Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Země z dálky

(max. 10 bodů)

V jaké největší úhlové vzdálenosti α od hvězdy s hvězdnou velikostí $m = 4{,}0\,\mathrm{mag}$ bychom mohli pozorovat planetu, na kterou dopadá stejné množství záření jako na Zemi?

Z Pogsonovy rovnice plyne

$$m - m_\odot = -2{,}5 \log \frac{\Phi}{K_\odot} \,,$$

kde Φ je zářivý tok, který k nám od hvězdy přichází, $m_\odot$ je pozorovaná hvězdná velikost Slunce a $K_\odot$ je solární konstanta. Dále můžeme psát

$$\Phi = \frac{L}{4\pi d^2} \,,$$

kde L je zářivý výkon hvězdy a d je její vzdálenost od nás. Mají-li na planetě panovat podobné klimatické podmínky jako na Zemi, musí od hvězdy přijímat podobný zářivý tok jako Země. Označíme-li r vzdálenost planety od hvězdy, musí platit

$$L = 4\pi r^2 K_\odot \,,$$

a tedy

$$\Phi = K_\odot \alpha^2 \,,$$

kde $\alpha = r/d$ jsme označili úhel, pod kterým vidíme poloměr oběžné dráhy planety. Po dosazení zpět do Pogsonovy rovnice tedy máme

$$m - m_\odot = -5 \log \alpha \,,$$

neboli

$$\alpha = 10^{-\frac{m - m_\odot}{5}} \,.$$

Číselně $\alpha \doteq 0{,}15''$.

B Černé záření

(max. 10 bodů)

Určete vlnovou délku $\lambda_{\max}$ maxima Hawkingova záření v násobcích Schwarzschildova poloměru R_S. Teplotu Hawkingova záření spočítáme jako $T_\mathrm{H} = \hbar c^3/(8\pi G M k_\mathrm{B})$, kde M je hmotnost černé díry.

Schwarzschilduv poloměr spočteme jako

$$R_\mathrm{S} = \frac{2GM}{c^2}\,.$$

Z Wienova posunovacího zákona píšeme

$$\lambda_\mathrm{max} = \frac{b}{T_\mathrm{H}} = \frac{8\pi G M k_\mathrm{B} b}{\hbar c^3} = \frac{4\pi k_\mathrm{B} b}{\hbar c} R_\mathrm{S}\,.$$

Koeficient stojící před Schwarzschildovym poloměrem můžeme vyčíslit za použití hodnoty $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}$, dostaneme

$$\lambda_\mathrm{max} \approx 16 R_\mathrm{S}\,.$$

Alternativně si můžeme vzpomenout, že z Planckovy křivky lze odvodit

$$b = \frac{2\pi\hbar c}{x k_\mathrm{B}}\,,$$

kde x lze vyjádřit pomocí hodnoty Lambertovy W-funkce. Numericky máme $x = 4{,}965\ldots$, takže

$$\frac{\lambda_\mathrm{max}}{R_\mathrm{S}} = \frac{8\pi^2}{x} = 15{,}902\ldots\,.$$

C Výbuch sopky

(max. 10 bodů)

Dne 15. ledna 2022 explodovala podmořská sopka Hunga Tonga–Hunga Ha'apai v jižním Pacifiku. Důsledky této erupce se projevily i na měření atmosférického tlaku na stanici ČHMU v Praze-Libuši, kde byla první tlaková vlna registrována týž den v 19:29. Druhá tlaková vlna přišla z opačného směru přesně o 6 hodin později, tedy následující den v 01:29 ráno. Předpokládejte, že se vlna šíří rychlostí zvuku $c_\mathrm{s} = 343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

a) Vypočtěte vzdálenost d sopky Hunga Tonga–Hunga Ha'apai od Prahy.

Rozdíl vzdáleností, které dvě příchozí vlny urazily, činí $(o_\oplus - d) - d = o_\oplus - 2d$, kde $o_\oplus$ jsme označili obvod Země. Označíme-li $\Delta t = 6\,\mathrm{h}$ rozdíl příchozích časů, máme tedy

$$d = \frac{1}{2}(o_\oplus - c_\mathrm{s}\Delta t) \doteq 16\,330\,\mathrm{km}\,.$$

Dále předpokládejme, že se podařilo určit azimut $A = 33{,}8°$ směru, odkud přišla první rázová vlna (měřeno od severu). Geografické souřadnice stanice Praha-Libuš jsou $\phi_\mathrm{P} = 50{,}0077°\,\mathrm{N}$ a $\lambda_\mathrm{P} = 14{,}4467°\,\mathrm{E}$.

b) Určete geografické souřadnice $(\phi_\mathrm{s}, \lambda_\mathrm{s})$ sopky.

Z kosinové věty pro sférický trojúhelník Praha – sopka – severní pól dostáváme

$$\sin\phi_s = \sin\phi_P \cos\frac{d}{R_\oplus} + \cos\phi_P \sin\frac{d}{R_\oplus}\cos A\,,$$

číselně tedy $\phi_s \doteq -20{,}3°$. Ze sinové věty potom máme

$$\sin(\lambda_s - \lambda_P) = \frac{\sin\frac{d}{R_\oplus}}{\cos\phi_s}\sin A\,,$$

odkud spočteme $\lambda_s = 175{,}4°$.

D Eternal sunset

(max. 10 bodů)

Vypočtěte, jak by se musela změnit excentricita dráhy Země (při zachování hodnoty velké poloosy a periody rotace), aby se Slunce v nějaký okamžik začalo pohybovat na obloze od západu na východ. Uvažujte, že současná dráha Země je přesně kruhová. Určete rovněž velikost r_p průvodiče v perihelu nové dráhy v násobcích poloměru Slunce.

Nápověda: výslednou excentricitu e napište ve tvaru $e = 1 - \eta$, kde můžete očekávat $\eta \ll 1$.

Označme $\omega(r)$ okamžitou úhlovou rychlost průvodiče v závislosti na okamžité vzdálenosti r od centrálního tělesa. Ze zákona zachování momentu hybnosti (neboli 2. Keplerova zákona) píšeme

$$\omega(r)r^2 = \text{konst.}$$

Abychom určili konstantu na pravé straně předchozí rovnice, uvažme například průchod periapsidou. Zde máme $r_p = a(1-e)$ a

$$\omega_p r_p = v_p = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM\left[\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a}\right]} = \sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}}\,.$$

Dostáváme tedy

$$\omega(r)r^2 = a(1-e)\sqrt{\frac{GM}{a}\frac{1+e}{1-e}} = \sqrt{GMa(1-e^2)}\,.$$

Vzdálenost r od centrálního tělesa se mění v intervalu

$$a(1-e) \leqslant r \leqslant a(1+e)\,,$$

takže okamžitá úhlová rychlost průvodiče se mění v intervalu

$$\omega_0\left[\frac{1-e}{(1+e)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\omega \leqslant \omega \leqslant \omega_0\left[\frac{1+e}{(1-e)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

kde jsme označili

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$$

úhlovou rychlost pohybu po kruhové dráze s poloměrem a. Podmínky ze zadání budou splněny, bude-li platit, že maximální úhlová rychlost průvodiče vyrovná úhlovou rychlost ω_d rotace Země. Dosadíme-li zároveň $e = 1 - \eta$, máme tedy podmínku

$$\omega_0 \left[\frac{2-\eta}{\eta^3}\right]^{\frac{1}{2}} = \omega_\mathrm{d} \,,$$

neboli (označme $x = (\omega_0/\omega_\mathrm{d})^2$)

$$\eta^3 = 2x - \eta x \approx 2x \,,$$

kde jsme si uvědomili, že $x, \eta \ll 1$, takže ηx můžeme vzhledem k x zanedbat. Konečně tedy máme

$$e \approx 1 - (2x)^{\frac{1}{3}} = 1 - 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\omega_0}{\omega_\mathrm{d}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 - 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T_\mathrm{d}}{T_0}\right)^{\frac{2}{3}} ,$$

kde $T_\mathrm{d}/T_0 = 1/365$. Číselně tedy $e \doteq 0{,}975$. Pro velikost průvodiče v perihelu pak dostaneme $r_\mathrm{p} = a(1-e) \doteq 5{,}3 R_\odot$.

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

E Lagrangeův bod L2

(max. 20 bodů)

V této úloze se budeme zabývat pohybem družice o hmotnosti μ v okolí Lagrangeova bodu L2 soustavy dvou těles o hmotnostech M a m. Pro jednoduchost budeme uvažovat hierarchii hmotností $M \gg m \gg \mu$. Zavedeme-li parametr $\lambda = m/M$, můžeme tedy předpokládat $\lambda \ll 1$.

a) Napište úhlovou frekvenci ω oběhu těles M a m kolem hmotného středu systému, pokud je dělí konstantní vzdálenost a. Výsledek vyjádřete pomocí G, M, a a parametru λ.

Z třetího Keplerova zákona píšeme

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{a^3}} = \sqrt{\frac{GM(1+\lambda)}{a^3}}\,.$$

b) Určete vzdálenosti R, resp. r tělesa M, resp. m od hmotného středu. Výsledky vyjádřete pomocí a a λ.

Z podmínek $MR = mr$ a $r + R = a$ plyne

$$R = \frac{m}{M+m}a = \frac{\lambda}{1+\lambda}a\,,$$
$$r = \frac{M}{M+m}a = \frac{1}{1+\lambda}a\,.$$

Lagrangeovy body definujeme jako místa, kde se v neinerciální vztažné soustavě korotující se systémem těles m a M vyrovná celková gravitační síla působící na testovací tělísko μ s odstředivou silou. Lagrangeův bod L2 se nachází na spojnici těles M a m za méně hmotným tělesem m. Označme vzdálenost bodu L2 od tělesa m jako d a zaveďme parametr $\delta = d/a$. Pro $M \gg m$ můžeme předpokládat, že $d \ll a$.

c) Vyjádřete odstředivé zrychlení $a_{\mathrm{o,L2}}$ působící na testovací tělísko umístěné v L2 pomocí G, M, a, λ a δ. Zanedbejte členy, kde mezi sebou násobíme malé veličiny.

Máme

$$a_{\mathrm{o,L2}} = \omega^2(d+r) = \frac{G(M+m)}{a^3}(d+r) = \frac{GM(1+\lambda)}{a^2}\left(\delta + \frac{1}{1+\lambda}\right) = \frac{GM}{a^2}(1+\delta(1+\lambda))\,.$$

Člen s $\delta\lambda$ můžeme zanedbat, dostáváme tedy

$$a_{\mathrm{o,L2}} \approx \frac{GM}{a^2}(1+\delta)\,.$$

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Vyjádřete celkové gravitační zrychlení $a_{\mathrm{g,L2}}$ působící na testovací tělísko μ umístěné v L2 pomocí G, M, a, λ a δ. Ke zjednodušení příspěvků od těžšího z těles použijte binomickou aproximaci $(1+x)^p \approx 1 + px$, která platí pro $x \ll 1$.

Dostáváme

$$a_{\mathrm{g,L2}} = \frac{GM}{(d+a)^2} + \frac{Gm}{d^2} = \frac{GM}{a^2}(1+\delta)^{-2} + \frac{GM}{a^2}\frac{\lambda}{\delta^2} \approx \frac{GM}{a^2}(1-2\delta) + \frac{GM}{a^2}\frac{\lambda}{\delta^2}\,.$$

e) Použijte vyrovnání celkové gravitační a odstředivé síly působící na statické testovací tělísko μ umístěné v L2 k vyjádření parametrů δ jako funkce λ: ukažte, ze platí $\delta = (\lambda/3)^{1/3}$.

Dostáváme

$$\frac{GM}{a^2}(1+\delta) = \frac{GM}{a^2}(1-2\delta) + \frac{GM}{a^2}\frac{\lambda}{\delta^2}$$

a tedy

$$\delta = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

f) Vypočtěte hodnotu parametru δ pro binární systémy Slunce–Země a Země–Měsíc.

Pro systém Slunce–Země dostáváme hodnotu 0,01, pro soustavu Země–Měsíc máme 0,16.

g) Pro oba tyto binární systémy určete rovněž hodnotu vzdálenosti d bodu L2 od méně hmotného tělesa.

Vynásobením hodnot δ odpovídajícími hodnotami a dostaneme $1{,}50 \cdot 10^6$ km a 61 600 km.

h) Porovnejte úhlové velikosti α_{Z} a α_{M} Země a Měsíce tak, jak by je viděl pozorovatel z bodu L2 systému Země–Měsíc.

Pro úhlový průměr Měsíce dostáváme $\alpha_{\mathrm{M}} \doteq 3{,}2°$, zatímco úhlový průměr Země by činil $\alpha_{\mathrm{Z}} \doteq 1{,}6°$. Země by se tedy z okolí bodu L2 jevila přibližně dvakrát menší než Měsíc, při pohledu přímo z bodu L2 ovšem bude vždy zakryta.

Pokud bychom testovací tělísko z bodu L2 trochu vychýlili, zjistili bychom, že ve směru spojnice M a m by mělo tendenci se od L2 vzdalovat a naopak v obou kolmých směrech by mělo tendenci se do L2 vrátit. Analýzu trajektorii kolem bodu L2 dále komplikuje fakt, že na pohybující se těleso v neinerciální vztažné soustavě působí Coriolisova síla. Vhodnou volbou počátečních podmínek lze získat orbity, které zůstávají v blízkosti L2: pro malé výchylky mají tyto trajektorie tvar trojrozměrných Lissajousovych obrazců, pro větší výchylky bychom dostali například tzv. halo orbitu, po které se pohybuje i nedávno vypuštěný dalekohled JWST.

Ve zbytku úlohy se budeme zabývat zjednodušenou situací, kdy testovací tělísko vychýlíme z bodu L2 kolmo na rovinu oběhu těles M a m o malou vzdálenost $h \ll d \ll a$: v takovém případě je Coriolisova síla vždy rovná nule. Zavedeme-li parametr $\chi = h/d$, můžeme tedy předpokládat $\chi \ll 1$.

i) Určete celkové zrychlení a_h, které na takto vychýlené testovací tělísko působí ve směru kolmém na oběžnou rovinu těles M a m. Za použití podmínky $\chi \ll 1$ napište výsledek v přibližném tvaru $-\Omega^2 h$, kde konstantu Ω vyjádřete jako násobek ω.

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Odstředivá síla působí vždy kolmo na rotační osu, ve směru kolmém na oběžnou rovinu tedy bude působit pouze gravitační síla. Dostáváme

$$\begin{aligned} a_h &= -\frac{GM}{[(d+a)^2+h^2]^{3/2}}h - \frac{Gm}{(d^2+h^2)^{3/2}}h \\ &= -\frac{GM\delta}{a^2[(1+\delta)^2+\delta^2\chi^2]^{3/2}}\chi - \frac{GM\lambda\delta^{-2}}{a^2(1+\chi^2)^{3/2}}\chi \\ &= -\frac{GM\delta}{a^2[(1+\delta)^2+\delta^2\chi^2]^{3/2}}\chi - \frac{3GM\delta}{a^2(1+\chi^2)^{3/2}}\chi\,, \end{aligned}$$

kde v posledním kroku jsme dosadili za λ z podmínky vyrovnání sil v bodě L2. Ponecháme-li pouze vedoucí příspěvek v δ a χ, dostaneme přibližně

$$a_h \approx -\frac{GM\delta}{a^2}\chi - \frac{3GM\delta}{a^2}\chi = -\frac{4GM}{a^3}h = -\Omega^2 h\,,$$

kde $\Omega = 2\omega$.

Uvažujme nyní družici, která se nachází v klidu v bodě L2 soustavy Země-Měsíc.

j) Vypočtěte minimální hodnotu V rychlosti, kterou musíme družici udělit ve směru kolmém na rovinu oběžné dráhy Měsíce kolem Země, aby mohla alespoň někdy komunikovat s jakýmkoliv místem na povrchu Země.

Pokud by družice zůstala v bodě L2, nemůže přímo komunikovat s žádným místem na Zemi, neboť z předchozích výsledků plyne, že Země se při pohledu z bodu L2 vždy nachází v zákrytu za Měsícem. Z výsledků předchozí části plyne, že udělíme-li družici rychlost kolmo na rovinu oběžné dráhy Měsíce, začne vykonávat harmonický pohyb s rovnovážnou polohou v bodě L2. Abychom splnili podmínku ze zadání, musí být amplituda A tohoto pohybu alespoň taková, aby z bodu obratu byla vidět jedna celá polokoule. Musí tedy platit

$$\frac{A}{d+a} = \frac{R_\mathrm{M}}{a}\,,$$

a tedy

$$A = R_\mathrm{M}(1+\delta) \ll d\,,$$

kde R_M jsme označili poloměr Měsíce a také jsme si všimli, že výchylka bude vždy o hodně menší než d (takže lze použít přiblížení $\chi \ll 1$). Pro amplitudu rychlostí harmonického pohybu zároveň platí $V = \Omega A$. Družici tedy musíme udělit rychlost

$$V = 2\omega R_\mathrm{M}(1+\delta) \doteq 11\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

F Breakthrough starshot

(max. 20 bodů)

V této úloze prozkoumáme možnosti mezihvězdného cestování pomocí laserového pohonu. Konkrétně budeme uvažovat velmi výkonný monochromatický laser o celkovém výkonu $P = 100\,\mathrm{GW}$ a vlnové délce $\lambda_0 = 650\,\mathrm{nm}$ umístěný na oběžné dráze Země. Celý výkon tohto laseru poté nasměrujeme do velmi lehké (klidová hmotnost $m = 10\,\mathrm{g}$) dokonale odrazivé plachty, kterou se takto pokusíme urychlit na nezanedbatelný zlomek rychlosti světla.

a) Určete celkový počet fotonů ν_0, které dopadají na plachtu za jednotku času, je-li plachta v klidu vzhledem ke zdroji laserového záření.

Dostáváme

$$\nu_0 = \frac{P\lambda_0}{hc} \doteq 3 \cdot 10^{29}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

b) Jak se tento výsledek změní, pokud se plachta pohybuje rychlostí v směrem od zdroje? Odpovídající počet fotonů za jednotku času označte jako ν.

Dostaneme

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{P\lambda_0}{hc}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

c) Pro $v \ll c$ vypočtete změnu hybnosti plachty za jednotku času (neboli sílu F, která na ni působí) pomocí P, c a v.

Ve vztažné soustavě plachty mají dopadající fotony kvůli Dopplerovu jevu hybnost

$$\frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Opětovným použitím Dopplerova vztahu získáme hybnost odražených fotonů v soustavě zdroje jako

$$-\frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \approx -\frac{h}{\lambda_0}\left(1 - 2\frac{v}{c}\right).$$

Každý jeden foton tedy změní při odrazu svoji hybnost v soutavě zdroje o $-2(h/\lambda_0)(1 - v/c)$, v důsledku čehož změní plachta svoji hybnost o $+2(h/\lambda_0)(1 - v/c)$. Posčítáme-li příspěvky od jednotlivých fotonů, dostaneme sílu

$$F = 2\nu\frac{h}{\lambda_0}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{2P}{c}\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2 \approx \frac{2P}{c}\left(1 - 2\frac{v}{c}\right).$$

d) Za použití vašeho nerelativistickeho výsledku pro sílu určete čas $t(V)$, který by trvalo urychlit plachtu na konečnou rychlost $V = 0{,}1c$. Výsledek vyjádřete v sekundách.

Síla závisí na rychlosti (a tedy na hybnosti), tudíž musíme závislost času na rychlosti počítat jako plochu pod lineární funkcí $\approx 1 + 2(v/c)$. Dostáváme

$$t(V) = \frac{mc^2}{2P}\frac{V}{c}\left(1 + \frac{V}{c}\right) = 495\,\mathrm{s}\,.$$

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Ve zbytku úlohy budeme počítat relativisticky. Budeme rovněž rozlišovat mezi časem naměřeným v soustavě spojené se zdrojem laserového záření a časem, který by naměřil pozorovatel spojený s plachtou (vlastní čas). Bude výhodné zavést kinematické parametry plachty

$$\alpha = \frac{p}{mc}\,, \qquad \beta = \frac{v}{c}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,,$$

kde p jsme označili (relativistickou) hybnost plachty. Jelikož $p = mv\gamma$, dostáváme vztah $\alpha = \beta\gamma$. Pro relativictickou energii plachty pak máme vztah

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = mc^2\sqrt{1+\alpha^2} = mc^2\gamma\,.$$

Zavedeme rovněž kinematický parametr fotonů $\delta = h/(mc\lambda_0)$.

Uvažujte srážku jediného fotonu o vlnové délce λ_0 s plachtou o rychlosti v a klidové hmotnosti m ve vztažné soustavě zdroje. Plachta se pohybuje směrem od zdroje fotonů. Po srážce se foton bude pohybovat směrem zpět ke zdroji a bude mít vlnovou délku λ_0', zatímco plachta se bude pohybovat s novou rychlostí v'.

e) Napište zákon zachování relativistické hybnosti a energie systému před a po srážce ve vztažné soustavě zdroje fotonů. Hybnosti a energie plachty a fotonů před a po srážce vyjádřete pomocí odpovídajících parametrů α, δ a α', δ'.

Pro zákon zachování hybnosti dostáváme

$$\alpha + \delta = \alpha' - \delta'\,,$$

kde jsme všechny členy vydělili faktorem mc, pro energii pak

$$\sqrt{1+\alpha^2} + \delta = \sqrt{1+\alpha'^2} + \delta'\,,$$

kde jsme všechny členy vydělili faktorem mc^2.

f) Vyjádřete $\alpha' - \alpha$ jako funkci α a δ. Konečný výsledek zjednodušte za předpokladu, že hybnosti jednotlivých fotonů jsou vždy velmi malé ve srovnání s hybností plachty (tedy $\delta \ll \alpha$). Ukažte, že vychází

$$\alpha' - \alpha = 2\delta\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}\,.$$

Sečtením předchozích dvou rovnic dostáváme

$$\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} + 2\delta = \alpha' + \sqrt{1+\alpha'^2}\,,$$

naopak jejich odečtením dostaneme

$$\alpha - \sqrt{1+\alpha^2} + 2\delta' = \alpha' - \sqrt{1+\alpha'^2}\,.$$

Vynásobíme-li tyto dvě rovnice mezi sebou, máme

$$2\delta\delta' + (\alpha - \sqrt{1+\alpha^2})\delta + (\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})\delta' = 0\,,$$

odkud lze vyjádřit δ' jako funkci α a δ. Ze zákona zachování hybnosti tedy konečně máme

$$\alpha' - \alpha = \delta + \delta' = 2\delta \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\delta}{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha+2\delta}\,.$$

Konečně, za použití $\delta \ll \alpha$ dostáváme

$$\alpha' - \alpha \approx 2\delta \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}\,.$$

g) Vyjádřete změnu parametru α plachty za jednotku času, který měříme v soustavě laseru (aneb sílu f ve vztažné soustavě zdroje normovanou faktorem mc). Uveďte rovněž přibližnou závislost $f(\alpha)$ pro $\alpha \gg 1$ (ultrarelativistický režim).

Za jednotku času v soustavě zdroje dopadá na plachtu pohybující se rychlostí v počet fotonů

$$\nu = \nu_0(1-\beta) = \frac{P}{mc^2}\frac{1}{\delta}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\,.$$

Dostáváme tedy

$$f(\alpha) = \frac{2P}{mc^2}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha} = \frac{2P}{mc^2}\frac{1}{1+2\alpha^2+2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \overset{\alpha\gg1}{\approx} \frac{P}{2mc^2}\alpha^{-2}\,.$$

h) Zopakujte výpočet z předchozí podúlohy pro případ, že čas měříme v soustavě spojené s plachtou. Výslednou sílu označte jako $\phi(\alpha)$.

Časové intervaly v soustavě spojené s plachtou jsou dané prenasobenim časových intervalů v soustavě zdroje faktorem $1/\gamma = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$. Máme tedy

$$\phi(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}f(\alpha) = \frac{2P}{mc^2}\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{1+2\alpha^2+2\alpha\sqrt{1+\alpha^2}} \overset{\alpha\gg1}{\approx} \frac{P}{2mc^2}\alpha^{-1}\,.$$

Předpokládejme, že chceme plachtu urychlit na ultrarelativistickou konečnou rychlost $V = 0{,}999c$.

i) Vypočtěte odpovídající hodnotu parametru $\alpha(V)$.

Mame

$$\alpha(V) = \frac{\beta(V)}{\sqrt{1-\beta(V)^2}} = \frac{0{,}999}{\sqrt{1-0{,}999^2}} \doteq 22{,}3 \gg 1\,.$$

j) Určete časy t, resp. τ potřebné pro urychlení plachty na tuto rychlost z pohledu klidové soustavy zdroje fotonů, resp. klidové soustavy plachty. Výsledky vyjádřete ve dnech.

Dostáváme

$$t(V) \overset{\alpha\gg1}{\approx} \frac{2}{3}\frac{mc^2}{P}\alpha(V)^3 \doteq 775\,\mathrm{d}\,,$$

a

$$\tau(V) \overset{\alpha\gg1}{\approx} \frac{mc^2}{P}\alpha(V)^2 \doteq 52\,\mathrm{d}\,.$$

Nápověda: Plochu pod grafem paraboly $y = x^2$ od $x = 0$ po $x = a$ spočteme jako $(1/3)a^3$.

Poznámka: přesné závislosti $t(V)$ a $\tau(V)$ bychom integraci získali jako

$$t(V) = \frac{mc^2}{2P}\left\{\frac{2}{3}\alpha(V)^3 + \frac{2}{3}\left[(1+\alpha(V)^2)^{3/2} - 1\right] + \alpha(V)\right\}.$$

a

$$\tau(V) = \frac{mc^2}{2P}\left[\alpha(V)^2 + \alpha(V)\sqrt{1+\alpha(V)^2}\right],$$

což číselně pro $V = 0{,}999c$ dává hodnoty 776 d a 52 d. Dostáváme tedy relativně přesnou shodu s ultrarelativistickou aproximací. Pro $V = 0{,}1c$ dostáváme hodnoty 501 s a 500 s, které se liší asi o 1 % od nerelativistickeho výpočtu.