

Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**A Přehledový test***(max. 30 bodů)*

Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **16. 3. 2022** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Kotoučky hvězd*(max. 20 bodů)*

V této úloze budeme analyzovat podmínky pro rozlišení kotoučků jednotlivých hvězd. Pro jednoduchost přitom budeme uvažovat jednoduchý dalekohled se vstupní aperturou o průměru D , který je vybaven detektorem s maximem citlivosti ve středu optického pásma ($\lambda = 550 \text{ nm}$). Kotouček hvězdy budeme považovat za rozlišený, pokud dva protilehlé body na jeho okraji splňují tzv. Rayleighovo kritérium, tedy pokud je úhlový průměr kotoučku roven alespoň poloměru $\alpha_{\min} = 1,22\lambda/D$ Airyho kotoučku. Poznamenejme nicméně pro úplnost, že v dnešní době jsou již k dispozici daleko pokročilejší techniky pro zobrazování s vysokým rozlišením (např. optická interferometrie).

a) Určete číselně hodnotu α_{\min} pro současný největší dalekohled GTC se zrcadlem o průměru $D_{\max} = 10,4 \text{ m}$.

Po dosazení dostaneme $\alpha_{\min} = 0,013''$.

Uvažujme hvězdu o poloměru R a efektivní teplotě T , která se od nás nachází ve vzdálenosti d . Úhlový poloměr kotoučku hvězdy označme jako α .

b) Vyjádřete zářivý výkon L hvězdy pomocí R a T .

Za Stefanova-Boltzmannova zákona máme

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4,$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta.

c) Vyjádřete zářivý tok Φ , který k nám od hvězdy přichází, pomocí T a α .

Máme

$$\Phi = \frac{L}{4\pi d^2} = \sigma \frac{R^2 T^4}{d^2} = \sigma \alpha^2 T^4.$$

Nejjasnější hvězdy na naší obloze dosahují hvězdných velikostí okolo 0 mag. V první části úlohy jsme zároveň zjistili, že úhlové poloměry disků hvězd, které jsme schopni současnými dalekohledy rozlišit, jsou zdola omezené hodnotou $\alpha_{\min}/2$. Z vašeho výsledku v části c) by tedy mělo být patrné, že existuje maximální efektivní teplota T_{\max} hvězd, jejichž kotouček můžeme zobrazit.

d) Určete číselnou hodnotu T_{\max} a vyjmenujte spektrální typy hvězd, u kterých jsme současnými dalekohledy schopni zobrazit jejich kotouček (vybírejte z posloupnosti O, B, A, F, G, K, M).



Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Označíme-li dolním indexem S veličiny vztahující se ke Slunci, můžeme psát

$$\frac{\Phi}{\Phi_S} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_S}\right)^2 \left(\frac{T}{T_S}\right)^4,$$

a tedy

$$\left(\frac{T}{T_S}\right)^4 = \frac{\Phi}{\Phi_S} \left(\frac{\alpha}{\alpha_S}\right)^{-2} \leq \frac{\Phi_{\max}}{\Phi_S} \left(\frac{\alpha_{\min}}{2\alpha_S}\right)^{-2} = 10^{-0,4 \cdot 26,8} \left(\frac{\alpha_{\min}}{2\alpha_S}\right)^{-2},$$

odkud máme (po dosazení $\alpha_S = 16'$)

$$T_{\max} = T_S \left[10^{-0,4 \cdot 26,8} \left(\frac{\alpha_{\min}}{2\alpha_S}\right)^{-2} \right]^{\frac{1}{4}} \doteq 4600 \text{ K}.$$

Kotouček tedy dokážeme rozlišit pouze u hvězd spektrálních typů K a M.

Nápověda: Porovnejte se zářivým tokem přicházejícím od Slunce a použijte Pogsonovu rovnici.

C Ohon komety

(max. 20 bodů)

Wilhelm Tempel patřil bezesporu k jednomu z nejpłodnějších lovců komet (spolupodílel se na 21 objevech). V této úloze se podíváme na to, jak bychom určovali tvar prachového ohonu komety. Jelikož se obecně jedná o velmi komplikovaný výpočet, zaměříme se na zjednodušenou situaci, kdy kometa obíhá po kruhové dráze a síla tlaku záření působící na zrnka prachu se vyrovná s gravitačním působením Slunce. Zářivý výkon Slunce označme jako L_S .

a) Určete celkový zářivý výkon $\Phi(r)$, který dopadá na jednotku plochy ve vzdálenosti r od Slunce. Výsledek vyjádřete pomocí r a L_S .

Máme jednoduše

$$\Phi(r) = \frac{L_S}{4\pi r^2}.$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že ohon komety je tvořen zrnky prachu ve tvaru malých kuliček o poloměru R a hustotě ρ . Materiál těchto kuliček je dokonale tepelně vodivý a dokonale pohlcuje dopadající záření.

b) Určete sílu $F_{\text{rad}}(r)$ působící na jedno prachové zrnko, které se nachází ve vzdálenosti r od Slunce. Výsledek vyjádřete pomocí r , R , L_S a c . Jevy spojené s obecně nenulovou rychlostí v prachových zrněk zanedbejte (pracujeme v režimu $v/c \ll 1$).

Na zrnko dopadá záření o celkovém výkonu (energie za jednotku času)

$$P = \Phi \pi R^2.$$

Jelikož je všechen tento výkon pohlcen a opětovně termálně vyzáren rovnoměrně do všech směrů (zrnko je dokonale vodivé), můžeme odpovídající změnu hybnosti záření za jednotku času vyjádřit jako P/c . Ze zákona zachování hybnosti musí tato odpovídat časové



Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
změně hybnosti zrnka, tedy síle F_{rad} působící na něj ve směru dopadajícího záření. Dostáváme tedy

$$F_{\text{rad}}(r) = \frac{\pi R^2}{c} \Phi(r) = \frac{L_S R^2}{4c} \frac{1}{r^2}.$$

Nápověda: Napište zákon zachování hybnosti pro proces absorpce a opětovného vyzáření jednotlivých fotonů zrnkem.

V následujícím budeme pro jednoduchost uvažovat, že zrnko pocituje pouze gravitační sílu Slunce.

c) Ověřte, že se jedná o rozumný předpoklad. Uvažujte typickou kometu o hustotě $\rho_c = 0,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, poloměru $R_c = 5 \text{ km}$ a předpokládejte, že ohon se tvoří ve vzdálenostech řádově 1 au od Slunce.

Zrychlení působící na zrnko prachu v gravitačním poli komety na jejím povrchu spočteme jako

$$g_c = \frac{4}{3} \pi \rho_c G R_c \doteq 7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pokud se zrnko nachází dále od povrchu komety, bude toto zrychlení ještě menší. Odpovídající zrychlení v gravitačním poli Slunce ve vzdálenosti 1 au od Slunce naopak vyjde

$$g_S = \frac{GM_S}{(1 \text{ au})^2} \doteq 6 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Vidíme tedy, že Slunce na zrnko působí minimálně desetkrát větší silou než kometa.

d) Ukažte, že se zrnko pohybuje v centrálním silovém poli s dostředivým zrychlením

$$g_{\text{eff}}(r) = \frac{\gamma GM_S}{r^2}.$$

Vyjádřete parametr γ pomocí R, ρ, G, M_S, L_S a c .

Dostáváme

$$g_{\text{eff}}(r) = \frac{GM_S}{r^2} - \frac{L_S R^2}{4GM_S m c} \frac{GM_S}{r^2},$$

kde $m = \frac{4}{3} \pi \rho R^3$ je hmotnost jednoho zrnka prachu. Máme tedy

$$\gamma = 1 - \frac{3L_S}{16\pi GM_S \rho R c}.$$

e) Vypočtěte kritickou hodnotu R_0 poloměru jednotlivých zrněk, pro kterou dostaneme $\gamma = 0$. Uvažujte, že $\rho \approx \rho_c$.

Dostáváme

$$R_0 = \frac{3L_S}{16\pi GM_S \rho c} \doteq 1 \mu\text{m}.$$



Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Ve zbytku úlohy pro jednoduchost předpokládejme, že *všechna* zrnka prachu mají poloměr R_0 a že kometa obíhá kolem Slunce po kruhové dráze o poloměru $a_c = 1$ au. Pro tuto situaci se budeme zabývat přesným výpočtem tvaru kometárního ohonu.

f) Určete tvar trajektorií jednotlivých zrněk v heliocentrické vztažné soustavě a také jejich heliocentrické rychlosti v .

Jelikož $\gamma = 0$, nepůsobí na zrnka žádné zrychlení a počáteční rychlost zrněk je dána čistě oběžnou rychlostí komety. Jednotlivá zrnka se tedy pohybují s konstantní rychlostí

$$v = \sqrt{\frac{GM_S}{1 \text{ au}}} \doteq 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

po polopřímkách s počátkem na kružnici o poloměru 1 au (oběžná dráha komety), které jsou tečné k této kružnici.

Tyto trajektorie ovšem nelze ztotožnit s tvarem ohonu, protože v důsledku oběhu komety kolem Slunce nevyplétávají zrnka z jednoho místa. Zavedme v oběžné rovině komety kartézskou soustavu souřadnic $[x, y]$, v níž kometa obíhá po trajektorii $[x_c(t), y_c(t)]$ s parametrickým předpisem

$$\begin{aligned} x_c(t) &= a_c \cos \omega_c t, \\ y_c(t) &= a_c \sin \omega_c t, \end{aligned}$$

kde ω_c je úhlová frekvence oběhu komety.

g) Určete trajektorii $[x(t; \tau), y(t; \tau)]$ zrnka prachu, které se z komety uvolnilo v čase τ .

V čase τ se kometa nachází v bodě

$$[a_c \cos \omega_c \tau, a_c \sin \omega_c \tau]$$

a pohybuje se rychlostí

$$[-\omega_c a_c \sin \omega_c \tau, \omega_c a_c \cos \omega_c \tau]$$

Zrnko prachu se tedy pohybuje po přímce s parametrickým předpisem

$$\begin{aligned} x(t; \tau) &= -(t - \tau)\omega_c a_c \sin \omega_c \tau + a_c \cos \omega_c \tau, \\ y(t; \tau) &= +(t - \tau)\omega_c a_c \cos \omega_c \tau + a_c \sin \omega_c \tau. \end{aligned}$$

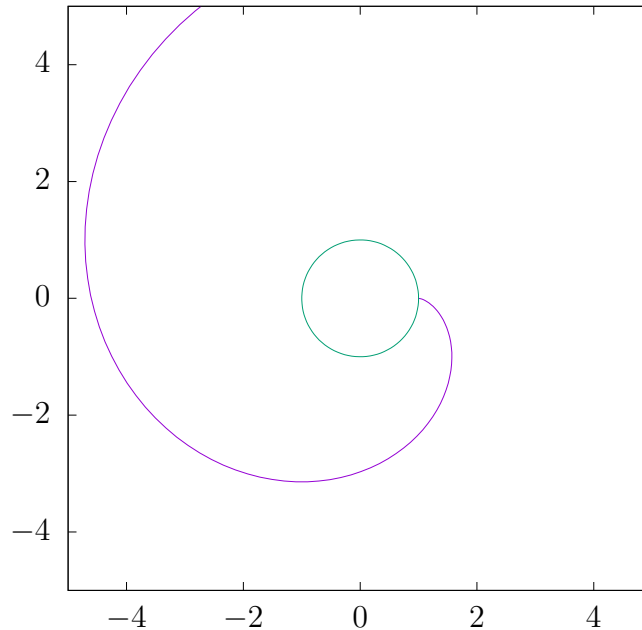
h) Napište parametrické vyjádření $[x_o(\tau; t_0), y_o(\tau; t_0)]$ tvaru ohonu v nějakém daném čase $t = t_0$. Jako parametr použijte hodnotu času $-\infty \leq \tau \leq t_0$, ve který se daná část ohonu uvolnila z komety. Napište název odpovídající křivky.

Nápověda: Zamyslete se nad problémem odvíjení konce velmi tenké nitě z válcovité cívky.

Máme jednoduše

$$\begin{aligned} x_o(\tau; t_0) &= x(t_0; \tau) = -(t_0 - \tau)\omega_c a_c \sin \omega_c \tau + a_c \cos \omega_c \tau, \\ y_o(\tau; t_0) &= y(t_0; \tau) = +(t_0 - \tau)\omega_c a_c \cos \omega_c \tau + a_c \sin \omega_c \tau, \end{aligned}$$

Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Graf evolventy kružnice o jednotkovém poloměru.

což je parametrické vyjádření evolventy kružnice (kterou je oběžná dráha komety). Mohli jsme si skutečně povšimnout, že za daných předpokladů se tvar kometárního ohonu dá ekvivalentně popsat jako množina bodů, kterou opisuje konec odvíjeného tenkého provázku z cívky, protože jak zrnka, tak kometa se pohybují rychlostí o stejné konstantní velikosti.

i) Načrtněte křivku popisující tvar ohonu komety.

Graf křivky popisující tvar ohonu komety (evolventu kruhové oběžné dráhy komety o poloměru 1 au) vidíme na obrázku 1.

Krajské kolo 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Praktická

(max. 30 bodů)

Za vhodného počasí vyfotografujte ze stativu část oblohy vyznačenou obdélníkem na mapce. Snímky je možné i skládat. Na svém snímku označte příslušným číslem objekty uvedené v tabulce. Do tabulky pak doplňte požadované údaje (hvězdnou velikost ve filtru V a jméno) o vybraných objektech, jak je naleznete v databázi SIMBAD¹

Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno	Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno
1	ADS 5983	3,53	Wasat	6	IRC +20154	1,92	Alhena
2	IRAS 04589+4100	3,75	Haedus I	7	JP11 965	1,14	Pollux
3	FK5 185	3,18	Haedus II	8	IRAS 07314+3159	1,58	Castor
4	HIP 23416	2,99	Almaaz	9	SAO 40750	1,90	Menkalinan
5	HIC 25428	1,65	Elnath	10	HR 1708	0,08	Capella



¹<http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/>