Astronomická olympiáda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
FYZIKÁLNÍ ÚSTAV V OPAVĚ

Česká astronomická společnost
www.astro.cz
olympiada.astro.cz

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Analýza dat
Úlohy

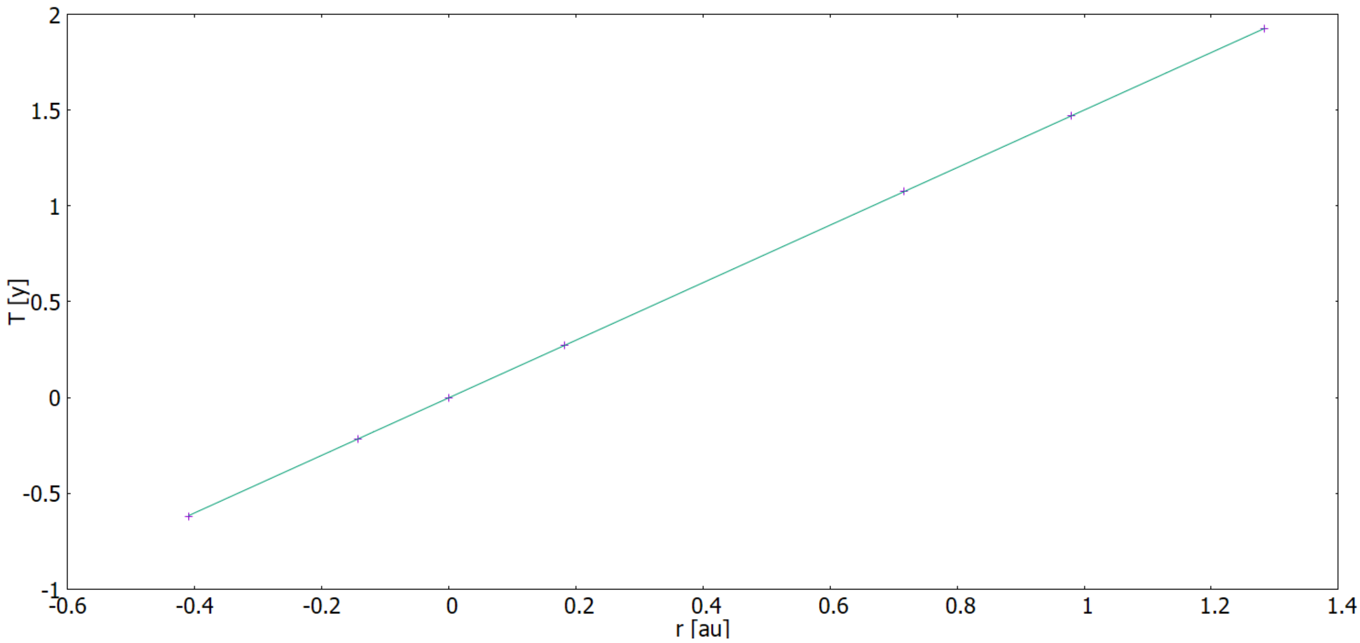
G Gravitační zákon

(max. 20 bodů)

V tabulce 1 jsou uvedeny některé údaje o vybraných planetách sluneční soustavy. Předpokládejme, že dané planety obíhají kolem Slunce po kruhových drahách.

a) Vyneste do grafu hodnoty $\log T$ v závislosti na hodnotách $\log r$.

Výsledek vidíme na obrázku 1.



Obrázek 1: Graf závislosti $\log T$ na $\log r$.

b) Pomocí grafu z předchozí části určete hodnotu číselného parametru p ve vyjádření Newtonova gravitačního zákona

$$a_{\mathrm{g}} = \frac{GM}{r^p}\,,$$

kde a_{g} je gravitační zrychlení ve vzdálenosti r od gravitujícího tělesa. Určete rovněž hodnotu GM pro Sluneční soustavu.

Jelikož gravitační síla působí jako dostředivá síla umožňující pohyb planet kolem Slunce po (přibližně) kruhových drahách, dostáváme rovnost

$$\frac{GM}{r^p} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r\,,$$

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

odkud máme

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^{p+1} \,.$$

Logaritmováním dostáváme

$$\log T = \frac{p+1}{2} \log r + \frac{1}{2} \log \frac{4\pi^2}{GM} \,.$$

Proložíme-li daty přímku, dostaneme směrnici $(p+1)/2 \doteq 1{,}5$ a tedy $p = 2$. Navíc dostaneme konstantní člen, který je přibližně roven nule. Odtud plyne, že měříme-li vzdálenost v au a čas v rocích, potom $GM = 4\pi^2$. V jednotkách SI bychom dostali $1{,}3 \cdot 10^{20}\,\mathrm{m^3 \cdot s^{-2}}$.

Tabulka 1: Data k úloze G (kde r velikost průvodiče kruhové oběné dráhy a T je perioda oběhu).

Planeta	$\frac{r}{\mathrm{au}}$	$\frac{T}{\mathrm{y}}$
Merkur	0,39	0,24
Venuse	0,72	0,61
Zeme	1,00	1,00
Mars	1,52	1,88
Jupiter	5,20	11,86
Saturn	9,55	29,46
Uran	19,20	84,01

H Nad povrchem Marsu

(max. 20 bodů)

Orbitální stanice obíhá kolem Marsu (hmotnost $M = 6{,}417 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}$, siderická perioda rotace $P_{\mathrm{sid}} = 24\,\mathrm{h}\,37\,\mathrm{min}$) v rovině jeho rovníku. Stanice má vypnuty všechny motory, takže se pohybuje čistě pod vlivem gravitace planety. Stanice jednou za $\Delta t = 30\,\mathrm{min}$ fotografuje oblast na povrchu Marsu přímo „pod sebou“ (v nadiru vzhledem k povrchu Marsu). V tabulce 3 jsou uvedeny časy t pořízení jednotlivých snímků (měřeno od okamžiku pořízení prvního snímku) společně s hodnotou délkové souřadnice λ středu každého snímku. Označme $\Delta\lambda$ změnu souřadnice λ mezi sousedními snímky.

a) Vypočtěte hodnoty $\omega_{\mathrm{syn}} = \Delta\lambda/\Delta t$ (v jednotkách $\mathrm{deg \cdot h^{-1}}$) pro každý interval mezi pořízením sousedních snímků a zapište je do tabulky v odpovědním archu k příslušným hodnotám t_{c} středů odpovídajících intervalů.

Vypočtené hodnoty vidíme v tabulce 2.

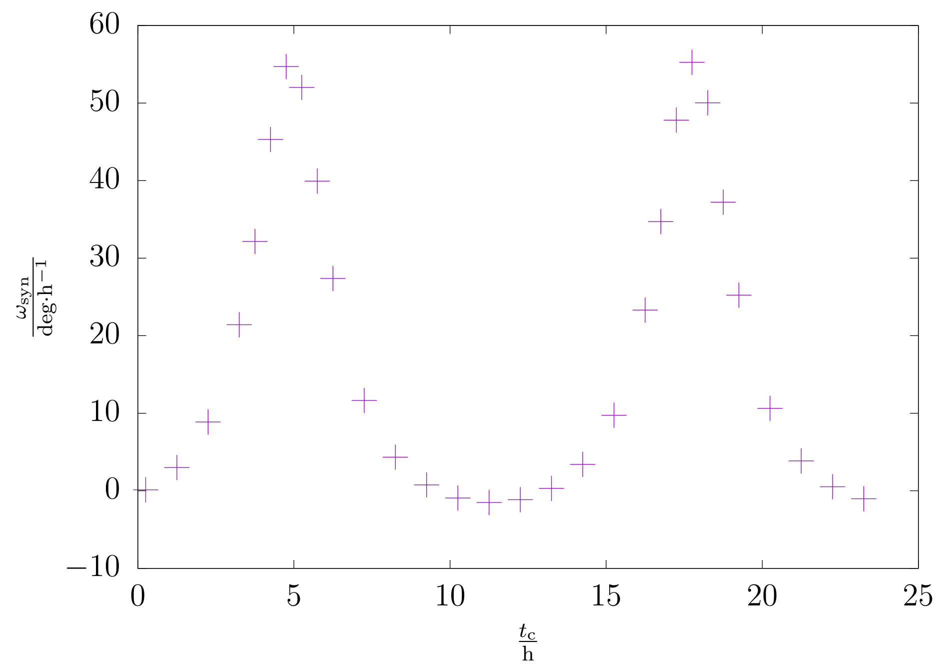
b) Vyneste hodnoty ω_{syn} do grafu v závislosti na t_{c}.

Pro účely úkolů c) a e) potřebujeme co nejpřesněji znát polohy maxim a minim závislosti ω_{syn} v závislosti na t_{c}. Minima jsou pokryta dostatečně hustě, zde tedy můžeme některé body vynechat. Naopak potřebujeme co nejhustší pokrytí oblastí kolem maxim, která jsou velmi ostrá, takže zde žádné body nevynecháváme. Výsledný graf (vykreslený ze 30 datových bodů) vidíme na obrázku 2.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 2: Vypočtené hodnoty ω_{syn} pro jednotlivá t_{c}.

$\frac{t_c}{\mathrm{h}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{syn}}}{\mathrm{deg\cdot h^{-1}}}$	$\frac{t_c}{\mathrm{h}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{syn}}}{\mathrm{deg\cdot h^{-1}}}$	$\frac{t_c}{\mathrm{h}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{syn}}}{\mathrm{deg\cdot h^{-1}}}$	$\frac{t_c}{\mathrm{h}}$	$\frac{\omega_{\mathrm{syn}}}{\mathrm{deg\cdot h^{-1}}}$
0,25	0,12	6,25	27,38	12,25	-1,14	18,25	50,02
0,75	1,30	6,75	18,06	12,75	-0,56	18,75	37,22
1,25	3,00	7,25	11,64	13,25	0,32	19,25	25,24
1,75	5,42	7,75	7,32	13,75	1,60	19,75	16,56
2,25	8,88	8,25	4,34	14,25	3,42	20,25	10,64
2,75	13,94	8,75	2,24	14,75	6,02	20,75	6,62
3,25	21,42	9,25	0,76	15,25	9,74	21,25	3,86
3,75	32,14	9,75	-0,26	15,75	15,22	21,75	1,90
4,25	45,30	10,25	-0,92	16,25	23,30	22,25	0,52
4,75	54,70	10,75	-1,34	16,75	34,70	22,75	-0,42
5,25	52,00	11,25	-1,50	17,25	47,80	23,25	-1,02
5,75	39,94	11,75	-1,42	17,75	55,26		



Obrázek 2: Graf závislosti ω_{syn} na t_{c}.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Poznámka: nemusíte vynášet všechny datové body, stačí vynést pouze ty hodnoty, které se hodí k co nejpřesnějšímu určení veličin v úkolech c) a e). Vyneste avšak alespoň 25 datových bodů.

c) Určete co nejpřesněji periodu oběhu P (v hodinách) a velkou poloosu a (v km) dráhy sondy.

Graf na obrázku 2 vykazuje 2 maxima (periapsidy) a jedno minimum (apoapsida), kolem kterých od oka proložíme křivky. Odtud odhadneme polohy maxim jako $t_{\mathrm{max},1} \doteq 5{,}0\,\mathrm{h}$ a $t_{\mathrm{max},2} \doteq 17{,}9\,\mathrm{h}$. Polohu minima odhadneme jako $t_{\mathrm{min}} \doteq 11{,}3\,\mathrm{h}$. Odtud získáme dva nezávislé odhady periody $T_1 = t_{\mathrm{max},2} - t_{\mathrm{max},1} \doteq 12{,}9\,\mathrm{h}$ a $T_2 = 2(t_{\mathrm{min}} - t_{\mathrm{max},1}) \doteq 12{,}7\,\mathrm{h}$. Jako výslednou hodnotu periody vezmeme jejich aritmetický průměr, tedy $T \doteq 12{,}8\,\mathrm{h}$. Velikost velké poloosy a dopočteme z 3. Keplerova zákona jako

$$a = \left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq 13\,200\,\mathrm{km}\,.$$

d) Napište obecný vztah, který převádí hodnoty ω_{syn} na hodnoty ω_{sid} siderické úhlové rychlosti sondy vzhledem ke středu Marsu.

Hodnoty převedeme podle vztahu

$$\omega_{\mathrm{sid}} = \omega_{\mathrm{syn}} + \frac{360^\circ}{P_{\mathrm{sid}}} \doteq \omega_{\mathrm{syn}} + 14{,}62\,\mathrm{deg}\cdot\mathrm{h}^{-1}\,.$$

V dalším vycházejte ze vztahu $r_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}} = r_{\mathrm{a}}v_{\mathrm{a}}$, kde r_{p}, resp. r_{a} jsou velikosti periapsidy, resp. apoapsidy dráhy sondy a v_{p}, resp. v_{a} jsou velikosti rychlosti sondy v periapsidě, resp. apoapsidě její dráhy.

e) Určete co nejpřesněji numerickou excentricitu e a délky r_{p} a r_{a} apsid dráhy sondy.

Platí $r_{\mathrm{p}} = a(1-e)$ a $r_{\mathrm{a}} = a(1+e)$. Rovněž můžeme psát $v_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{sid,p}}r_{\mathrm{p}}$ a $v_{\mathrm{a}} = \omega_{\mathrm{sid,a}}r_{\mathrm{a}}$, takže

$$\frac{\omega_{\mathrm{sid,p}}}{\omega_{\mathrm{sid,a}}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad e = \frac{\sqrt{\omega_{\mathrm{sid,p}}} - \sqrt{\omega_{\mathrm{sid,a}}}}{\sqrt{\omega_{\mathrm{sid,p}}} + \sqrt{\omega_{\mathrm{sid,a}}}}\,.$$

Numerickou excentricitu lze tedy určit z odhadů hodnot ω_{sid} v periapsidě a apoapsidě dráhy sondy. Z grafu na obrázku 2 odečteme (po přičtení korekce z úkolu d)) $\omega_{\mathrm{sid,p}} \doteq 71\,\mathrm{deg}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ a $\omega_{\mathrm{sid,a}} \doteq 13\,\mathrm{deg}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Dostáváme pak $e \doteq 0{,}40$, $r_{\mathrm{p}} \doteq 7\,900\,\mathrm{km}$ a $r_{\mathrm{a}} \doteq 18\,500\,\mathrm{km}$.

Finále 2021/22, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 3: Časy pořízení a souřadnice středu jednotlivých snímků.

$\frac{t}{\text{h}}$	$\frac{\lambda}{\text{deg}}$	$\frac{t}{\text{h}}$	$\frac{\lambda}{\text{deg}}$	$\frac{t}{\text{h}}$	$\frac{\lambda}{\text{deg}}$	$\frac{t}{\text{h}}$	$\frac{\lambda}{\text{deg}}$
0,0	–159,09	6,0	–20,01	12,0	13,14	18,0	110,98
0,5	–159,03	6,5	–6,32	12,5	12,57	18,5	135,99
1,0	–158,38	7,0	2,71	13,0	12,29	19,0	154,60
1,5	–156,88	7,5	8,53	13,5	12,45	19,5	167,22
2,0	–154,17	8,0	12,19	14,0	13,25	20,0	175,50
2,5	–149,73	8,5	14,36	14,5	14,96	20,5	–179,18
3,0	–142,76	9,0	15,48	15,0	17,97	21,0	–175,87
3,5	–132,05	9,5	15,86	15,5	22,84	21,5	–173,94
4,0	–115,98	10,0	15,73	16,0	30,45	22,0	–172,99
4,5	–93,33	10,5	15,27	16,5	42,10	22,5	–172,73
5,0	–65,98	11,0	14,60	17,0	59,45	23,0	–172,94
5,5	–39,98	11,5	13,85	17,5	83,35	23,5	–173,45