Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FYZIKÁLNÍ ÚSTAV V OPAVĚ

Česká astronomická společnost
http://www.astro.cz
http://olympiada.astro.cz

Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **24. 1. 2022** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Vesmírná stanice

(max. 20 bodů)

V závěru filmu Interstellar (2014) se hlavní hrdinové nachází na vesmírné stanici, která zachránila lidstvo před zánikem. Předpokládejme, že stanice má tvar válce o poloměru $r = 100\,\mathrm{m}$ a délce $l = 200\,\mathrm{m}$. Stanice se nachází ve volném prostoru, rotuje podél své osy symetrie, a proto obyvatelé pociťují tíhu stejnou jako na Zemi optimální pro jejich těla.

a) Jakou úhlovou rychlostí ω se musí stanice otáčet, aby její obyvatelé pociťovali stejnou tíhu jako na Zemi? Jaká je perioda T otáčení stanice kolem její osy?

Dostředivé zrychlení se musí rovnat tíhovému zrychlení na Zemi. Píšeme tedy

$$g = \omega^2 r\,,$$

odkud máme

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}\,.$$

Číselně dostáváme $\omega \doteq 0{,}313\,\mathrm{s}^{-1}$. Ze vztahu $\omega = 2\pi/T$ dále získáme vztah pro periodu otáčení

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\,.$$

Číselně máme $T \doteq 20{,}1\,\mathrm{s}$.

Ve filmu jsme mohli vidět děti hrající baseball na hřišti na stanici. Po odpálení míček letěl stanicí a rozbil střešní okno domu, který byl přibližně nad nimi. V následujících částech budeme analyzovat pohyb hmotného bodu v prostoru stanice a pro jednoduchost zanedbáme odpor vzduchu.

b) Jakou rychlostí musí děti odpálit míček (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor), aby z pohledu pozorovatele ve stanici obíhal těsně nad povrchem stanice po kruhové dráze? Jaká je perioda oběhu míčku?

Pohyb míčku je výhodné popisovat vzhledem k inerciální vztažné soustavě (vzdáleným hvězdám). Pokud má míček obíhat ve stanici těsně nad povrchem, tak to lze docílit tím, že míček bude v klidu vzhledem k inerciální vztažné soustavě a stanice se bude pod ním otáčet. Míček je tedy nutné odpálit rychlostí o velikosti obvodové rychlostí přesně proti směru otáčení stanice (tečně k plášti a kolmo k ose válce).

Pro přehlednost si označme složku rychlosti tečnou k plášti, kolmou k ose otáčení a proti obvodové rychlosti jako v_t. Dále si označme složku mířící kolmo k plášti směrem k ose stanice jako v_d. Velikost obvodové rychlosti lze vyjádřit ze vzorce pro dostředivé zrychlení $g = v_\mathrm{o}^2 r$ jako

$$v_\mathrm{o} = \sqrt{gr}\,.$$

Číselně tedy dostáváme $v_\mathrm{o} \doteq 31{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. V naší složkové konvenci tedy můžeme psát

$$v_\mathrm{t} = v_\mathrm{o}\,,$$
$$v_\mathrm{d} = 0\,.$$

V předchozím případě došlo k tomu, že míček se po odpalu opakovaně vracel k hráči, který ho odpálil. Kruhová dráha však není jedinou, po které se míček vrátí k hráči, který ho odpálil. Ve skutečnosti je takových trajektorií nekonečně mnoho a přirozeným parametrem, který je charakterizuje, je čas, za který se vrátí míček na místo svého odpalu.

c) Jakou rychlostí (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor) musí hráč odpálit míček, aby se k němu vrátil za čas $t_1 = \frac{T}{2}$ a $t_2 = \frac{3T}{2}$? Výsledek vyjádřete pomocí r a T.

V obou případech můžeme odpal rozložit na následující části. Nejprve míček zastavíme jako v předchozí části vůči inerciální soustavě. Za $t_1 = \frac{T}{2}$ a $t_2 = \frac{3T}{2}$ bude hráč na protilehlém místě z pohledu inerciální soustavy a míček se musí pohybovat směrem k ose stanice. Míček tam musí dorazit za čas $t_1 = \frac{T}{2}$ nebo $t_2 = \frac{3T}{2}$, proto příslušné rychlosti jsou

$$v_\mathrm{t,1} = v_\mathrm{t,2} = v_\mathrm{o}$$

a

$$v_\mathrm{d,1} = \frac{4r}{T}\,,$$
$$v_\mathrm{d,2} = \frac{4r}{3T}\,.$$

d) Jakou rychlostí (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor) musí hráč odpálit míček, aby se k němu vrátil za obecný čas t?

Míček si opět pomyslně zastavíme vůči inerciální soustavě a pak ho namíříme do bodu, do kterého se pootočí odpalovač. Odpalovač se pootočí o úhel ωt a nachází se ve vzdálenosti d od místa odpalu. Souřadnice míčku jsou

$$x = r\sin\omega t\,,$$
$$y = r - r\cos\omega t\,.$$

Dostředivá složka rychlosti je tedy

$$v_\mathrm{d} = \frac{y}{t} = \frac{r - r\cos\omega t}{t}\,.$$

V případě tečné složky musíme započítat i zastavení míčku. Dostáváme tedy

$$v_\mathrm{t} = v_\mathrm{o} - \frac{x}{t} = v_\mathrm{o} - \frac{r \sin \omega t}{t} \,.$$

Po dosazení za úhlovou a obvodovou rychlost získáme

$$v_\mathrm{d} = \frac{r}{t}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right)\right] \,,$$

$$v_\mathrm{t} = \sqrt{gr} - \frac{r}{t}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{r}}t\right) \,.$$

e) Kosmonaut ve stanici se vydal z jejího obvodu po žebříku k ose stanice zkontrolovat osvětlení. Jakou práci vykonal, pokud váží 75 kg?

Pokud známe graf závislosti síly na poloze, pak práce je plocha pod křivkou v tomto grafu. Kosmonaut šplhající po žebříku má konstantní úhlovou rychlost a odstředivá síla je úměrná jeho vzdálenosti od osy stanice. Z toho vyplývá, že práce vykonaná kosmonautem se vypočte jako obsah pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém jedna odvěsna odpovídá poloměru stanice a druhá odvěsna maximální síle působící na kosmonauta. Máme tedy

$$W = \frac{1}{2} m_\mathrm{k} g r \,,$$

kde m_k je hmotnost kosmonauta. Po dosazení vyjde práce 36,8 kJ.

Nyní se zamysleme nad problematikou roztáčení stanice. Pokud stanice obíhá poblíž Slunce, tak může mít dostatek elektrické energie ze solárních článků. S hmotou samotnou však musí šetřit. Proto se nabízí použít pro pohon iontové motory, které mají vysokou rychlost vytékajícího paliva. Předpokládejme, že iontové motory budoucnosti urychlují jednou ionizované atomy xenonu (o relativní atomové hmotnosti $A_\mathrm{r} = 131$) v elektrickém poli o napětí 10 kV. Iontový motor si můžete představit jako deskový kondenzátor, kde u kladné elektrody dochází k ionizaci xenonu, ten je urychlen k záporné elektrodě, která je vyrobena z tenkých drátů, takže ionty mohou proletět za ni a pak se pohybují volně. (Ve skutečnosti je nutné odlétající ionty neutralizovat elektrony, ale procesy vně kondenzátoru zanedbáme.) Hmotnostní průtok xenonu z motoru je $10\,\mathrm{mg \cdot s^{-1}}$.

f) Jaká je rychlost atomů xenonu vylétajících z iontového motoru?

Rychlost vylétajících atomů určíme za zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}\mu A_\mathrm{r} v^2 = Ue \,,$$

kde pravá strana vyjadřuje práci elektrické síly, μ je atomová hmotností konstanta a A_r je relativní atomová hmotnost xenonu. Rychlost je potom

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{\mu A_\mathrm{r}}}$$

Po dosazení vyjde $v \doteq 121\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

g) Jak velká je tahová síla iontového motoru?

Z druhého Newtonova pohybového zákona vyplývá, že

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = Qv$$

kde Q je hmotnostní průtok paliva. Po dosazení vyjde síla $F \doteq 1{,}21\,\mathrm{N}$.

K roztočení stanice je použito 200 dvojic iontových motorů umístěných na obvodu stanice. Motory v každé dvojici jsou přitom umístěny na protilehlých místech obvodu stanice a spaliny z nich míří tečně k plášti válce, kolmo k ose válce a vzájemně do opačných směrů. Pro následující výpočet předpokládejte, že hmotnost stanice $M = 200\,000\,\mathrm{t}$ je soustředěna zejména na plášti stanice, a že hmotnost paliva m potřebná pro roztočení stanice je zanedbatelná vůči hmotnosti stanice.

h) Jak dlouho se stanice bude roztáčet než dosáhne rychlosti rotace v první části tohoto příkladu?

Jestliže je většina hmoty soustředěna na plášti stanice, pak můžeme roztáčení stanice popsat vztahy pro přímočarý pohyb a nemusíme užívat momentu síly a momentu setrvačnosti. Pokud označíme F tahovou sílu jednoho motoru, pak zrychlení obvodu stanice je

$$a = \frac{400F}{M}\,.$$

Dobu roztáčení stanice tak lze tedy vyjádřit jako

$$t = \frac{Mv_\mathrm{o}}{400F}\,.$$

Po dosazení vyjde čas $t = 1{,}29 \cdot 10^7\,\mathrm{s}$, což odpovídá 0,41 roku.

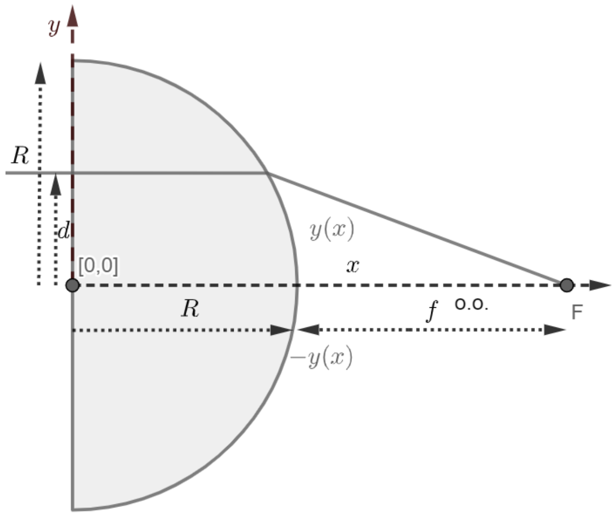
C Kulová vada

(max. 10 bodů)

Se jménem Galileo Galilei je neodmyslitelně spjatý vynález dalekohledu, přesněji jeho vylepšení. 8. ledna 2022 tomu bude přesně 380 let, kdy tento velikán kráčel po Zemi naposledy, a při příležitosti tohoto výročí budeme studovat tzv. *kulovou vadu*. Tato vada je přítomná u optických čoček, a proto se v principu objevuje i u čočkových dalekohledů. Projevuje se tím, že čočka má více ohnisek.[1] Vada je způsobená tím, že optická rozhraní optických čoček jsou kulové plochy (části sféry), což dává vadě své jméno. **Neomezujeme se na *paraxiální aproximaci***, tj. zajímáme se o paprsky jdoucí nejenom v těsném okolí optické osy. Ve skutečnosti se podobná vada objevuje i u jiných optických rozhraní, jak se v úloze sami přesvědčíte.

Budeme se nejprve zabývat čočkami podle obrázku 1: čočka má dvě hladká optická rozhraní, první z nich je rovinný disk o poloměru R, druhé je hladká vypuklá plocha, která nenarušuje spojitou rotační symetrii čočky, například část sféry, paraboloidu, apod. Budeme uvažovat paprsky dopadající kolmo

[1] Přitom tato vada nemá souvislost se barvou světla: i pro světlo jedné vlnové délky bude existovat více ohnisek.



Obrázek 1: Schéma lomu světla na čočce s rotační symetrií: příčný řez.

na rovinné rozhraní a bude nás zajímat, jak se při průchodu čočkou lomí. Díky symetrii čočky se problém zjednodušuje na popis šíření a lomu paprsků v libovolné rovině, která obsahuje celou osu symetrie. Tato rovina je příčným řezem čočky a schématicky této rovině odpovídá rovina xy v obrázku 1. Vypuklé rozhraní je popsáno jistou funkcí $y(x)$, jak naznačuje tentýž obrázek.

Definujme optickou osu a ohnisko čočky. Vzdálenost paprsku světla rovnoběžného s osou symetrie čočky od této osy budeme značit d. Pokud takovýto paprsek dopadne kolmo na rovinné rozhraní a následně se na druhém optickém rozhraní lomí, protne osu symetrie v jednom bodě. Díky rotační symetrii protnou všechny paprsky rovnoběžné s osou symetrie, mající stejnou vzdálenost od této osy, stejný bod F na ose symetrie. Pak o ose symetrie můžeme mluvit jako o optické ose (o.o.) a o společném bodu protnutí paprsků F jako o ohnisku. Vzdálenost F od nejbližšího bodu optického rozhraní, ležícího na optické ose/ose symetrie, budeme značit f a budeme o ni mluvit jako o ohniskové vzdálenosti[2]

a) Pokud čočku osvítíme tak, že na celé její rovinné rozhraní dopadají kolmé paprsky, určete vzdálenost f jako funkci d pro obecná R, n a její krajní hodnoty, $f_{\min}, f_{\max}$, je-li druhým optickým rozhraním *polosféra*, s funkcí $y(x)$

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad x \in [0, R]\,.$$

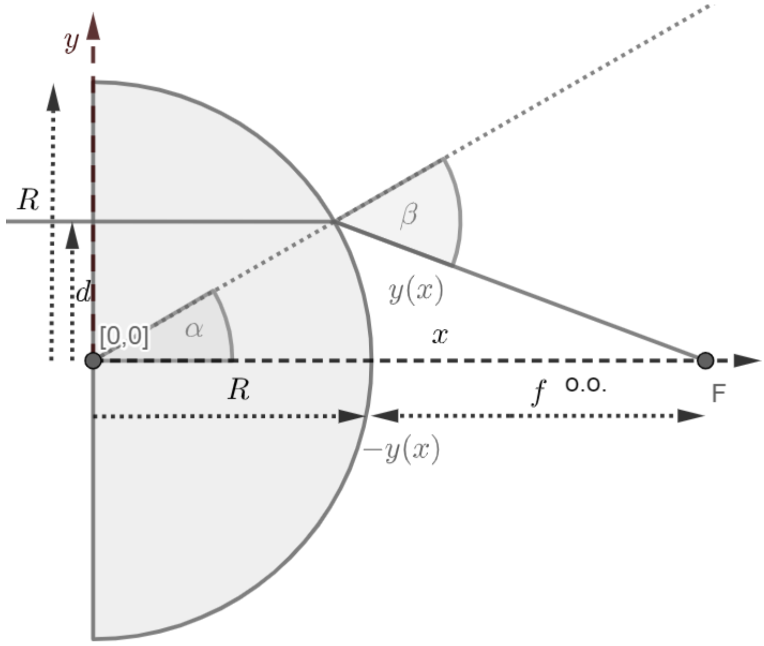
Začneme nakreslením úhlu do již připraveného obrázku přiloženého k zadání, viz 2. Z něho můžeme vyčíst, že bude výhodné použít sinovou větu ve tvaru

$$\frac{R}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{R + f}{\sin(\pi - \beta)}\,.$$

Připojíme-li k tomu Snellův zákon

$$\sin\beta = n \sin\alpha\,,$$

[2] Ve skutečnosti není tato definice zcela správná. Běžně se zavádí ohnisková vzdálenost jako vzdálenost F od *hlavní roviny*, což je koncept, který zde pro zjednodušení zavádět nebudeme.



Obrázek 2: Schéma lomu světla na čočce s rotační symetrií - příčný řez (s vyznačenými úhly α, β)

můžeme předchozí rovnici přepsat jako

$$1 + \frac{f}{R} = \frac{1}{\cos\alpha - \frac{1}{n}\cos\beta}\,.$$

Dále platí

$$\sin\alpha = \frac{d}{R} \in [0,1]$$

a zároveň existuje maximální hodnota úlohu $\alpha_{\max}$, pro kterou je lomený paprsek tečný ke kulovému povrchu, tj. $\beta = \pi/2$. Úhel α tedy musíme volit z intervalu

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \arcsin\frac{1}{n}\,.$$

Protože β je z intervalu $[0, \pi/2]$, můžeme psát

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{d^2}{R^2}}\,, \qquad \cos\beta = \sqrt{1 - n^2\frac{d^2}{R^2}}\,,$$

což nás vede k výsledku

$$f = R\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{d^2}{R^2}} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{d^2}{R^2}}} - 1\right).$$

Vykreslením f jako funkce $x = d/R$ na intervalu $[0, 1/n]$ pro různá n snadno zjistíme, že jde o striktně klesající funkci. Rozeberme si nyní krajní případy

- pro $d/R \to 0$ dostáváme

$$f_{\max} = \frac{R}{n-1}\,.$$

- pro $d/R \to 1/n$ máme

$$f_{\min} = R\Big(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\Big)\,.$$

Nyní čočku z předchozí úlohy nahradíme jinou, která bude mít parabolické rozhraní namísto kulového, popsané funkcí

$$y(x) = \sqrt{R^2 - Rx}\,, \qquad x \in [0, R]\,.$$

b) Určete takový interval hodnot indexu lomu n, aby mohl v čočce ještě nastat totální odraz. Váš výsledek by neměl záviset na parametru R.

Tečna ke grafu funkce $y(x)$ pro $x \in (0, R)$ má směrnici k danou vztahem

$$k = -\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - Rx}}\,.$$

Zároveň pokud definujeme γ jako úhel, který tato tečna svírá s osou x, pak platí

$$k = \operatorname{tg}\gamma\,.$$

Inverzně můžeme psát

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - Rx}}\right) + \pi\,,$$

kde π bylo přidáno proto, aby γ vyšel jako kladný úhel. Protože při totálním odrazu platí $\beta = \pi/2$, máme vztah

$$\alpha = \gamma - \pi/2\,,$$

odkud vyplývá

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{1 - x_{\min}/R} + 1}}\,,$$

kde $x_{\min}$ jsme označili limitní hodnotu horizontální souřadnice bodu, kde paprsek opouští čočku, kdy pro $x \leqslant x_{\min}$ dojde k totálnímu odrazu. Ze Snellova zákona lze zároveň pro totální odraz zároveň psát

$$\sin\beta = n\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1}{1 - x_{\min}/R} + 1}} = 1\,,$$

odkud dostáváme

$$x_{\min} = R\left[1 - \frac{1}{4(n^2 - 1)}\right]\,.$$

Samozřejmě musí platit, že $0 \leqslant x_{\min} \leqslant R$, z čehož dostáváme podmínku

$$n \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Zároveň je zřejmé, že pro fyzikální hodnoty indexu lomu je podmínka $x_{\min}$ splněna vždy. Aby v čočce došlo k totálnímu odrazu, musí tedy hodnota indexu lomu náležet do intervalu $[\sqrt{5}/2, \infty)$.

c) Uvažte, že čočka má n z přechozí podúlohy. Najděte $f_{\min}$ a $f_{\max}$ pro tuto čočku.

K určení $f_{\max}$ a $f_{\min}$ se budeme snažit použít postupů a výsledků z předchozího případu. Skutečně, s použitím výsledku $f_{\max}$ pro kružnici z předchozí úlohy můžeme jednoduše najít $f_{\max}$ pro parabolu. Stačí si jen uvědomit, jak se kružnice a parabola chovají v okolí optické osy. Funkce $y(x)$ kružnice v okolí optické osy, tedy pro $x = R - \epsilon$, kde ϵ je malé, se chová jako

$$y_{\text{kružnice}} = \sqrt{R^2 - (R-\epsilon)^2} = \sqrt{2R\epsilon - \epsilon^2} \approx \sqrt{2R\epsilon}\,.$$

Pro parabolu můžeme provést analogický výpočet

$$y_{\text{parabola}} = \sqrt{R^2 - R(R-\epsilon)} = \sqrt{2R\epsilon - \epsilon^2} = \sqrt{R\epsilon} = \sqrt{2R'\epsilon}\,,$$

kde $R' = R/2$. To chápeme tak, že v těsném okolí optické osy má tato parabola stejný předpis (tedy „chová se jako“) kružnice o poloměru $R/2$. Z toho dostaneme výsledek pro $f_{\max}$ paraboly

$$f_{\max} = \frac{R'}{n-1} = \frac{R}{2(n-1)}\,.$$

$f_{\min}$ lze najít stejně jako u kružnice, tedy nalezením tečny ke křivce, po níž se šíří lomený paprsek (tj. $\beta = \pi/2$). Vzdálenost od místa, kde paprsek vstupuje do rovinného rozhraní čočky k místu, kde protíná optickou osu můžeme rozdělit dvěma různými způsoby a tedy psát

$$R + f_{\min} = x_{\min} + y(x_{\min})\,\mathrm{tg}\,\alpha\,,$$

kde můžeme dosadit

$$y(x_{\min})\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R}{2(n^2-1)}\,.$$

Odtud dostáváme

$$f_{\min} = \frac{R}{4(n^2-1)}\,.$$

Alternativní odvození: Lze najít obecný předpis pro f v závislosti na x

$$f = -\frac{3}{2}R + x + \sqrt{\frac{5}{4}R^2 - Rx}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{4(1-x/R)}}} - \sqrt{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{4(1-x/R)}}}}\,,$$

kde $x \in [R - \frac{R}{4(n^2-1)}, R]$. Tato funkce má minimum v $x_{\min}$ a maximum v $x_{\max}$, přitom funkční hodnoty vyjdou přesně tak, jaké jsme našli předtím jiným způsobem.

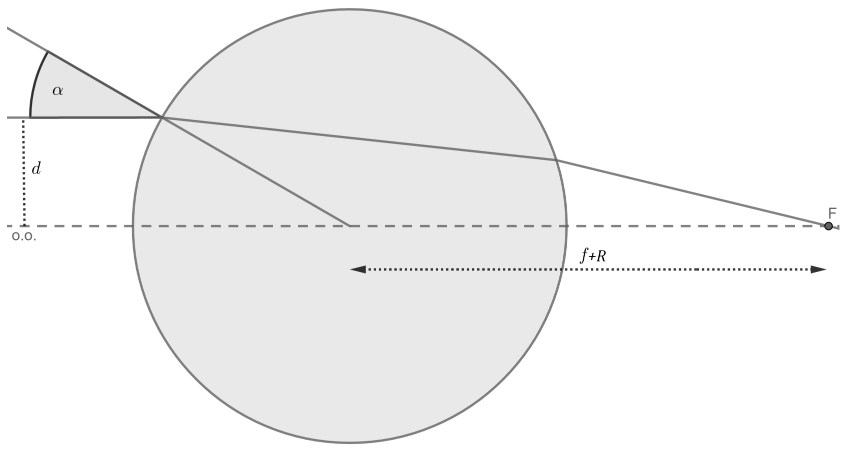
Není přitom potřeba odvozovat funkci $f(d)$, můžete výhodně využít výsledků úkolu a).

Nápověda: K vyřešení úkolu b) vám může být užitečné umět zkonstruovat tečnu ke grafu funkce $y(x)$, označme ji $h(x) = kx + q$. Pokud je grafem funkce $y(x)$ výše popsaná část *paraboly*, bude tečna v bodě x mít směrnici

$$k = -\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - Rx}}\,.$$

Na závěr uvážíme homogenní kouli o indexu lomu n a poloměru R, na kterou posvítíme svazkem rovnoběžných paprsků o stejném poloměru R, viz obrázek 3.

Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Schéma lomu světla na kouli: příčný řez

d) Určete explicitně f jako funkci úhlu dopadu α, tedy $f \equiv f(\alpha)$.

Nápověda: Měli byste odvodit tento vztah

$$f + R = \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha - \frac{1}{n^2}\sin\alpha\sin(2\alpha) - \frac{1}{n}\cos(2\alpha)\sqrt{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha}}\,,$$

nebo takový, který je na něj jednoduchými manipulacemi upravitelný.

Na obr. 4 je provedený geometrický rozbor úlohy. Nejdříve píšeme sinovou větu

$$\frac{f+R}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{R}{\sin[2(\alpha-\beta)]}\,.$$

Dalšími úpravami dostáváme

$$\begin{aligned}
f + R &= R\frac{\sin\alpha}{\sin[2(\alpha-\beta)]} \\
&= R\frac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{R}{2}\frac{\sin\alpha}{[\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta][\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta]} \\
&= \frac{R}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta - \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}\,.
\end{aligned}$$

Použitím $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ dostáváme

$$f + R = \frac{R}{2}\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + 2\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta - \sin\beta\cos\beta - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta}\,,$$

což lze dále zjednodušit tím, že se zbavíme sinu v čitateli

$$f + R = \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha\cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta - \frac{1}{n}\cos\beta - \cos\alpha\sin^2\beta}\,,$$

kde jsme využili Snellova zákona lomu

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Tím jsme se zbavili problému pro $\alpha = 0$, kdybychom dostali „0/0“. Další úpravy jsou následující

$$\begin{aligned} f + R &= \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha\left(1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha\right) + \frac{2}{n}\sin^2\alpha\cos\beta - \frac{1}{n}\cos\beta - \cos\alpha\frac{1}{n^2}\sin^2\alpha} \\ &= \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha - \frac{2}{n^2}\cos\alpha\sin^2\alpha + \frac{2}{n}\sin^2\alpha\cos\beta - \frac{1}{n}\cos\beta} \\ &= \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha - \frac{1}{n}\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha} - \frac{2}{n^2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \frac{2}{n}\sin^2\alpha\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha}}\,, \end{aligned}$$

což vede ke konečnému výsledku

$$f + R = \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha - \frac{1}{n^2}\sin\alpha\sin(2\alpha) - \frac{1}{n}\cos(2\alpha)\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha}}\,.$$

e) Určete minimální $f_{\min}$ a maximální $f_{\max}$ hodnotu obrazové ohniskové vzdálenosti.

Zajímají nás $\alpha_{\min} = 0$ a $\alpha_{\max} = \pi/2$. Pro první případ dostáváme

$$f(\alpha = 0) + R = \frac{R}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{R}{2}\frac{n}{n-1}\,.$$

Výsledek můžeme konfrontovat s dobře dohledatený̌m vztahem pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky v paraxiální aproximaci:

$$\tilde{f} = \frac{nR_1R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]}\,,$$

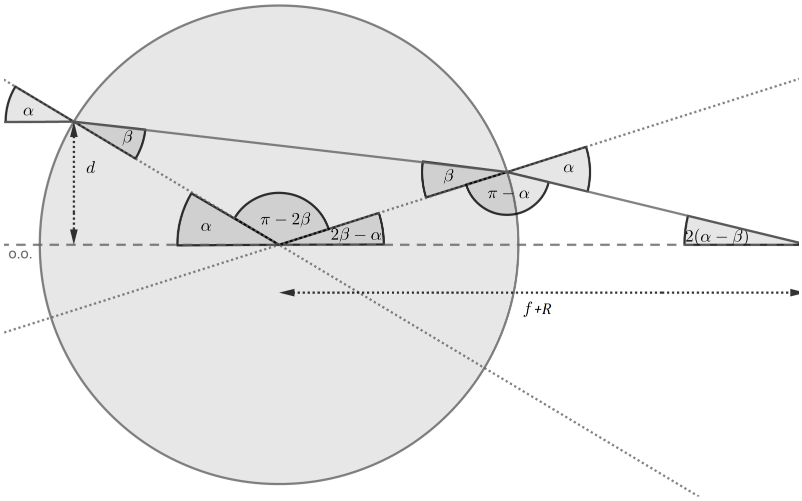
kde je však použita jiná definice ohniskové vzdálenosti, kdy $\tilde{f}$ značí vzdálenost ohniskové roviny od hlavní roviny, pak R_1 a R_2 jsou poloměry kulových rozhraních, d je vzdálenost tlusté čočky. Dle konvence, za které byl tento výsledek odvozen (například viz. studijní text FO: `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/cocky.pdf`), platí $R_1 = -R_2 \equiv R > 0$, $d = 2R$, navíc platí $\tilde{f} = f + R$, což dosazením do předchozího vztahu dá stejný výsledek, jaký jsme obdrželi my.

Pro druhý extrém opět pouze dosadíme do výsledku odvozeného v předešelém bodě úlohy

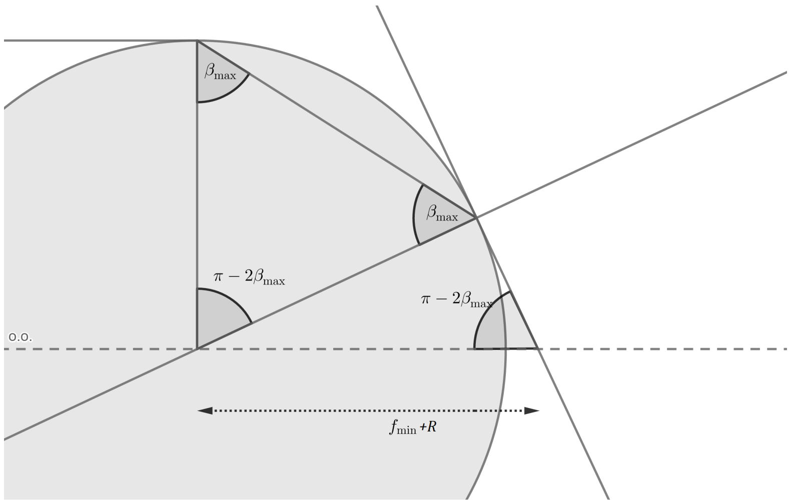
$$f(\alpha = \pi/2) + R = \frac{R}{2}\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}}\,.$$

Výsledek opět můžeme zkontrolovat nezávisle. Podle obr. 5 dostáváme pravoúhlý trojúhelník, pro který platí:

$$f(\alpha = \pi/2) + R = \frac{R}{\sin(2\beta_{\max})} = \frac{R}{2\sin\beta_{\max}\cos\beta_{\max}} = \frac{R}{2}\frac{n}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{R}{2}\frac{n^2}{\sqrt{n^2 - 1}}\,.$$



Obrázek 4: Schématický náčrtek lomu světla koulí - rozbor



Obrázek 5: Schématický náčrtek lomu světla koulí - rozbor: úhel $\alpha = \pi/2$

D Praktická úloha

(max. 30 bodů)

Část 1 – Mezní hvězdná velikost

Použijte alespoň dvě různé metody k určení mezní hvězdné velikosti v zenitu pro vámi zvolené pozorovací stanoviště. Ve vašem řešení důkladně zdokumentujte místo a čas pozorování, fázi Měsíce a detaily vaší metodologie. Porovnejte vaše výsledky pro různé metody. Před každým pozorováním se nezapomeňte důkladně adaptovat na tmu!

Část 2 – Exoplanety u pulsaru

Závod o detekci první planety mimo Sluneční soustavu (tedy exoplanety), který vrcholil v období přibližně před 30 lety, měl nečekané vítěze: radioastronomy Aleksandra Wolszczana a Dale Fraila, jenž 9. ledna 1992 oznámili světu objev dvou planet obíhajících pulsar PSR B1257+12. V této úloze se zkusíte vžít do jejich role a na základě dat z pozorování změn periody příchozích pulsů na čase usoudíte nejen na přítomnost exoplanet, ale vypočítáte rovněž některé jejich parametry.

Za tímto účelem využijete vhodný software určený k prokládání součtu harmonických funkcí (sinusovek) časovými řady s nepravidelným vzorkováním. Konečnou volbu necháváme na vašem uvážení, doporučujeme nicméně následující možnosti.

- `Period04`: využívá metodu diskrétní Fourierovy transformace a postupné odečítání frekvencí. Dostupný na `http://www.period04.net/`.
- `SparSpec`: využívá metodu řídkých reprezentací k předpovězení frekvencí obsažených v časové řadě. Dostupný na `http://userpages.irap.omp.eu/~hcarfantan/SparSpec1.4/SparSpec_html.html`.
- Algoritmy založené na metodě minimalizace fázové disperze (angl. *Phase Dispersion Minimization – PDM*). Dostupné ve formě skriptů pro Python z různých zdrojů na internetu.

V tabulce 1 najdete data z měření změn periody pulsů přicházejících od PSR B1257+12 na čase. Odpovídající datový soubor si můžete rovněž stáhnout z adresy `http://olympiada.astro.cz/zadani/PSRB1257+12.dat`. Tato data byla opravena o roční variaci vzájemné radiální rychlosti pozorovatele vůči systému, která je způsobena oběhem Země kolem Slunce. V následujících úkolech budeme předpokládat, že pozorované změny periody pulsů jsou způsobeny přítomností dvou exoplanet obíhajících kolem tohoto pulsaru po kruhových drahách.

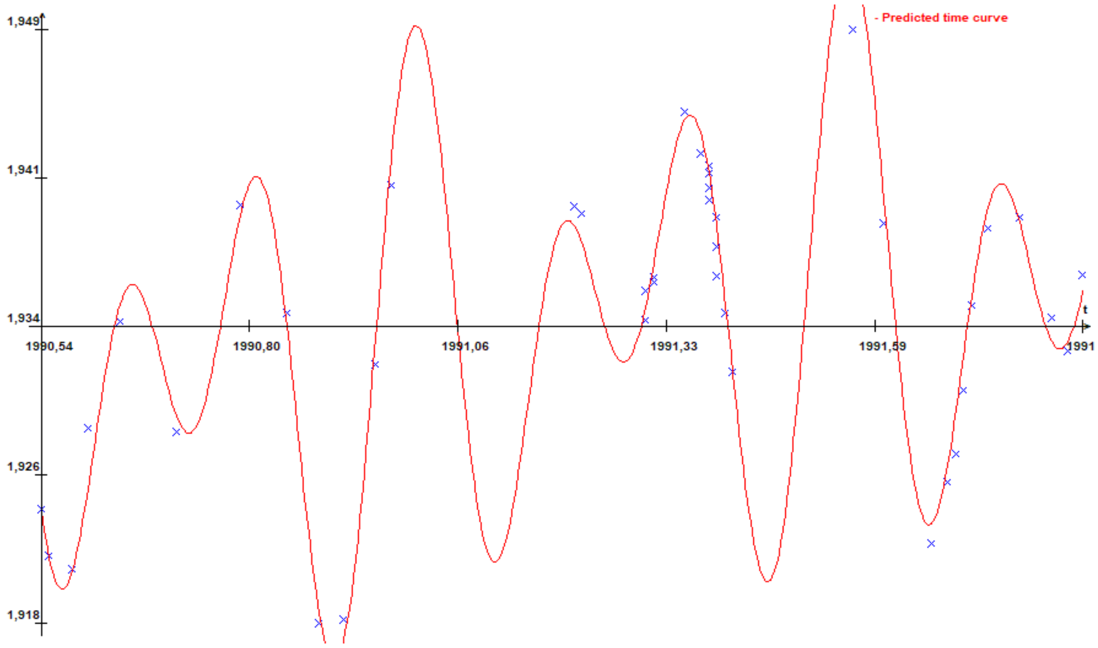
a) S pomocí vámi zvoleného programu analyzujte přiloženou datovou řadu a určete hodnoty významných frekvencí, které se v sérii vyskytují. Vaši volbu a kritérium pro posouzení významnosti diskutujte. Vykreslete závislost naměřených dat na čase. Dále vytvořte model změn periody v čase jako součet řady sinusovek s vámi určenými frekvencemi. Tento model překreslete přes skutečná měření a diskutujte kvalitu fitu.

> Ve vzorovém budeme detailně diskutovat pouze analýzu za pomocí programu `SparSpec`, pro ilustraci ovšem uvedeme i výsledky získané za pomocí `Period04`. Při nastavení vstupních parametrů `SparSpec` zvolíme $f_{\max} = 50$ (poblíž nejvyšší vzorkovací frekvence) a rovněž ponecháme automatickou hodnotu $\lambda/\lambda_{\max} = 0{,}1$. Použijeme mírně vyšší hodnotu $P = 5000$ počtu diskretizovaných frekvencí pro zlepšení přesnosti výpočtu. Konečně nastavíme parametr `threshold` ořezu amplitud na hodnotu $5 \cdot 10^{-4}$, abychom analýzu zbytečně neznečišťovali sinusovkami s malými amplitudami. Výsledek vidíme na obr. 6.

b) Určete střední hodnotu $\overline{P}$ periody příchozích pulsů.

> Hodnotu vertikálního posunu časové řady odečteme z výstupu programu (soubor `*.spec`) jako amplitudu sinusovky s nekonečnou periodou, dostáváme 1,935 ns. Přičteme-li k této hodnotě posun P_0, vychází pak $\overline{P} = 6\,218\,531{,}935$ ns. (Za pomocí `Period04` bychom získali 6 218 531,933 ns.)

c) Určete první dvě dominantní frekvence f_1, f_2 přispívající do fitu. Určete odpovídající oběžné periody T_1, T_2 exoplanet obíhajících pulsar (ve dnech).



Obrázek 6: Závislost naměřených dat změn periody pulsů PSR B1257+12 na epoše s proloženým fitem z analýzy programem `SparSpec`.

Frekvence odečteme ze souboru `*.spec`. Kromě výše zmíněné amplitudy s nekonečnou periodou zde nad výše zvoleným ořezem dostáváme amplitudu $A_1 = 9{,}66 \cdot 10^{-3}\,$ns na frekvenci $f_1 = 5{,}50\,\mathrm{yr}^{-1}$ a amplitudu $A_2 = 7{,}19 \cdot 10^{-3}\,$ns na frekvenci $f_2 = 3{,}69\,\mathrm{yr}^{-1}$. Názorně můžeme tyto výsledky zobrazit vykreslením fourierovského obrazu v programu SparSpec (viz obr. 7). Dostáváme odpovídající oběžné periody $T_1 = 1/f_1 = 66{,}4\,$d a $T_2 = 1/f_2 = 98{,}9\,$d.

Pomocí programu `Period04` bychom získali amplitudu $A_1 = 9{,}22 \cdot 10^{-3}\,$ns na frekvenci $f_1 = 5{,}48\,\mathrm{yr}^{-1}$ a amplitudu $A_2 = 6{,}92 \cdot 10^{-3}\,$ns na frekvenci $f_2 = 3{,}72\,\mathrm{yr}^{-1}$. Odpovídající periody by potom byly $T_1 = 66{,}7\,$d a $T_2 = 98{,}2\,$d.

d) Určete rovněž amplitudy ΔP_1, ΔP_2 změn periody pulsů odpovídající každé z exoplanet.

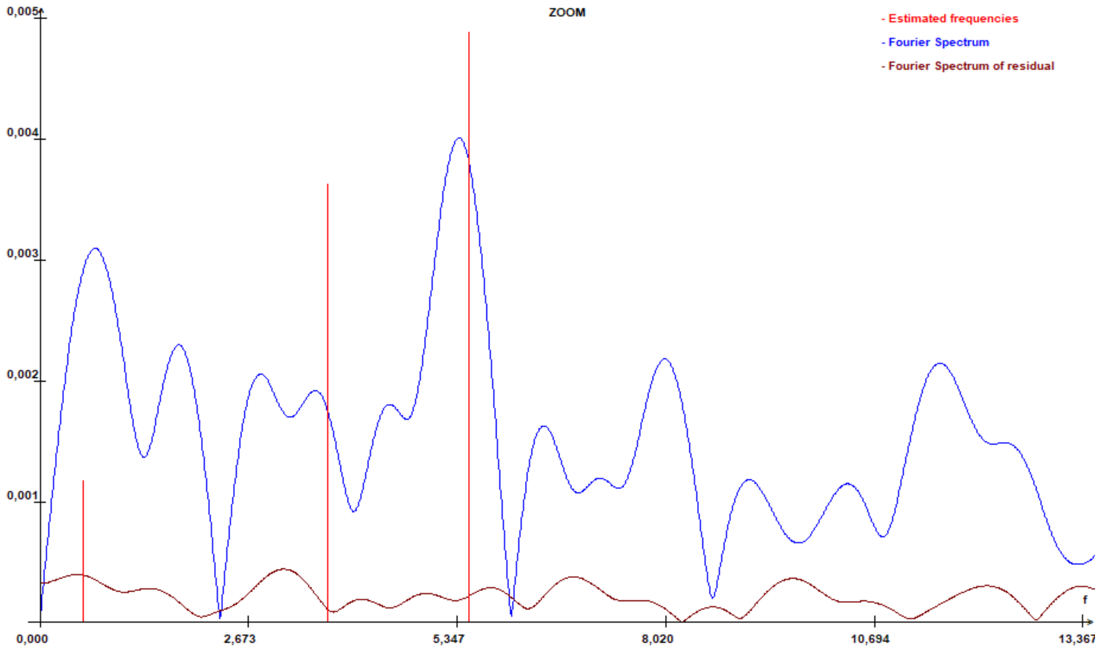
Z řešení předchozího úkolu plynou hodnoty $\Delta P_1 = A_1 = 9{,}66 \cdot 10^{-3}\,$ns a $\Delta P_2 = A_2 = 7{,}19 \cdot 10^{-3}\,$ns získané programem `SparSpec` a rovněž odpovídající hodnoty získané programem `Period04`.

Odhadovaná hmotnost pulsaru PSR B1257+12 činí $M_* = 1{,}4 M_\odot$.

e) Pro obě exoplanety vypočtěte poloměr a_p jejich oběžných drah kolem pulsaru v astronomických jednotkách.

Z 3. Keplerova zákona ve tvaru (za předpokladu $M_\mathrm{p} \ll M_*$)

$$\frac{GM_*}{4\pi^2} = \frac{a_\mathrm{p}^3}{T^2}$$



Obrázek 7: Fourierovský obraz signálu po zpracování programem `SparSpec` se zobrazenými předpověženými dominantními frekvencemi.

můžeme pro každou exoplanetu vyjádřit

$$a_{\mathrm{p}} = \left(\frac{GM_* T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Číselně dostaneme pro výstup z programu `SparSpec` hodnoty 0,36 au a 0,47 au. Pro `Period04` bychom v rámci zaokrouhlení dostali stejné hodnoty.

f) Pro každou z exoplanet rovněž vypočtěte její hmotnostní parametr $M_{\mathrm{p}} \sin i$, kde M_{p} je hmotnost exoplanety a i je úhel sevřený mezi normálou k rovině její oběžné dráhy a směrem k pozorovateli. Výsledné hodnoty uveďte v jednotkách hmotnosti Země $M_\oplus$.

Označme P_{int} skutečnou („intrinsic“) periodu pulsů, tedy periodu, kterou bychom naměřili ve vztažné soustavě spojené s pulsarem. Rovněž zaveďme označení v_k (pro $k = 1, 2$) orbitální rychlosti pulsaru v binárním systému s každou z exoplanet a v_0 pro rychlost vzdalování hmotného středu systému od Slunce. Potom můžeme psát Dopplerovské vztahy

$$\frac{\overline{P} - P_{\mathrm{int}}}{P_{\mathrm{int}}} = \frac{v_0}{c} ,$$
$$\frac{\Delta P_k + \overline{P} - P_{\mathrm{int}}}{P_{\mathrm{int}}} = \frac{v_0 + v_k \sin i_k}{c} ,$$

odkud máme

$$\Delta P_k = \frac{v_k \sin i_k}{c} P_{\mathrm{int}} = \frac{v_k \sin i_k}{c} \frac{\overline{P}}{1 + \frac{v_0}{c}} .$$

Předpokládáme-li v souladu s očekáváním, že $v_0, v_k \ll c$, můžeme tedy přibližně psát

$$\Delta P_k \approx \frac{v_k \sin i_k}{c} \overline{P} \,,$$

a tedy

$$v_k \sin i_k \approx \frac{\Delta P_k}{\overline{P}} c \,.$$

Pro každou z exoplanet píšeme vztahy

$$M_\mathrm{p} a_\mathrm{p} = M_* a_* \,,$$
$$v = \frac{2\pi a_*}{T} = \frac{2\pi a_\mathrm{p} M_\mathrm{p}}{T M_*} \,,$$

a rovněž 3. Keplerův zákon ve tvaru (za předpokladu $M_\mathrm{p} \ll M_*$)

$$\frac{G M_*}{4\pi^2} = \frac{a_\mathrm{p}^3}{T^2} \,.$$

Dosazením za a_p dostaneme

$$M_\mathrm{p} \sin i = \left(\frac{T M_*^2}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} v \sin i = \left(\frac{T M_*^2}{2\pi G} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\Delta P}{\overline{P}} c \,.$$

Číselně pak dostáváme hodnoty parametru $M_\mathrm{p} \sin i$ pro obě exoplanety jako $3{,}7 M_\oplus$ a $3{,}1 M_\oplus$ za použití hodnot z programu `SparSpec`. Pokud bychom vzali hodnoty získané pomocí `Period04`, dostali bychom hmotnostní parametry $3{,}5 M_\oplus$ a $3{,}0 M_\oplus$, které jsou o něco blíže výsledkům analýzy Wolszczana a Fraila.

V úloze f) nezapomeňte diskutovat možný vliv radiálního pohybu hmotného středu exoplanetárního systému vzhledem k Zemi.

Tabulka 1: Data z porozování pulsaru PSR B1257+12 – epocha měření v rocích a rozdíl naměřené periody pulsů v nanosekundách od hodnoty $P_0 = 6\,218\,530\,\mathrm{ns}$.

Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$	Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$	Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$
1990.54	1.92427	1991.30	1.93559	1991.41	1.93133
1990.55	1.92182	1991.30	1.93404	1991.56	1.94910
1990.58	1.92112	1991.31	1.93629	1991.60	1.93909
1990.60	1.92843	1991.31	1.93599	1991.66	1.92247
1990.64	1.93399	1991.35	1.94480	1991.68	1.92563
1990.71	1.92823	1991.37	1.94270	1991.69	1.92708
1990.79	1.93999	1991.38	1.94029	1991.70	1.93038
1990.85	1.93444	1991.38	1.94089	1991.71	1.93479
1990.89	1.91832	1991.38	1.94164	1991.73	1.93884
1990.92	1.91852	1991.38	1.94204	1991.77	1.93939
1990.96	1.93173	1991.39	1.93634	1991.81	1.93419
1990.98	1.94104	1991.39	1.93789	1991.83	1.93243
1991.21	1.93994	1991.39	1.93939	1991.85	1.93639
1991.22	1.93954	1991.40	1.93444		