Astronomická olympiáda

Česká astronomická společnost
www.astro.cz
olympiada.astro.cz

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Krajské kolo je nutné odevzdat pomocí online formuláře do 12:00 SEČ 23. 3. 2022!

A Přehledový test (online)

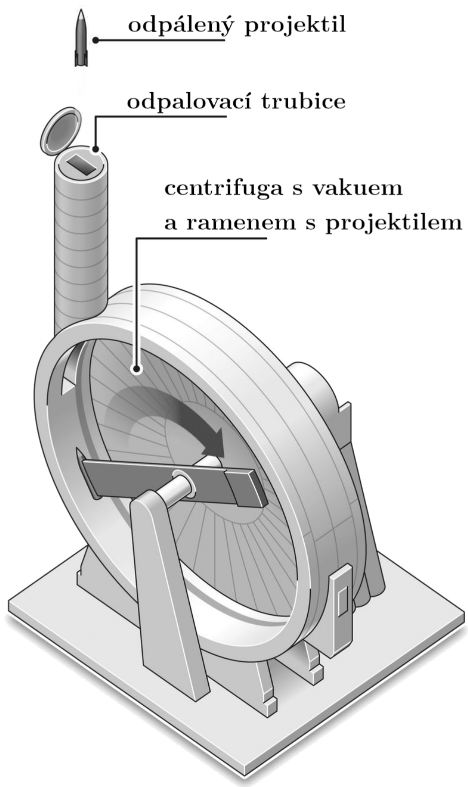
(max. 30 bodů)

POKYNY: U každé otázky vyber **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Spinlaunch

(max. 29 bodů)

„Spinlaunch“ je název nového projektu, jehož cílem je levnější vysílání družic na oběžnou dráhu. Zatím existuje prototyp, který je schopen vysílat projektily na suborbitální trajektorie. Místo chemické energie raketového paliva využívá tato koncepce k vymrštění satelitu (schovaného uvnitř projektilu) do kosmu kinetickou energii rotujícího ramene. Finální podoba odpalovacího mechanismu má mít tvar válce o průměru 100 m, ve kterém bude ve vakuu rotovat rameno o poloměru 45,0 m s frekvencí až 450 otáček za minutu (viz obrázek vpravo).



a) Jak rychle se pohybuje projektil na konci ramene? Vyjádři v m/s, zaokrouhleno na desítky.

Označme $r = 45{,}0\,\mathrm{m}$, $f = 450\,\mathrm{ot/min} = 7{,}50\,\mathrm{ot/s}$
, pak rychlost na konci ramene je

$$v = r\omega = 2\pi r f = 2\pi \cdot 45{,}0\,\mathrm{m} \cdot 7{,}50\,\mathrm{s^{-1}}$$

$$v \approx 2\,120\,\mathrm{m/s}$$

b) Předpokládejme, že má projektil hmotnost 100 kg. Jak velká síla je potřeba k tomu, aby byl udržen na rotujícím rameni před startem? Uveď ji v newtonech a zaokrouhli na 3 platné číslice.

Počítáme dostředivou sílu buď pomocí $F_\mathrm{d} = mv^2/r$ nebo $F_\mathrm{d} = mr\omega^2$. Zde upřednostňuji druhý vztah, protože používá pouze zadané hodnoty ($\omega = 2\pi f$), tudíž do něj nevstupuje případná chyba a zaokrouhlování v předchozím výsledku. Oba postupy jsou však správné a zde vychází stejné číslo.

$$F_\mathrm{d} = mr(2\pi f)^2 = 100\,\mathrm{kg} \cdot 45{,}0\,\mathrm{m} \cdot (2\pi \cdot 7{,}50\,\mathrm{s^{-1}})^2 \approx 9{,}99 \cdot 10^6\,\mathrm{N} \approx 9{,}99\,\mathrm{MN}$$

(s využitím $\pi \approx 3{,}14$ vychází 9,98 MN)

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

c) Je rychlost projektilu dostatečná k tomu, aby bylo možné družici tímto způsobem umístit na oběžnou dráhu kolem Země? Krátce zdůvodni. *Nápověda: Pomůže Ti, pokud víš, co je to první kosmická rychlost.*

Kruhová rychlost je $v_\mathrm{k} = \sqrt{GM/R}$.

První kosmická rychlost je kruhová rychlost při povrchu Země: $v_\mathrm{k1} \approx 7{,}905\,\mathrm{km/s}$.

Rychlost odpáleného projektilu je $2{,}120\,\mathrm{km/s}$, což je méně než první kosmická rychlost.

Rychlost projektilu tedy není dostatečná.

d) Předpokládejme, že tíhové pole kolem Země je homogenní. To znamená, že je tíhové zrychlení $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ všude konstantní. Do jaké výšky nad zemí (označ h, uveď ji v kilometrech a zaokrouhli na celé číslo) by v takovém případě projektil vyletěl, kdyby byl vyslán kolmo nahoru?

BUĎ: Z rovnic pro vrh vzhůru víme:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

$$v(h) = -gt + v_0$$

toto platí pro libovolnou výšku h. V našem případě je h maximální výška, takže $v(h) = 0$, dále vysíláme projektil z povrchu Země, kde je $h_0 = 0$, a konečně počáteční rychlost je v z části a). Z druhé rovnice vyjádříme čas t a dosadíme do první: $t = v/g$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

NEBO: Ze zákona zachování energie v homogenním tíhovém poli víme:

$$\frac{1}{2}mv(h)^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$$

Zde je opět $v(h) = 0$, $h_0 = 0$ a $v_0 = v$, takže dostáváme:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

SPOLEČNÉ POKRAČOVÁNÍ:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{(2\,120\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 229\,\mathrm{km}$$

e) Nyní uvažujme situaci centrálního gravitačního pole. V něm se gravitační zrychlení s výškou mění. Do jaké výšky nad zemí (označ H, uveď ji v kilometrech a zaokrouhli na celé číslo) by v takovém případě projektil vyletěl? *Nápověda: Platí zákon zachování energie.*

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

Zákon zachování energie v centrálním gravitačním poli:

$$E_{\mathrm{k,Země}} + E_{\mathrm{p,Země}} = E_{\mathrm{k}}(H) + E_{\mathrm{p}}(H)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0 - \frac{GMm}{R+H}\,,$$

kde $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ a $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ jsou poloměr a hmotnost Země, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$ je Newtonova gravitační konstanta a m je hmotnost projektilu, na které však nezáleží.

$$(R+H)\left(v^2 - \frac{2GM}{R}\right) = -2GM$$

$$Rv^2 - 2GM + H\left(v^2 - \frac{2GM}{R}\right) = -2GM$$

$$H = \frac{-Rv^2}{v^2 - \frac{2GM}{R}} = \frac{R^2v^2}{2GM - Rv^2}$$

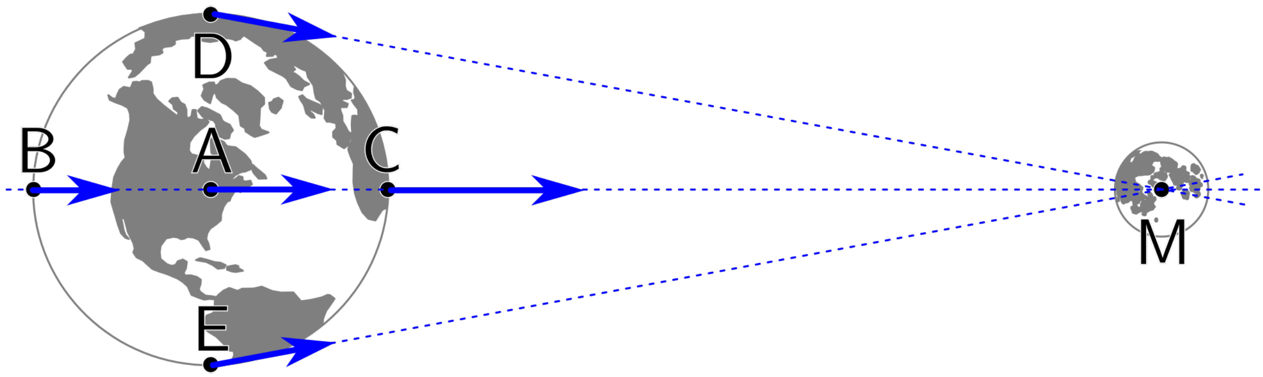
$$H = \frac{(6{,}378 \cdot 10^6)^2 \cdot 2\,120^2}{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24} - 6{,}378 \cdot 10^6 \cdot 2\,120^2}\,\mathrm{m} \approx 2{,}38 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = 238\,\mathrm{km}$$

Díky zmenšujícímu se gravitačnímu vlivu Země ve větší vzdálenosti může projektil doletět dále od ní. $H > h$. Pozn.: Vždy je nutné zjistit, jestli je námi vybraná aproximace dostatečná pro popis daného fyzikálního jevu.

C Vliv planet II

(max. 21 bodů)

Ve školním kole jsme počítali přitažlivost fyzikářů a planety Saturn. Při výpočtu jsme však uvažovali jen gravitační sílu mezi tělesy, jako by se jednalo o hmotné body, a zanedbali jsme jednu důležitou vlastnost – *slapovou sílu*. Tato síla je zapříčiněna tím, že tělesa mají rozměr. Gravitační působení od druhého tělesa tedy nebude všude stejné.



Obrázek 1: Schéma soustavy Země–Měsíc k úlohám a) a b).

a) Mějme situaci na obrázku 1. Předpokládej, že vzdálenost Země a Měsíce (tj. mezi body A a M) je $d_{\mathrm{AM}} = 3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$ a poloměr Země je roven jejímu rovníkovému poloměru. Doplň do tabulky 1

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

vzdálenosti bodů A až E (jež jsou zde souhrnně označeny jako z) od bodu M a velikost gravitačního zrychlení

$$a_z = \frac{GM_\mathrm{M}}{d_{z\mathsf{M}}^2},$$

které Měsíc v daném bodě na Zemi vytváří. Potřebné hodnoty vyhledej v tabulkách AO.

Nástin výpočtů (není třeba přikládat do řešení), kde jsme za poloměr Země vzali z tabulek AO hodnotu $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$.

$$d_\mathsf{BM} = d_\mathsf{AM} + R_\mathrm{Z}$$

$$d_\mathsf{CM} = d_\mathsf{AM} - R_\mathrm{Z}$$

$$d_\mathsf{DM,EM} = \sqrt{d_\mathsf{AM}^2 + R_\mathrm{Z}^2}$$

Pro výpočet zrychlení jen dosadíme do předepsaného vzorečku.

bod na Zemi: z	**vzdálenost:** $d_{z\mathsf{M}}$ [m]	**gravitační zrychlení:** a_z [$\mathrm{N\,kg^{-1}}$]
A	$3{,}84 \cdot 10^8$	$3{,}32 \cdot 10^{-5}$
B	$3{,}90 \cdot 10^8$	$3{,}22 \cdot 10^{-5}$
C	$3{,}78 \cdot 10^8$	$3{,}44 \cdot 10^{-5}$; příp. $3{,}43 \cdot 10^{-5}$, pokud se počítá se zaokrouhleným d
D	$3{,}84 \cdot 10^8$	$3{,}32 \cdot 10^{-5}$
E	$3{,}84 \cdot 10^8$	$3{,}32 \cdot 10^{-5}$

Tabulka 1: Tabulka k obrázku 1. Doplň hodnoty v uvedených jednotkách a v exponenciálním tvaru, tj. $x \times 10^y$, kde číslo x bude zaokrouhlené na 3 platné číslice, jako je to v případě d_AM.

b) Naznač do obrázku 1 pro body A až E na Zemi šipkou gravitační zrychlení od Měsíce (tj. z bodu M). Zajímá nás jednak jejich směr a také velikost. *Nápověda: Pokud je někde působící síla větší, mělo by to být znázorněno delší šipkou a naopak menší síla kratší šipkou.*

Šipky ze všech bodů musejí směřovat k M. Vyšlo nám, že šipky z A, D a E budou stejně dlouhé, šipka z B kratší a šipka z C delší.

c) Nyní se zaměřme pouze na relativní zrychlení v bodech B až E oproti bodu A. Do tabulky 2 zapiš hodnoty.

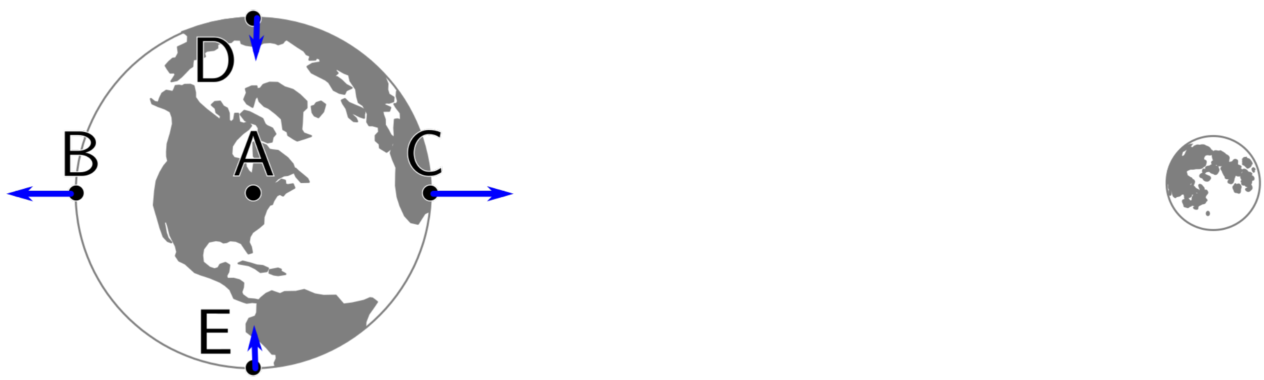
d) Naznač do obrázku 2 pro body B až E na Zemi šipkou rozdíl gravitačního zrychlení vzhledem ke středu Země (bod A). Opět nás zajímá jejich směr a velikost. *Nápověda: Pokud je někde působící síla nulová, znázorni to kolečkem okolo daného bodu.*

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

bod na Zemi: z	**rozdíl gravitačního zrychlení:** $a_z - a_{\mathsf{A}}$ $[\mathrm{N\,kg^{-1}}]$
B	$-1{,}0 \cdot 10^{-6}$
C	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$; příp. $1{,}1 \cdot 10^{-6}$, v závislosti na hodnotě v Tabulce 1
D	0
E	0

Tabulka 2: Tabulka k obrázku 2. Doplň hodnoty v uvedených jednotkách a v exponenciálním tvaru, tj. $x \times 10^y$, kde číslo x bude zaokrouhlené na 2 platné číslice.

Šipka z bodu C směřuje k Měsíci, šipka z bodu B je přibližně stejně velká (nepatrně menší) a směřuje od Měsíce, Uznat, když budou v bodech D a E pouze kolečka kolem bodů (jako nulové šipky). Pokud však někdo správně nakreslí malé (menší než z B a C) šipky v bodech D a E směrem dovnitř Země, protože mu dojde, že bychom správně měli odečítat vektory a ne jen velikosti zrychlení a že byly šipky skloněné, dát za každou šipku bonusové body.



Obrázek 2: Schéma soustavy Země–Měsíc k úlohám c) a d).

e) Jaký je nejznatelnější důsledek působení slapových sil od Měsíce na Zemi? Kolikrát denně lze na jednom místě na Zemi takový jev pozorovat?

Příliv a odliv, na jednom místě na Zemi nastávají přibližně 2 přílivy a 2 odlivy denně.

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

D Měření úhlové rychlosti Měsíce (online)

(max. 20 bodů)

POKYNY: Pozorovací úloha se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem, nebo je dostaneš od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Doporučujeme pozorování neodkládat na poslední chvíli před uzávěrkou (hlavně kvůli počasí). U problémů s řešením oznámených po začátku března bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. **Řešení (nebo alespoň snaha o řešení) pozorovací úlohy je nutnou podmínkou pro postup do finále Astronomické olympiády.**

!? V průběhu krajského kola máš **pouze dvě možnosti, kdy lze pozorování provést**, neboť Měsíc je u nás večer nad obzorem jen ve dnech **3.–18. 2. a 5.–19. 3.**!

Měsíc patří mezi nejrychlejší kosmická tělesa na obloze, proto se u něj poměrně snadno určuje **úhlová rychlost pohybu**. Úkolem je zjistit, o kolik stupňů za den se průměrně posune Měsíc mezi hvězdami.

V prvním přiblížení stačí pozorovat ve dvou různých časech a změřit jeho polohu vůči vybraným hvězdám. Pozorování je vhodné provést ve dvou nocích krátce po sobě. Pohyb Měsíce mezi hvězdami bude i tak patrný, že jej nikdo nepřehlédne. Pozor, ne každá noc se k pozorování hodí! Úloha je připravena pro večerní pozorování, je tedy vhodné pozorovat pouze v období, kdy je Měsíc kolem první čtvrti až kolem úplňku. Také vezmi v úvahu špatné počasí, které může pozorování znemožnit. Proto s ním neotálej a snaž se jej provést při první možné příležitosti.

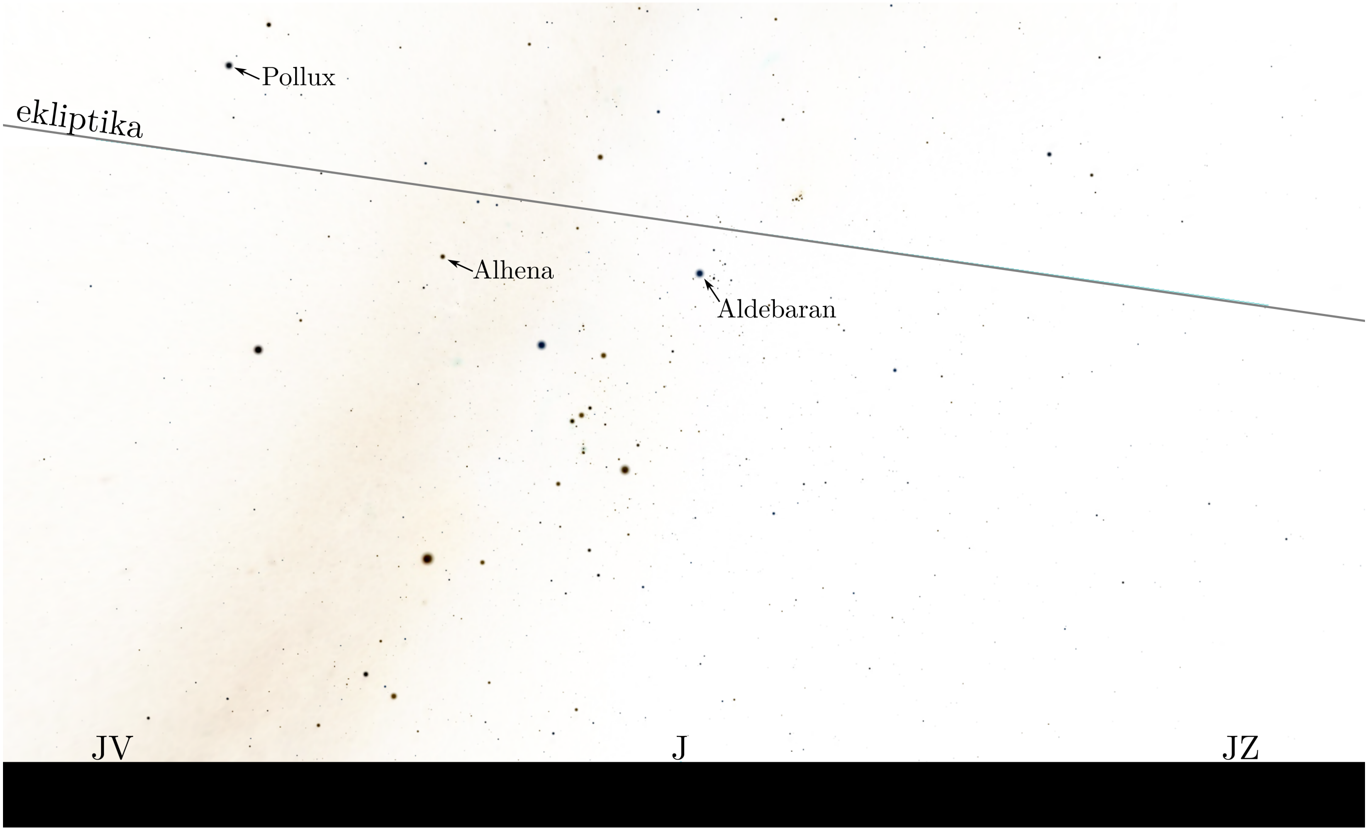
Vyhledej na noční obloze **Měsíc** a tři jasné hvězdy, které leží blízko jeho trajektorie. V našem případě se jedná o hvězdy **Pollux (β Gem)**, **Aldebaran (α Tau)** a **Alhena (γ Gem)**, které jsou vyznačeny v mapce (viz obrázek 3).

Změř úhlovou vzdálenost Měsíce od těchto hvězd. Při měření úhlové vzdálenosti Měsíce vůči vybraným hvězdám využijeme toho, že se Měsíc pohybuje po dráze, která prochází v těsné blízkosti vybraných hvězd. Proto stačí změřit jen úhlovou vzdálenost od dané hvězdy. Při měření úhlové vzdálenosti je vždy potřeba si představit mezi hvězdou a Měsícem přímku a po ní úhlovou vzdálenost měřit. Jinak bude změřena nesprávná (menší) úhlová vzdálenost. Jediná výjimka nastává v případě, že je Měsíc velmi blízko jedné z hvězd, pak budou dvě bližší hvězdy a Měsíc vytvářet spíše ostroúhlý trojúhelník. V takovém případě měř úhlovou vzdálenost po přímce, která spojuje tyto hvězdy.

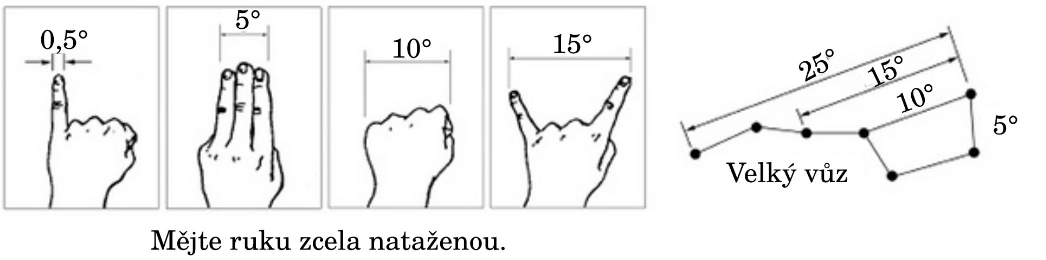
K měření úhlových vzdáleností stačí použít vlastní nataženou ruku. Šířka dlaně pak představuje přibližně 10°, vzdálenost mezi špičkou malíčku a špičkou palce na zcela rozevřené dlani je 20°. Šířka palce představuje 2,5° a nehet na malíčku je 0,5°, tedy přibližně průměr Měsíce na obloze. Pro další míry si prohlédni obrázek 4. Pro kontrolu lze také využít obrazec Velkého vozu, kde si můžeš celkem snadno zkontrolovat, jestli tvoje ruka ukazuje správné velikosti, nebo je potřeba si obecnou stupnici pro svou ruku poupravit.

Při každém měření úhlové vzdálenosti urči poziční úhel hvězdy; představ si ciferník se středem tvořeným Měsícem, jehož dvanáctka míří do zenitu (tedy nahoru), poziční úhel hvězdy určuje malá ručička. Zaznamenej hodinu (s přesností na půlhodiny), kam malá ručička ciferníku směřuje.

Krajské kolo 2021/22, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení



Obrázek 3: Mapa oblohy dne 1. 2. 2022 s vyznačenými hvězdami, černý pruh značí obzor.



Obrázek 4: Vlevo: Určení úhlové vzdálenosti pomocí prstů natažené ruky. **Vpravo:** Úhlové vzdálenosti mezi hvězdami obrazce Velkého vozu určené ke kontrole úhlů.

Až budeš mít uskutečněná obě pozorování, vypočítej, kolik dní mezi nimi uplynulo (hodiny a minuty převeď na dny s přesností na 4 desetinná místa). Pro každou vybranou hvězdu urči, o jaký úhel se změnila poloha Měsíce mezi prvním a druhým pozorováním; při počítání úhlové vzdálenosti vezmi v úvahu poziční úhel, který ti určí, zda budeš úhly sčítat, či odečítat. Vypočítanou úhlovou vzdálenost pro hvězdy vyděl počtem dní, které uplynuly mezi oběma pozorováními. Aritmetický průměr je pak průměrný denní pohyb Měsíce. Uveď ho s přesností na celé stupně. Zdůvodni, proč nemá smysl uvádět výsledek s větší přesností.

U každého pozorování zaznamenej údaje o poloze pozorovacího stanoviště (GPS souřadnice nebo adresu), datu a času pozorování (čas uváděj v SEČ s přesností na minuty).