Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Poloměr Siria

(max. 10 bodů)

Sirius (α CMa), nejjasnější hvězda na pozemské obloze, má vizuální hvězdnou velikost $m_\mathrm{v} = -1{,}47\,\mathrm{mag}$. Měřením jeho spektra lze zjistit, že jeho maximum vyzařování leží na vlnové délce $\lambda_\mathrm{max} = 290\,\mathrm{nm}$, a že se jedná o spektrální typ A1, pro který máme bolometrickou korekci $\mathrm{BC} = -0{,}08\,\mathrm{mag}$. Konečně můžeme změřit jeho paralaxu jako $\pi = 0{,}374''$. Využijte tato data k výpočtu poloměru R Siria, kterého modelujte jako absolutně černé těleso. Výsledek udejte v jednotkách poloměru Slunce.

Z Wienova zákona můžeme zjistit efektivní teplotu Siria jako

$$T = \frac{b}{\lambda_\mathrm{max}}\,,$$

kde $b \doteq 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$ je Wienova konstanta. Ze Stefanova-Boltzmannova zákona rovněž píšeme vztah pro zářivý výkon Siria

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4\,.$$

Zářivý výkon lze převést na absolutní bolometrickou hvězdnou velikost M Siria pomocí Pogsonovy rovnice

$$M - M_\odot = -2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot}\,,$$

kde $M_\odot$ je absolutní bolometrická hvězdná velikost Slunce a $L_\odot$ je zářivý výkon Slunce. Absolutní bolometrickou velikost Siria lze dále převést na vizuální bolometrickou velikost M_v jako

$$M_\mathrm{v} = M - \mathrm{BC}\,.$$

Konečně, odpovídající pozorovaná hvězdná velikost ve viditelném oboru splňuje

$$M_\mathrm{v} = m_\mathrm{v} + 5 + 5 \log \pi\,,$$

kde π je paralaxa Siria. Poloměr R Siria lze tedy postupně vyjádřit jako

$$R = \sqrt{\frac{L}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{10^{-0{,}4(M - M_\odot)} L_\odot}{4\pi\sigma} \left(\frac{\lambda_\mathrm{max}}{b}\right)^4} = \sqrt{\frac{10^{-0{,}4(m_\mathrm{v} + 5 + 5\log\pi + \mathrm{BC} - 4{,}75)} L_\odot}{4\pi\sigma} \left(\frac{\lambda_\mathrm{max}}{b}\right)^4}\,.$$

Číselně dostáváme $R \doteq 1{,}75 R_\odot$.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

B Spektroskopická dvojhvězda

(max. 10 bodů)

Astronomové zjistili, že čára Hα se ve spektru dvojhvězdy symetricky rozdvojuje na dvě komponenty s periodou $P = 1{,}34\,\mathrm{d}$. Komponenty se od střední polohy $\lambda_0 = 656{,}28\,\mathrm{nm}$ odchylují každá o max. hodnotu $\Delta\lambda = 0{,}31\,\mathrm{nm}$, přičemž jejich vzdálenost je harmonickou funkcí času. Vypočtěte celkovou hmotnost systému v jednotkách hmotnosti Slunce za předpokladu, že se na oběžnou rovinu dvojhvězdy díváme přesně z boku.

Ze zadání je zřejmé, že se jedná o binární systém, kde obě složky mají identickou hmotnost M a obíhají po kruhových drahách o stejném poloměru a kolem hmotného středu s periodou oběhu $T = 2P$. Oběžnou rychlost v složek zjistíme z Dopplerova vztahu

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c\,.$$

Odtud dostáváme

$$a = \frac{vT}{2\pi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\frac{cP}{\pi}\,.$$

Konečně, z 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{(2a)^3}{(2P)^2} = \frac{2GM}{4\pi^2}\,,$$

a tedy

$$M = \frac{a^3}{P^2}\frac{4\pi^2}{G} = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^3 \frac{4Pc^3}{\pi G} \doteq 3{,}14 M_\odot\,.$$

C Pohyb komety

(max. 10 bodů)

Kometa zkřížila oběžnou dráhu Země kolem Slunce pod úhlem $\phi = 60°$ při rychlosti $u = \sqrt{2GM_\odot/r_\mathrm{Z}}$, kde r_Z je poloměr oběžné dráhy Země (a kde úhel ϕ definujeme jako úhel mezi tečnami k oběžným drahám Země a komety v průsečíku). Určete vzdálenost komety od Slunce v perihelu v astronomických jednotkách.

Nápověda: bude se vám hodit, že veličiny

$$l = rv\sin\alpha\,,$$
$$h = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\odot}{r}\,,$$

se v průběhu pohybu komety po eliptické dráze zachovávají (jedná se o moment hybnosti a energii na jednotku hmotnosti). Zde jsme označili v velikost okamžité rychlosti komety ve dráze, r velikost průvodiče a α úhel mezi směrem okamžité rychlosti a průvodičem.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Ze zákonů zachování píšeme

$$h = r_Z u \cos\phi = r_p v_p \,,$$
$$l = \frac{1}{2}u^2 - \frac{GM_\odot}{r_Z} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM_\odot}{r_p} \,,$$

odkud dostáváme

$$2GM_\odot r_p - (r_Z u \cos\phi)^2 = 0 \,,$$

a tedy

$$r_p = \frac{(r_Z u \cos\phi)^2}{2GM_\odot} = r_Z \cos^2\phi = \frac{1}{4} r_Z = 0{,}25\,\mathrm{au} \,.$$

D Zapadající hvězdy

(max. 10 bodů)

Pozorovatel (suchozemská želva) na neznámém místě na Zemi vidí zapadat hvězdu s deklinací $\delta_1 = 0°$ v 20:14 místního času. Ve 21:32 pak želví astronom viděl zapadat hvězdu se stejnou rektascenzí, ale s deklinací $\delta_2 = 34°$. Určete zeměpisnou šířku ϕ pozorovacího stanoviště a připojte kresbu želvy, jak se dívá oblohu.

Uvážíme sférický trojúhelník, který na obloze spojuje místa západu obou hvězd se severním světovým pólem. Úhlovou vzdálenost mezi místy západu hvězd označme jako x. Rovněž označme Δt rozdíl času západu hvězd. V tomto trojúhelníku můžeme psát sférickou sinovou větu

$$\frac{\sin\Delta t}{\sin x} = \frac{\sin\phi}{\sin(90° - \delta_2)} = \frac{\sin\phi}{\cos\delta_2} \,,$$

a také sférickou kosinovou větu

$$\cos(90° - \delta_2) = \sin\delta_2 = \cos x \cos 90° + \sin x \sin 90° \cos\phi = \sin x \cos\phi \,.$$

Odtud dostáváme

$$\sin\Delta t = \frac{\sin\phi}{\cos\delta_2}\sin x = \frac{\sin\phi}{\cos\delta_2}\frac{\sin\delta_2}{\cos\phi} = \tan\delta_2 \tan\phi$$

a tedy

$$\phi = \arctan\frac{\sin\Delta t}{\tan\delta_2} \doteq 26{,}3° \,.$$

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Dlouhé úlohy

E Ochlazování Země

(max. 20 bodů)

Předmětem této úlohy bude prozkoumat jeden ze způsobů, jak snížit průměrnou teplotu na povrchu Země.

a) Napište celkový výkon P záření od Slunce, který pohlcuje Země. Výsledek vyjádřete obecně pomocí zářivého výkonu Slunce $L_\odot$, vzdálenosti a Země od Slunce, poloměru Země R a albeda Země A.

Dostáváme

$$P = \frac{L_\odot}{4\pi a^2}\pi R^2(1-A)\,.$$

b) Za předpokladu nastolení termodynamické rovnováhy napište vztah pro rovnovážnou teplotu T Země.

Ze Stefanova-Boltzmannova zákona máme

$$\frac{L_\odot}{4\pi a^2}\pi R^2(1-A) = 4\pi R^2\sigma T^4\,,$$

a tedy

$$T = \left[\frac{L_\odot}{16\pi\sigma a^2}(1-A)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

c) Vypočtěte poměr $(T+\Delta T)/T$, kde ΔT je změna teploty, která odpovídá změně Δa vzdálenosti Země od Slunce.

Dostáváme

$$\frac{T+\Delta T}{T} = \sqrt{\frac{a}{a+\Delta a}}\,.$$

d) V případě, že $\Delta a/a \ll 1$, vyjádřete poměr $\Delta a/a$ přibližně jako násobek $\Delta T/T$.

Nápověda: Pro $x \ll 1$ platí $(1+x)^p \approx 1+px$ pro libovolné p.

Dostáváme

$$\frac{\Delta a}{a} \approx -2\frac{\Delta T}{T}\,.$$

e) Vypočtěte změnu vzdálenosti Země od Slunce (číselně v au), která by zapříčinila průměrné ochlazení Země o $\Delta T = 1\,°\mathrm{C}$. Vypočtěte odpovídající změnu oběžné periody Země v rocích. Jako průměrnou teplotu Země berte $T = 14\,°\mathrm{C}$.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Ze 3. Keplerova zákona píšeme

$$\left(\frac{a+\Delta a}{a}\right)^3 = \left(\frac{P+\Delta P}{P}\right)^2 ,$$

odkud přibližně máme

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a} \approx -3\frac{\Delta T}{T} .$$

Číselně dostáváme $\Delta T/T \doteq 0{,}003\,5$, a tedy $\Delta a \doteq 0{,}007\,\mathrm{au}$ a $\Delta P \doteq 0{,}01\,\mathrm{y}$.

Ve zbývající části úlohy se budeme zabývat orbitálním manévrem, který by Zemi převedl z kruhové dráhy o poloměru a na kruhovou dráhu o poloměru $a+\Delta a$. Tohoto lze dosáhnout pomocí Hohmannovy elipsy, která má periapsidu ve vzdálenosti a a apoapsidu ve vzdálenosti $a + \Delta a$ od Slunce.

f) Vypočtěte rychlost Δv_1, kterou musíme Zemi dodat ve směru jejího oběhu, aby začala obíhat po Hohmannove elipse.

Velkou poloosu Hohmannovy elipsy najdeme jako

$$a_\mathrm{H} = \frac{1}{2}(a + a + \Delta a) = a + \frac{1}{2}\Delta a .$$

Máme potom

$$\Delta v_1 = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a_\mathrm{H}}\right)} - v ,$$

tedy

$$\frac{\Delta v_1}{v} = \sqrt{2 - \frac{a}{a+\Delta a/2}} - 1 .$$

Přibližně lze psát

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_1}{v} &\approx \sqrt{2 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}\right)} - 1 \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a}} - 1 \\ &\approx \frac{1}{4}\frac{\Delta a}{a} \\ &\approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} . \end{aligned}$$

Číselně dostáváme $\Delta v_1 \doteq 50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

g) Vypočtěte rychlost Δv_2, kterou musíme Zemi udělit v apoapsidě Hohmannovy elipsy, aby přešla na kruhovou dráhu o poloměru $a + \Delta a$.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Dostáváme

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a+\Delta a}} - \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{a+\Delta a} - \frac{1}{a_\mathrm{H}}\right)}\,,$$

tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta v_2}{v} &= \sqrt{\frac{a}{a+\Delta a}} - \sqrt{\frac{2a}{a+\Delta a} - \frac{a}{a+\Delta a/2}} \\
&\approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} - \sqrt{2(1-\frac{\Delta a}{a}) - (1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a})} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} - \sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{\Delta a}{a}} \\
&\approx 1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} - \left(1 - \frac{3}{4}\frac{\Delta a}{a}\right) \\
&\approx \frac{1}{4}\frac{\Delta a}{a} \\
&\approx -\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}\,.
\end{aligned}$$

Číselně tedy opět dostáváme $\Delta v_2 \doteq 50\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

h) Jakou celkovou kinetickou energii na jednotku hmotnosti jsme museli Zemi dodat? Porovnejte ji se změnou celkové mechanické energie $-GM_\odot/(2a)$.

Označme $\Delta v = \Delta v_1 = \Delta v_2$. Celkem jsme Zemi dodali kinetickou energii na jednotku hmotnosti

$$\frac{1}{2}(v+2\Delta v)^2 - \frac{1}{2}v^2 \approx 2v\Delta v \approx -\frac{GM_\odot}{a}\frac{\Delta T}{T}\,,$$

zatímco změnu celkové mechanické energie spočteme jako

$$-\frac{GM_\odot}{2(a+\Delta a)} + \frac{GM_\odot}{2a} \approx \frac{GM_\odot}{2a}\frac{\Delta a}{a} \approx -\frac{GM_\odot}{a}\frac{\Delta T}{T}\,.$$

Dle očekávání dostáváme rovnost.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

F Výška atmosféry

(max. 20 bodů)

V této úloze si ukážeme, jak lze určit efektivní výšku H atmosféry Země (ideální koule o poloměru R) na základě měření indexu lomu vzduchu n u povrchu a určení atmosférické refrakce ρ u obzoru.

Z naměřených hodnot (viz níže) víme, že $n = 1 + \nu$, kde $0 < \nu \ll 1$, a také, že $\rho \ll 1$ (vyjádřeno v radiánech). Rovněž zavedeme parametr $\chi \equiv H/R$ a budeme předpokládat, že $\nu \ll \chi \ll 1$. V průběhu řešení úlohy se vám budou hodit následující přibližné vztahy

$$(1+x)^p \approx 1 + px\,,$$
$$\sin x \approx x\,,$$
$$\cos x \approx 1 - x^2/2\,,$$

pro libovolné $x \ll 1$ a libovolné p.

V první části úlohy budeme předpokládat velmi zjednodušený model, kdy atmosféru Země nahradíme sférickou slupkou o výšce H a konstantním indexem lomu $n = 1 + \nu$. Uvažujme pozorovatele na povrchu Země a paprsek, který je tečný k povrchu Země.

a) Napište přesný výraz pro sinus úhlu dopadu β paprsku na rozhraní mezi atmosférou a vesmírem pomocí parametru χ.

Dostáváme

$$\sin\beta = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{1+\chi}\,.$$

b) Napište přiblížení tohoto výrazu pro $\chi \ll 1$. Ponechte pouze členy obsahující první mocninu χ.

Dostáváme

$$\sin\beta \approx 1 - \chi\,.$$

c) Vyjádřete úhel β přibližně jako malou odchylku od $\pi/2$ pomocí parametru χ.

Nápověda: Aproximujte $\cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$.

Víme, že úhel $\pi/2 - \beta$ bude velmi malý, proto píšeme

$$1 - \chi \approx \sin\beta = \cos(\tfrac{\pi}{2} - \beta) \approx 1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2} - \beta)^2\,,$$

odkud máme

$$\beta \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\chi}\,.$$

d) Určete odpovídající úhel lomu α paprsků na tomto rozhraní pomocí χ a ν. Opět napište výsledek v přibližném tvaru jako malou odchylku od $\pi/2$. Použijte rovněž přiblížení, kdy $\nu \ll \chi$.

Ze Snellova zakona máme

$$\sin\alpha = n\sin\beta\,,$$

tedy

$$1-\tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)^2 \approx (1+\nu)(1-\chi) \approx 1-(\chi-\nu)\,.$$

Odtud máme přibližně

$$\alpha \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2(\chi-\nu)} \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\chi}\left(1-\frac{\nu}{2\chi}\right).$$

e) Napište přibližný výraz pro atmosférickou refrakcí ρ pomocí χ a ν.

Dostáváme

$$\rho = \alpha-\beta \approx \sqrt{2\chi} - \sqrt{2\chi}\left(1-\frac{\nu}{2\chi}\right) = \frac{\nu}{\sqrt{2\chi}}\,.$$

f) Za použití číselných hodnot $\nu = 0{,}000\,293$, $\rho = 34'$ a $R = 6\,378\,\mathrm{km}$ určete odpovídající hodnotu H výšky slupky.

Máme

$$H = \chi R \approx \frac{\nu^2}{2\rho^2}R \doteq 2{,}6\,\mathrm{km}\,.$$

Výsledek tohoto hrubého modelu není příliš uspokojivý. Ve zbytku úlohy proto uvážíme poněkud přesnější model, kdy si atmosféru představíme jako sférickou slupku o tloušťce H, kde index lomu klesá lineárně od hodnoty $1+\nu$ u povrchu Země až k hodnotě 1 na rozhraní s vesmírem.

Pro účel výpočtu si atmosféru rozdělíme na velký počet N koncentrických slupek, každá o tloušťce H/N, kde v k-té slupce bude index lomu $n_k = 1+(N-k+1)\nu/N$ pro $k = 1,\dots,N$ a hodnota $k = N+1$ odpovídá vesmíru. Podobnými kroky, jako jsme učinili v první části úlohy (tj. geometrie trojúhelníku a Snellův zákon), pak lze ukázat, že příspěvek ρ_k k celkovému refrakčnímu úhlu, který vzniká při lomu paprsků mezi k-tou a $(k+1)$-tou slupkou, lze přibližně vyjádřit jako

$$\rho_k \approx \frac{\nu}{\sqrt{2k\chi N}} \qquad \text{pro } k = 1,\dots,N\,.$$

Celkový refrakční úhel ρ pak dostaneme součtem refrakčních úhlů $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_N$.

g) Využijte slupkový model výše k přesnějšímu výpočtu výšky H atmosféry.

Nápověda: Proveďte výpočet postupně pro větší a větší hodnoty N a pokuste se uhádnout výsledek pro $N\to\infty$.

Pro danou hodnotu N dostáváme

$$\rho = \frac{\nu}{\sqrt{2\chi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

kde experimentováním s různými hodnotami N si všimneme, že

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \to 2$$

pro $N \to \infty$. Pro nekonečný počet slupek tedy máme

$$\rho = \frac{\nu}{\sqrt{\chi}}\sqrt{2}\,,$$

a tedy

$$H \approx 2\frac{\nu^2}{\rho^2}R \doteq 10{,}3\,\mathrm{km}\,.$$