,85	7,36	3,00	K5	333,0	1,49	-0,25	III	1,50	-0,01
23	7,89	7,43	11,01	F6	90,80	0,46	2,64	III, V	0,46	0,00
24	8,83	7,47	2,60	K3	384,4	1,36	-0,45	III	1,27	0,09



## Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

g) Vynesete do grafu  $E(B - V)$  v závislosti na vzdálenosti hvězdy od Země a proložíte grafem přímkou. Vyčíslete směrnici vaší přímky.

V obrázku 5 jsme vynesli do grafu hodnoty pro 21 hvězd z tabulky 4, u nichž není sporu o luminozitivní třídě. Vyloučili jsme hvězdy na řádcích 1, 5 a 23.

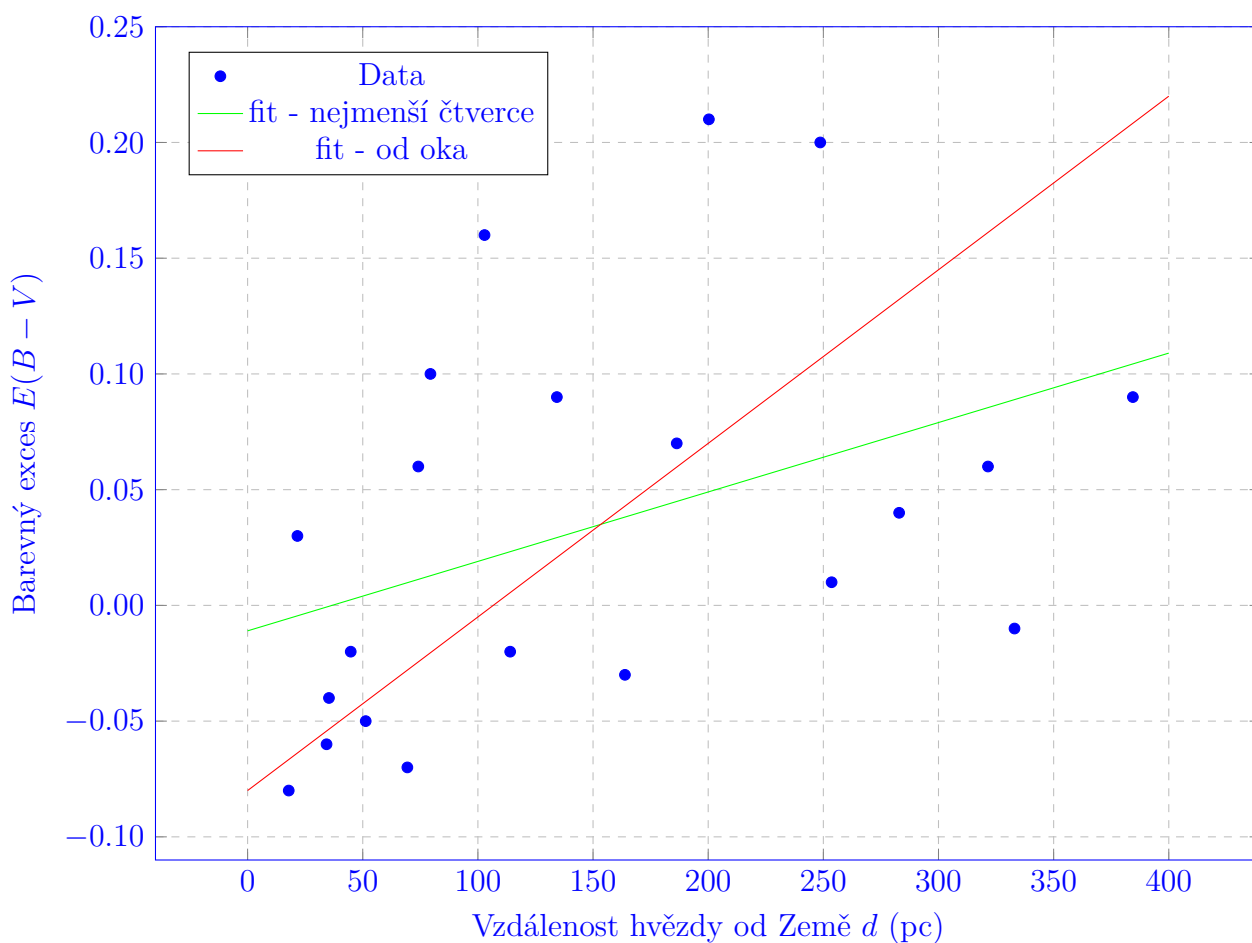
Datové body jsou hodně rozházené, takže je těžké rozhodnout, kudy vést fitovací přímkou. Od oka můžeme proložit například červenou přímkou s rovnicí  $E(B - V) = 7,5 \cdot 10^{-4} \frac{d}{\text{pc}} - 0,08$ . Matematický postup proložení přímky pomocí metody nejmenších čtverců pak vede na zelenou přímkou v obrázku 5 s rovnicí  $E(B - V) = 3,0 \cdot 10^{-4} \frac{d}{\text{pc}} - 1,1 \cdot 10^{-2}$ .

Směrnice přímky je tedy v řádu  $0,1-1 \text{ mag} \cdot \text{kpc}^{-1}$ .

*Poznámka pro opravující: Při bodování se zaměřte na to, jestli účastníci dobře popsali osy grafu a jestli správně odečetli směrnici přímky. Někteří řešitelé také mohli fitovat přímkou procházející počátkem podle odvozené rovnice z podúlohy f). I to je v pořádku. Nehodnoťte, jestli získali „správnou“ hodnotu směrnice. Datové body jsou příliš rozesté. Stačí, když jimi přímkou nějak rozumně prochází.*

Všimněte si, že proložená přímkou neprochází počátkem, ačkoliv podle vztahu odvozeného v podúloze f) by měla. Také pro některé blízké hvězdy jsme dostali záporný barevný exces, což by být nemělo. To naznačuje pravděpodobně nějakou systematickou chybu v datech. Nebo je to možná tím, že jsme sledovali jen 21 hvězd. Jednotlivá měření v astronomii bývají často nepřesná. Závislosti se jasně projeví až na velkých souborech dat.

Finále 2022/23, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 5: Závislost barevného excesu  $E(B - V)$  na vzdálenosti od Země.