



Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení Analýza dat

Úlohy

G Formování hvězd

(max. 20 bodů)

Veličina rychlost vzniku hvězd $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$ (kde zkratka SFR pochází z anglického *Star Formation Rate*) zachycuje časový průběh vzniku hvězd v galaxiích. Jedná se o celkovou hmotnost nově vzniklých hvězd a obvykle se vyjadřuje ve slunečních hmotnostech na jednotku plochy disku galaxie během jednoho milionu let (jednotka $M_{\odot} \cdot \text{pc}^{-2} \cdot \text{Myr}^{-1}$). Pro určení SFR obvykle měříme záření spektrálních tříd O a B, protože tyto hvězdy mají relativně krátkou dobu života. Jelikož hvězdy vznikají z plynných mračen, je vývoj galaxií určen plošnou hustotou plynu Σ_{Gas} (jednotka $M_{\odot} \cdot \text{pc}^{-2}$). Většinu plynu v disku tvoří neutrální vodík. Tabulka 1 ukazuje naměřená data v logaritmickém měřítku pro několik galaxií.

Tabulka 1: Naměřená data pro Σ_{Gas} a $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$.

Objekt	$\log \Sigma_{\text{Gas}}$	$\log \dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$
NGC 224	0,68	-3,37
NGC 253	2,60	1,00
NGC 598	1,03	-2,71
NGC 628	0,94	-3,08
NGC 660	2,91	0,86
NGC 3310	0,93	-2,79
NGC 4254	1,14	-2,31
NGC 4258	0,63	-3,12
NGC 4402	1,52	-2,17
NGC 4639	0,25	-3,79

a) Který z následujících přístrojů poskytuje informace o veličině $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$? S pomocí kterého lze naopak měřit Σ_{Gas} ?

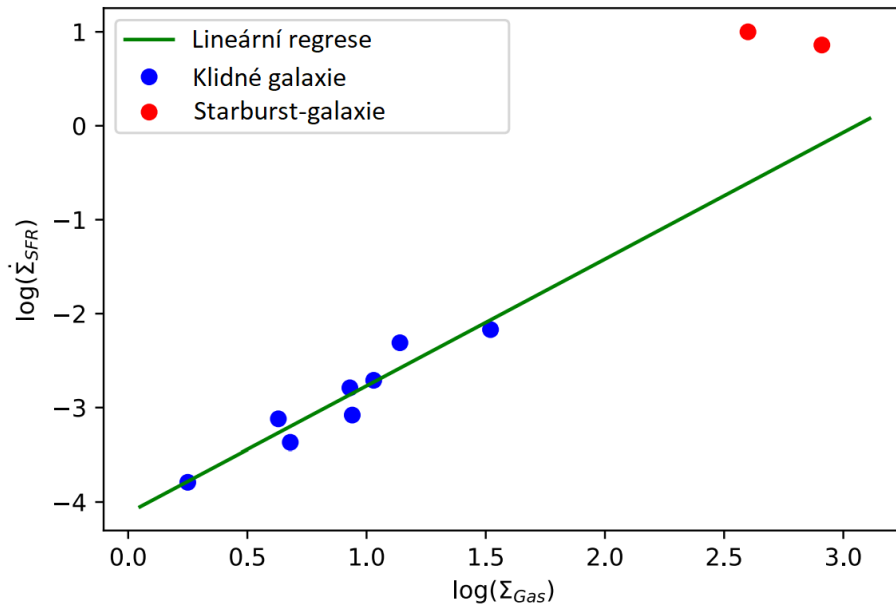
- Radioteleskop (vlnové délky v okolí 21 cm)
- UV dalekohled (vlnové délky 100 nm až 380 nm)
- Gamma dalekohled (vlnové délky pod 0,01 nm)

K měření Σ_{Gas} bychom nejlépe využili radioteleskop, protože při spin-flip přechodech v atomech neutrálního vodíku jsou vyzářeny fotony o vlnové délce 21 cm. Naopak k měření $\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$ se nejvíce hodí UV dalekohled, protože hvězdy spektrálních tříd O a B mají maximum vyzářování v ultrafialovém oboru spektra.

b) Vyneste do grafu hodnoty $\log \dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$ v závislosti na $\log \Sigma_{\text{Gas}}$. Datovými body proložte přímkou.

Výsledný graf vidíme na obrázku 1.

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



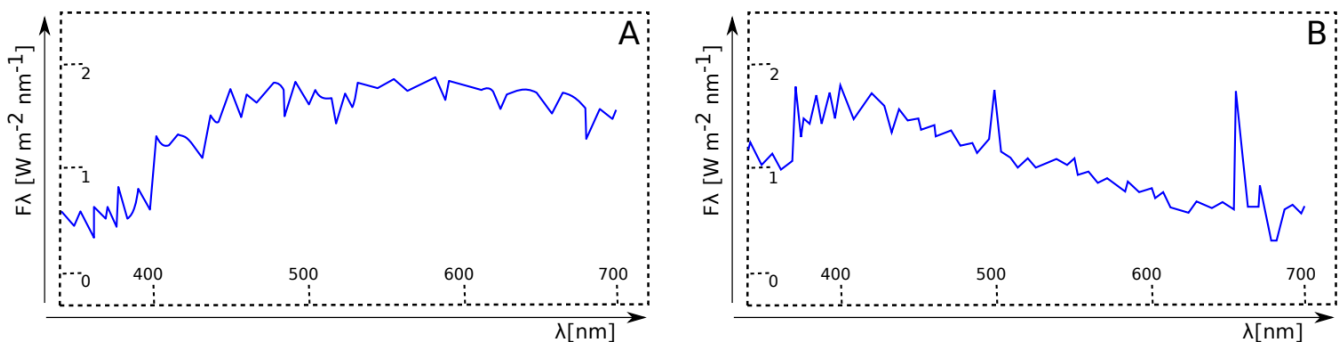
Obrázek 1: Graf závislosti $\log \dot{\Sigma}_{\text{SFR}}$ na $\log \Sigma_{\text{Gas}}$.

Některé galaxie z tabulky vykazují překotnou rychlost tvorby hvězd (tzv. *starburst* galaxie).

c) Napište NGC čísla všech takovýchto galaxií z tabulky.

V pravé horní části grafu na obrázku 1 jsou vidět dvě galaxie, které mají zvýšenou SFR, a to NGC 253 a 660.

Galaxie, které ve své nedávné minulosti prodělaly překotnou tvorbu hvězd, lze rozpoznat zejména podle toho, že obsahují mnoho hvězd typu A. Na obrázku 2 jsou zobrazena dvě spektra, jedna patří spirální galaxií a druhá galaxií, u které právě došlo ke starburst-fazi (spektra byla převzata z A. Weigert, H. J. Wendker und L. Wisotzki: *Astronomie und Astrophysik: Ein Grundkurs*, WileyVCH, Berlin, 2009).



Obrázek 2: Spektra dvou galaxií.

d) Rozhodněte, které se spekter (A nebo B) patří starburst galaxií.



Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Spektra galaxií jsou směsí spekter různých hvězd. Na Hertzsprungově-Russellově diagramu mají hvězdy typu A vysokou teplotu, a proto vyzařují podle Wienova posunovacího zákona převážně v modré oblasti – přesně v tomto smyslu se obě spektra liší. Starburst galaxií tedy patří spektrum B.

Pro zbylé galaxie (které neprodělaly překotnou tvorbu hvězd) platí dle Schmidtova-Kennicuttova zákona vztah

$$\dot{\Sigma}_{\text{SFR}} = \alpha (\Sigma_{\text{Gas}})^\beta.$$

e) Určete graficky hodnoty parametru α a β . Nejistoty není třeba určovat.

Logaritmováním Schmidtova-Kennicuttova vztahu dostaneme

$$\log \dot{\Sigma}_{\text{SFR}} = \log \alpha + \beta \log \Sigma_{\text{Gas}}.$$

Z přímky proložené daty v grafu na obrázku 1 lze odečíst $\beta = 1,35$ a $\alpha = 7,6 \cdot 10^{-5}$.

Časová škála τ , během níž by galaxie spotřebovává plyn při současném tempu tvorby hvězd, se nazývá doba vyčerpání. Předpokládejte, že hvězdy během tohoto období neposkytují žádný nový materiál k tvorbě nových hvězd.

f) Vyjádřete τ v závislosti na Σ_{Gas} . Svůj výsledek okomentujte.

Časovou škálu vyčerpání plynu v galaxii můžeme určit jako

$$\tau = \frac{\Sigma_{\text{Gas}}}{\dot{\Sigma}_{\text{SFR}}} = \alpha^{-1} (\Sigma_{\text{Gas}})^{1-\beta} \propto (\Sigma_{\text{Gas}})^{-0,35}.$$

Odtud plyne, že čím víc plynu galaxie obsahuje, tím rychleji ho spotřebovává.

H GK Persei

(max. 20 bodů)

Na obrázku vidíte dva snímky novy GK Per a odhozeného materiálu kolem ní, který pozorujeme v optickém oboru. Snímky byly pořízeny 29. ledna 2004 a 12. prosince 2011. Na obou snímcích vidíme velké množství zhuštěnin („blobů“), které na obou snímcích můžeme snadno identifikovat. U všech vašich výsledků proveďte rovněž odhad nejistot.

Nejprve si na obrázku zvolte 10 míst, kde změříte úhlový poloměr mlhoviny ρ .

a) Spočtete průměrnou hodnotu ρ a její neurčitost. Měření proveďte pro oba snímky.

Vybereme si libovolných 10 blobů na okraji mlhoviny. Z prvního snímku dostáváme poloměr $(0,85 \pm 0,07)$ arcmin, z druhého dostáváme $(0,90 \pm 0,07)$ arcmin.

b) Z dat předchozí podúlohy určete počáteční odhad úhlové rychlosti ω rozpínání mlhoviny.

Pro každý z deseti blobů určíme rozdíl vzdáleností od centrální hvězdy mezi oběma snímky, dostáváme $(0,052 \pm 0,009)$ arcmin. Mezi snímky uběhl čas $2874 \text{ d} = 7,87 \text{ y}$. Odtud máme $\omega = (6,6 \pm 1,1) \cdot 10^{-3} \text{ arcmin} \cdot \text{y}^{-1} = (0,40 \pm 0,07) \text{ arcsec} \cdot \text{y}^{-1}$.



Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nyní předpokládejme, že zhuštěniny (bloby) tvoří tenkou slupku kolem hvězdy.

c) Zvolte si nyní 10 zhuštěnin (blobů) rovnoměrně rozložených napříč vsemý možnými úhlovými vzdálenostmi α od hvězdy a určete jejich vlastní pohyb μ .

Dostáváme například tabulku 2.

Tabulka 2: Naměřené hodnoty úhlové vzdálenosti α blobu od centrální hvězdy a odpovídající hodnoty vlastního pohybu μ .

blob	$\frac{\alpha}{\text{arcsec}}$	$\frac{\mu}{\text{arcsec}\cdot\text{y}^{-1}}$
1	42,54	0,387
2	38,40	0,37
3	34,31	0,315
4	42,53	0,421
5	23,43	0,178
6	12,26	0,091
7	19,90	0,168
8	43,67	0,418
9	32,64	0,292
10	20,18	0,135

d) Vyneste vlastní pohyb blobu do grafu v závislosti na vzdálenosti blobu od hvězdy. Posudte správnost hypotézy, že se jedná o sférickou slupku. Svě zdůvodnění vysvětlete.

Jedná-li se skutečně o sférickou slupku bude pro vlastní pohyb μ v závislosti na úhlové vzdálenosti α blobu od centrální hvězdy platit

$$\mu = \frac{\omega}{\rho} \alpha.$$

Data z tabulky 2 vynesena do grafu vidíme na obrázku 3. Jedná se skutečně o lineární závislost, která přibližně protíná počátek. Mlhovina tedy skutečně má tvar sférické slupky.

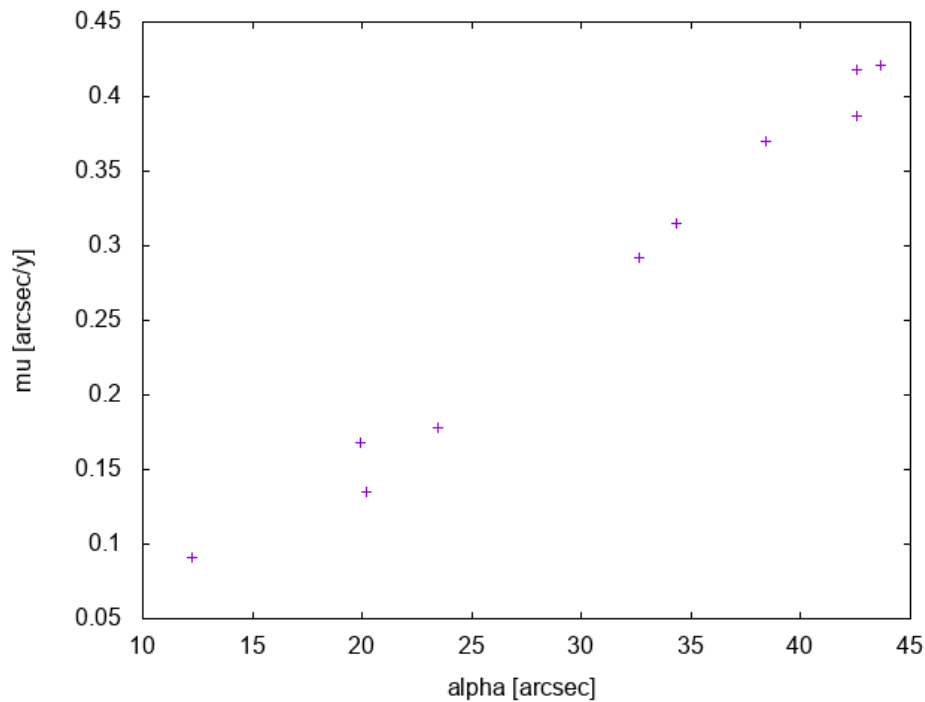
e) Využijte lineární regresi k tomu, abyste našli hodnotu ω s větší přesností.

Dostáváme číselné hodnoty $S_{xx} = 10745,43$, $S_{yy} = 0,91$, $S_{xy} = 98,53$ a tedy směrnici $\beta = 0,00917$. Dále můžeme vypočítat $R = 0,00612$, a tedy $s_{\beta} = 0,00025$. Použitím změřené hodnoty ρ z předchozích částí konečně dostaneme $\omega = (0,048 \pm 0,001) \text{ arcsec} \cdot \text{y}^{-1}$.

Máte rovněž k dispozici data z měření radiálních rychlostí blobu v okruhu 10 arcsec od centrální hvězdy (tabulka 3). Tyto rychlosti jsou opravené o pohyb Země kolem Slunce. Rovněž víme, že radiální rychlost GK Per vzhledem ke Slunci činí $v_{\text{rad},*} = 6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

f) Určete hodnotu rychlosti rozpínání mlhoviny v .

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3: Naměřená závislost μ na α .

Tabulka 3: Úhlové souřadnice (x, y) vybraných blobů (vzhledem ke GK Persei) a jejich změřené radiální rychlosti.

$\frac{x}{\text{arcsec}}$	$\frac{y}{\text{arcsec}}$	$\frac{v_{\text{rad}}}{\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$
0,21	4,72	853
0,21	4,72	964
2,25	-9,25	-777
3,69	-0,88	-849
4,11	0,38	-749
4,11	0,38	-845
6,8	-7,49	1004
-9,67	-0,07	816
-8,51	3,51	-881
-7,28	-2,41	-780
-3,12	-4,02	-834
-3,11	-2,73	-811

Finále 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 4: Úhlové souřadnice (x, y) vybraných blobů (vzhledem ke GK Persei) a jejich změřené radiální rychlosti opravené o vzájemný radiální pohyb GK Per a Slunce.

$\frac{x}{\text{arcsec}}$	$\frac{y}{\text{arcsec}}$	$\frac{v_{\text{rad}}}{\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$
0,21	4,72	847
0,21	4,72	958
2,25	-9,25	-783
3,69	-0,88	-855
4,11	0,38	-755
4,11	0,38	-860
6,8	-7,49	1098
-9,67	-0,07	810
-8,51	3,51	-887
-7,28	-2,41	-786
-3,12	-4,02	-840
-3,11	-2,73	-817

Nejprve opravme radiální rychlosti o radiální rychlost GK Per vzhledem ke Slunci. Dostaneme tabulku 4. Dále si všimněme, že data pochází od blobu poblíž centrální hvězdy. Zde můžeme velikost radiální rychlosti identifikovat s rychlosti expanze obálky. Pro ni tedy dostáváme průměrnou hodnotu $v = (860 \pm 90) \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$.

g) Určete vzdálenost d GK Persei od Slunce.

Konečně máme $d = v/\omega = (3800 \pm 400) \text{ pc}$.

Nápověda: Pokud prokládáme lineární závislost $y = \beta x$ daty (x_i, y_i) , kde $i = 1, \dots, n$, potom můžeme střední hodnotu parametru β (a její neurčitost s_β) spočítat pomocí vztahů

$$\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad \text{a} \quad s_\beta = \sqrt{\frac{1}{S_{xx}} \frac{R}{n-1}},$$

kde $R = S_{yy} + \beta^2 S_{xx} - 2\beta S_{xy}$ a kde $S_{xx} = \sum_i x_i^2$, $S_{yy} = \sum_i y_i^2$ a $S_{xy} = \sum_i x_i y_i$.

