Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Tři družice

(max. 10 bodů)

Během jedné noci si pozorovatel na Zemi (o poloměru $R = 6\,378\,\mathrm{km}$), stojící na zeměpisné šířce φ, všiml nevídaného jevu. Pozoroval totiž nepřetržitě za sebou tři družice obíhající v rovině rovníku, které se na obloze pohybovaly po stejné trajektorii, přičemž v každém momentě viděl právě jednu z nich (tzn. během západu jedné družice vycházela druhá a takto třikrát do zopakování cyklu).

a) Určete v jaké výšce h nad zemským povrchem se takové družice pohybují.

Aby byl celý cyklus nepřetržitý, snadno si uvědomíme, že u všech družic pozorovatel vidí 120° z celé kruhové trajektorie. Z krátké geometrické úvahy zjistíme, že platí následující vztah

$$\frac{R}{R+h} = \cos\theta\cos\varphi\,,$$

kde θ je úsek kruhové trajektorie družice mezi jejím východem a kulminací na místním poledníku. Po dosazení $\theta = 60°$ a úpravách dostáváme výsledný vztah

$$h = \left(\frac{2}{\cos\varphi} - 1\right) R\,.$$

Po dosazení dostáváme $h_1 = 2{,}12R$ a $h_2 = 1{,}01R$.

b) Vypočítejte výšku družice nad obzorem α v době její kulminace.

V trojúhelníku střed Země-pozorovatel-družice v kulminaci známe R, $R+h$ a $\cos\varphi$. Z kosinové věty spočítáme délku třetí strany

$$x = \sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi}\,,$$

a ze sinové věty vypočítáme úhel α

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(R+h)\sin\varphi}{\sqrt{R^2 + (R+h)^2 - 2R(R+h)\cos\varphi}}\right).$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $\alpha_1 \doteq 22{,}7°$ a $\alpha_2 \doteq 80{,}9°$.

c) Stanovte periodu τ, s jakou se bude celý cyklus opakovat.

Ze 3. Keplerova zákona určíme úhlovou rychlost družice okolo Země

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)^3}}\,,$$

Do výpočtu však musíme zahrnout i vlastní rotaci Země okolo své osy

$$\omega_Z = \frac{2\pi}{T_Z}\,.$$

Perioda celého cyklu je například interval mezi dvěma východy stejné družice. Spočítáme ji z rozdílu úhlových rychlostí pohybu družice a Země

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega - \omega_Z}\,,$$

což je po dosazení $\tau_1 = 11{,}4\,\mathrm{h}$ a $\tau_2 = 4{,}8\,\mathrm{h}$.

Počítejte číselně pro pozorovatele v Praze ($\varphi = 50^\circ\,05'$) a v Bogotá ($\varphi = 4^\circ\,36'$).

B Amatérská

(max. 10 bodů)

Amatérský astronom z Opavy se doslechl o objevení nového trojhvězdného systému. Vzal tedy svůj Cassegrainův dalekohled (s průměrem primárního zrcadla $D_1 = 203\,\mathrm{mm}$ a s průměrem sekundárního zrcadla $D_2 = 64\,\mathrm{mm}$) a odjel pozorovat do Beskydské oblasti tmavé oblohy. O trojhvězdě víme, že její složky mají hvězdné velikosti 14^m, $14{,}5^\mathrm{m}$ a 16^m, a že jsou tak blízko u sebe, že je dalekohled nedokáže rozlišit. Vypočítejte mezní hvězdnou velikost m_D pro astronomův dalekohled, dále potom hvězdnou velikost m_* trojhvězdného systému a na základě vašich výsledků rozhodněte, zda astronom může trojhvězdu svým dalekohledem pozorovat.

Mezní hvězdná velikost pro lidské oko je asi $m_\mathrm{o} = 6^\mathrm{m}$ (lze uznat hodnoty $5^\mathrm{m} - 8^\mathrm{m}$). Za průměr zorničky lidského oka vezmeme $d = 6\,\mathrm{mm}$ (lze uznat hodnoty 4 mm až 10 mm). Mezní hvězdnou velikost dalekohledu potom dostaneme z Pogsonovy rovnice

$$m_\mathrm{o} - m_\mathrm{D} = -2{,}5 \log \frac{S_\mathrm{D}}{S_\mathrm{o}} = -2{,}5 \log \frac{D_1^2 - D_2^2}{d^2}\,.$$

Po dosazení dostaneme mezní hvězdnou velikost pro dalekohled asi $13{,}5^\mathrm{m}$.

Pro hvězdnou velikost trojhvězdy sestavíme následující Pogsonovu rovnici porovnáním např. s nejjasnější složkou

$$m_* - m_1 = -2{,}5 \log \frac{I_*}{I_1} = -2{,}5 \log \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1}\,,$$

kde I_2 a I_3 vyjádříme pomocí I_1 z Pogsonových rovnic

$$m_1 - m_{2,3} = -2{,}5 \log \frac{I_1}{I_{2,3}} \Rightarrow I_{2,3} = I_1 \cdot 10^{0{,}4(m_1 - m_{2,3})}\,.$$

Dohromady tedy dostáváme

$$m_* - m_1 = -2{,}5 \log(1 + 10^{0{,}4(m_1 - m_2)} + 10^{0{,}4(m_1 - m_3)})\,,$$

což je po dosazení asi $13{,}4^\mathrm{m}$. Protože je hvězdná velikost trojhvězdy menší, než mezní hvězdná velikost dalekohledu, astronom může trojhvězdu dalekohledem pozorovat.

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Rozpad mezonu

(max. 10 bodů)

Mezon π^0 s klidovou hmotností m_0 se rozpadá na dva fotony $\pi^0 \to \gamma\gamma$. Pokud budeme značit celkovou energii mezonu E, vzhledem k laboratorní soustavě (LAB), určete:

1. energii obou fotonů E_1, E_2 v závislosti na E, m_0 a úhlech rozpadu θ_1, θ_2, které vyjadřují odchylku směru letu obou fotonů vůči původní trajektorii mezonu,
2. velikost rychlosti v mezonu vzhledem k LAB, pakliže $E_1 = E_{\max}$ a $E_2 = E_{\min}$, tj. jeden foton měl nejmenší možnou energii, jakou mohl mít, a druhý foton měl naopak největší možnou energii. Výsledek vyjádřete pomocí veličin $E_{\max}$, $E_{\min}$ a rychlosti světla c.

1. Provedeme podrobný kinematický rozbor úlohy. Vyjdeme ze zákonů zachování celkové energie a celkové hybnosti

$$E = E_1 + E_2\,,$$
$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2\,,$$

kde celková energie částice je $E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2$ (tento vztah nazýváme relativistická disperzní relace). Zákon zachování hybnosti můžeme rozepsat do dvou rovnic, s užitím $p_1 = E_1/c$ a $p_2 = E_2/c$

$$\frac{E_1}{c}\sin\theta_1 = \frac{E_2}{c}\sin\theta_2\,,$$
$$p = \frac{E_1}{c}\cos\theta_1 + \frac{E_2}{c}\cos\theta_2\,.$$

Poslední rovnici umocníme na druhou

$$p^2 = \frac{E_1^2}{c^2}\cos^2\theta_1 + \frac{E_2^2}{c^2}\cos^2\theta_2 + 2\frac{E_1E_2}{c^2}\cos\theta_1\cos\theta_2$$

a dosadíme do relativistické disperzní relace. Dostáváme

$$\begin{aligned} E^2 - m_0^2c^4 &= E_1^2\cos^2\theta_1 + E_2^2\cos^2\theta_2 + 2E_1E_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \\ &= E_1^2\cos^2\theta_1 + (E - E_1)^2 - E_1^2\sin^2\theta_1 + 2E_1E_2\cos\theta_1\cos\theta_2\,, \end{aligned}$$

kde jsme využili $E_1\sin\theta_1 = E_2\sin\theta_2$ a $E_2 = E - E_1$. Další úpravy vedou ke vztahu

$$\begin{aligned} E^2 - m_0^2c^4 = E_1^2\cos^2\theta_1 + E^2 - 2EE_1 + E_1^2\cos^2\theta_1 + \\ + 2E_1\cos\theta_1\left(\sqrt{E^2 - m_0^2c^4} - E_1\cos\theta_1\right), \end{aligned}$$

kde jsme využili $E_2\cos\theta_2 = pc - E_1\cos\theta_1 = \sqrt{E^2 - m_0^2c^4} - E_1\cos\theta_1$. Prostým roznásobením závorky a sčítáním dostáváme

$$m_0^2c^4 = 2EE_1 - 2E_1\cos\theta_1\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}\,,$$

a tedy nakonec

$$E_{1,2} = \frac{m_0^2c^4}{2}\frac{1}{E - \cos\theta_{1,2}\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}\,.$$

2. Stačí dosadit $\theta_1 = 0$ a $\theta_2 = \pi$. Potom dostáváme

$$\begin{aligned} E_1(\theta_1 = 0) &= \frac{m_0^2c^4}{2}\frac{1}{E - \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}} \\ &= \frac{m_0^2c^4}{2}\frac{E + \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}{E^2 - (E^2 - m_0^2c^4)} \\ &= \frac{E + \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}{2} \\ &= E_{\max}\,, \end{aligned}$$

a zároveň

$$\begin{aligned} E_2(\theta_2 = \pi) &= \frac{m_0^2c^4}{2}\frac{1}{E + \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}} \\ &= \frac{m_0^2c^4}{2}\frac{E - \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}{E^2 - (E^2 - m_0^2c^4)} \\ &= \frac{E - \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}{2} \\ &= E_{\min} \end{aligned}$$

(udělit). Odečtením rovnic a použitím $pc = \sqrt{E^2 - m_0^2c^4}$ dostáváme

$$E_{\max} - E_{\min} = pc = \frac{m_0vc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Zároveň platí vztah

$$E_{\max} + E_{\min} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,,$$

kde jsme využili $E = E_{\max} + E_{\min}$. Nakonec dostáváme

$$v = c\frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}}\,.$$

D Globální bouře

(max. 10 bodů)

Na Marsu propukla prachová bouře, která rovnoměrně zahalila celý povrch planety tak, že zeslabila hvězdnou velikost Slunce v zenitu o $\Delta m = 0{,}5\,\mathrm{mag}$. Za předpokladu, že prachová zrnka mají poloměr $r = 0{,}5\,\mathrm{mm}$ a hustotu $\rho = 1{,}5\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$, určete (stačí řádově) celkovou hmotnost M částic prachu v marsovské atmosféře (v kg).

Jelikož $0{,}4\Delta m \ln 10 \lesssim 1$, nemusíme k řádovému odhadu uvažovat plnou formu Beer-Lambertova zákona a stačí spočítat podíl celkového povrchu Marsu, který musí být zatemněn, aby došlo k danému poklesu hvězdné velikosti. Z Pogsonovy rovnice musí platit

$$10^{-0{,}4\Delta m} \approx 1 - \frac{N\pi r^2}{4\pi R_\mathrm{M}^2}\,,$$

kde N je počet částic prachu v atmosféře. Máme tedy

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 N = \frac{16}{3}\pi\rho r R_\mathrm{M}^2 (1 - 10^{-0{,}4\Delta m}) \doteq 10^{13}\,\mathrm{kg}\,.$$

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

E Špionážní družice

(max. 20 bodů)

Uvažujte umělou družici, která obíhá Zemi po kruhové dráze v rovině rovníku ve směru zemské rotace. Družice obíhá ve výšce $H = 500\,\mathrm{km}$ nad povrchem Země. Pro účel této úlohy předpolkládejte, že Země má tvar ideální koule o poloměru $R_\mathrm{Z} = 6\,371\,\mathrm{km}$ a o hmotnosti $M_\mathrm{Z} = 5{,}972 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$. Rovněž označme $T_0 = 23^\mathrm{h}\,56^\mathrm{m}4^\mathrm{s}$ siderickou periodu rotace Země.

a) Vypočtěte geocentrickou rychlost u pohybu pozorovatele na rovníku na povrchu Země. Předpokládejte, že pozorovatel se nepohybuje vzhledem k povrchu Země. Výsledek vyjádřete jak obecně pomocí R_Z a T_0, tak číselně v $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Dostáváme

$$u = \frac{2\pi R_\mathrm{Z}}{T_0} \doteq 0{,}465\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

b) Vypočtěte oběžnou rychlost v a oběžnou periodu T družice. Výsledky vyjádřete obecně pomocí G, M_Z, R_Z, H (kde G je Newtonova gravitační konstanta) i číselně (v $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$, resp. v hodinách)

Z porovnání gravitačního a dostředivého zrychlení máme

$$\frac{v^2}{R_\mathrm{Z} + H} = \frac{GM_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z} + H)^2}\,,$$

kde $v = 2\pi(R_\mathrm{Z} + H)/T$. Odtud dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + H}} \doteq 7{,}613\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_\mathrm{Z} + H)^3}{GM}} \doteq 1{,}577\,\mathrm{h}\,.$$

Uvažujte nyní, že úkolem družice je špionáž různých cílů na povrhu Země.

c) Určete maximální a minimální zeměpisnou šířku $\pm|\phi_\mathrm{max}|$ míst, které družice může sledovat. Udejte číselnou hodnotu ve stupních. Dojde vlivem refrakce teoreticky ke zvětšení, nebo ke zmenšení této oblasti?

Uvažme trojúhelník družice – střed Země – sledovaný cíl. Pokud má sledovaný cíl zeměpisnou šířku $\phi = \pm|\phi_\mathrm{max}|$, pak je úhel při vrcholu „sledovaný cíl“ roven 90°. Platí potom

$$|\phi_\mathrm{max}| = \arccos\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z} + H} \doteq 22^\circ\,.$$

Vlivem refrakce se může paprsek spojující družici s cílem ohnout za ideální horizont družice. Sledovaná oblast se tedy teoreticky zvětší. Prakticky bude obtížné sledovat cíle v blízkosti horizontu kvůli velké atmosferické extinkci.

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Ve zbytku úlohy zanedbejte atmosferickou refrakci.

d) Jakou část p povrchu Země může družice sledovat v jeden okamžik? Jakou část p' povrchu Země může družice dlouhodobě sledovat? Výsledky vyjádřete obecně pomocí R_Z a H i číselně v procentech.

V jeden okamžik může družice sledovat oblast, která je daná kulovým vrchlíkem o středovém úhlu $\Delta\alpha = 2|\phi_{\max}|$. Máme tedy

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{2\pi R_Z^2(1-\cos|\phi_{\max}|)}{4\pi R_Z^2} \\
&= \frac{1}{2}(1-\cos|\phi_{\max}|) \\
&= \frac{1}{2}\frac{H}{R_Z+H} \\
&\doteq 3{,}6\,\%\,.
\end{aligned}
$$

Dlouhodobě může družice sledovat všechny cíle nacházející se v zóně omezené zeměpisnými šířkami $\pm|\phi_{\max}|$. Máme tedy

$$
\begin{aligned}
p' &= \frac{4\pi R_Z^2 - 2\cdot 2\pi R_Z^2(1-\sin|\phi_{\max}|)}{4\pi R_Z^2} \\
&= \sin|\phi_{\max}| \\
&= \sqrt{1-\frac{R_Z^2}{(R_Z+H)^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2R_Z H + H^2}}{R_Z+H} \\
&= 37\,\%\,.
\end{aligned}
$$

Předpokládejme nyní, že sledovaný cíl se nachází na rovníku.

e) Určete periodu T_s, se kterou se družice ocitá přímo nad cílem. Výsledek vyjádřete v hodinách.

Označíme-li úhlovou rychlost rotace Země jako $\omega_0 = 2\pi/T_0$ a úhlovou rychlost oběhu družice jako $\omega = 2\pi/T$, dostaneme

$$\omega_s = \omega - \omega_0\,,$$

kde $\omega_s = 2\pi/T_s$. Máme tedy

$$\frac{1}{T_s} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\,,$$

neboli

$$T_s = \frac{T T_0}{T_0 - T} \doteq 1{,}688\,\mathrm{h}\,.$$

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

f) Vypočtěte, po jakou dobu ΔT může družice v rámci každé periody T_s cíl sledovat. Výsledek vyjádřete číselně v minutách. Jaký podíl τ celkového času tvoří doba, po kterou družice může cíl sledovat? Uvažujte ideální počasí na sledovaným cílem.

Snadno nahlédneme, že v soustavě korotující se Zemí je středový úhel $\Delta\alpha$ sektoru trajektorie, ve kterém je možné cíl sledovat, roven $\Delta\alpha = 2|\phi_\mathrm{max}|$. Máme tedy

$$\Delta T = T_\mathrm{s}\frac{\Delta\alpha}{2\pi} = T_\mathrm{s}\frac{|\phi_\mathrm{max}|}{\pi} \doteq 12{,}4\,\mathrm{min}\,.$$

Máme také

$$\tau = \frac{\Delta T}{T_\mathrm{s}} = \frac{|\phi_\mathrm{max}|}{\pi} \doteq 0{,}12\,.$$

Cíl lze sledovat 12 % celkového času.

g) Vyjádřete úhel $\alpha(t)$, který svírá průvodič družice se spojnicí středu Země a sldovaného cíle, pomocí t, T_s, t_i a ΔT.

Máme

$$\alpha(t) = \omega_\mathrm{s}(t - t_\mathrm{i} - \Delta T/2) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}}(t - t_\mathrm{i} - \Delta T/2)\,.$$

h) Vyjádřete úhlovou rychlost Ω natáčení kamery na palubě družice za cílem (vzhledem k tělu družice) v závislosti na čase $t \in \langle t_\mathrm{i}, t_\mathrm{f}\rangle$, kde t_i, resp. t_f jsou časy počátku, resp. konce viditelnosti družice v rámci každého pozorovacího okna. Výpočet nejdřív proveďte za předpokladu nulové siderické periody rotace družice: ukažte, že pak lze psát

$$\Omega(t) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}}\frac{1-\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}\,. \tag{1}$$

Přenesme se nejdříve do soustavy korotující se Zemí. Okamžitou úhlovou rychlost $\Omega(t)$ kamery spočteme jako

$$\Omega(t) = \frac{v_\mathrm{t}(t)}{r(t)}\,,$$

kde $v_\mathrm{t}(t)$ je okamžitá projekce rychlosti družice v této soustavě do tečného směru vzhledem ke spojnici družice – sledovaný cíl a $r(t)$ je okamžitá velikost této spojnice. Z kosinové věty píšeme

$$r(t)^2 = R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H)\cos\alpha(t)\,.$$

Pro kontrolu si všimneme, že dle očekávání máme

$$\begin{aligned} r(t_\mathrm{i})^2 &= R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H)\cos\omega_\mathrm{s}(-\Delta T/2) \\ &= R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H)\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+H} \\ &= (R_\mathrm{Z}+H)^2 - R_\mathrm{Z}^2\,, \end{aligned}$$

a také (protože $t_\mathrm{f} - t_\mathrm{i} = \Delta T$)

$$\begin{aligned} r(t_\mathrm{f})^2 &= R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H)\cos\omega_\mathrm{s}(+\Delta T/2) \\ &= R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H)\frac{R_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}+H} \\ &= (R_\mathrm{Z}+H)^2 - R_\mathrm{Z}^2 \,, \end{aligned}$$

a rovněž

$$\begin{aligned} r(t_\mathrm{i}+\Delta T/2)^2 &= R_\mathrm{Z}^2 + (R_\mathrm{Z}+H)^2 - 2R_\mathrm{Z}(R_\mathrm{Z}+H) \\ &= (R_\mathrm{Z}+H-R_\mathrm{Z})^2 \\ &= H^2 \,. \end{aligned}$$

Máme tedy (protože $\cos|\phi_\mathrm{max}| = R_\mathrm{Z}/(R_\mathrm{Z}+H)$)

$$r(t) = (R_\mathrm{Z}+H)\sqrt{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)} \,.$$

Zároveň můžeme psát

$$v_\mathrm{t}(t) = \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\cos\beta(t) \,,$$

kde úhel $\beta(t)$ svírá průvodič družice se směrem k cíli. Platí tedy

$$\frac{\sin\beta(t)}{R_\mathrm{Z}} = \frac{\sin\alpha(t)}{r(t)} \,,$$

takže

$$\begin{aligned} v_\mathrm{t}(t) &= \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{Z}^2}{r(t)^2}\sin^2\alpha(t)} \\ &= \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\sqrt{1 - \frac{\cos^2|\phi_\mathrm{max}|\sin^2\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}} \\ &= \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\sqrt{\frac{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t) - \cos^2|\phi_\mathrm{max}|\sin^2\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}} \\ &= \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\sqrt{\frac{1 - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t) + \cos^2|\phi_\mathrm{max}|\cos^2\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}} \\ &= \frac{2\pi(R_\mathrm{Z}+H)}{T_\mathrm{s}}\frac{1 - \cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}{\sqrt{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}} \,, \end{aligned}$$

takže dostaneme

$$\Omega(t) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}}\frac{1 - \cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)} \,.$$

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

i) Vyjádřete úhlové rychlosti kamery Ω_i, Ω_f a Ω_c v časech $t = t_\mathrm{i}$, $t = t_\mathrm{f}$ a $t = t_\mathrm{c} \equiv t_\mathrm{i} + \Delta T/2$ pomocí T_s a $\cos|\phi_\mathrm{max}|$. Vypočtěte jejich číselné hodnoty ve stupních za sekundu.

Všimněme si, že máme (protože $\cos\alpha(t_\mathrm{i}) = \cos\alpha(t_\mathrm{f}) = \cos|\phi_\mathrm{max}|$)

$$\Omega(t_\mathrm{i}) = \Omega(t_\mathrm{f}) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \frac{1-\cos^2|\phi_\mathrm{max}|}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos^2|\phi_\mathrm{max}|} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \doteq 0{,}059^\circ \cdot \mathrm{s}^{-1}\,,$$

zatímco

$$\Omega(t_\mathrm{c}) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \frac{1-\cos|\phi_\mathrm{max}|}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \frac{1}{1-\cos|\phi_\mathrm{max}|} \doteq 0{,}82^\circ \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

j) Jak by se změnily výsledky pro $\Omega(t)$, Ω_i, Ω_f a Ω_c za předpokladu vázané rotace družice (siderická perioda rotace družice rovna T_0 ve směru oběhu družice)?

Ke všem výrazům jednoduše přičteme $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Dostaneme

$$\Omega(t) = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \frac{1-\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)}{1+\cos^2|\phi_\mathrm{max}| - 2\cos|\phi_\mathrm{max}|\cos\alpha(t)} + \frac{2\pi}{T_0}\,,$$

společně s

$$\Omega_\mathrm{i} = \Omega_\mathrm{f} = \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} + \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{T} \doteq 0{,}063^\circ \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

a

$$\begin{aligned}
\Omega(t_\mathrm{c}) &= \frac{2\pi}{T_\mathrm{s}} \frac{1}{1-\cos|\phi_\mathrm{max}|} + \frac{2\pi}{T_0} \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\frac{R_\mathrm{Z}+H}{H} + \frac{2\pi}{T_0} \\
&= 2\pi\frac{R_\mathrm{Z}+H}{T}\frac{1}{H} - 2\pi\frac{R_\mathrm{Z}}{H}\frac{1}{T_0} - \frac{2\pi}{T_0} + \frac{2\pi}{T_0} \\
&= \frac{2\pi(v-u)}{H} \\
&\doteq 0{,}82^\circ \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Poznámka: úlohy i) a j) můžete řešit za použití vztahu (1) pro $\Omega(t)$ bez bodové penalizace, i pokud se vám ho v části h) nepodařilo odvodit.

F Skleníkový efekt

(max. 20 bodů)

Mějme exoplanetu o poloměru R_e, která obíhá kolem její centrální hvězdy po kruhové dráze ve vzdálenosti d. Zářivý výkon centrální hvězdy označme L_*. Předpokládejme, že exoplaneta je dokonalá koule s povrchovým albedem A a nemá žádný vnitřní zdroj tepla.

a) Vypočítejte povrchovou teplotu T_e1 exoplanety, pokud předpokládáme, že rotační perioda exoplanety kolem její osy je tak krátká, že můžeme uvažovat stejnou teplotu na celém povrchu. Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin a Stefanovy-Boltzmannovy konstanty σ.

Exoplaneta musí být v tepelné rovnováze (přijatý zářivý výkon se rovná tomu vyzářenému), což nám dává

$$\frac{L_*}{4\pi d^2}\pi R_\mathrm{e}^2(1-A) = 4\pi R_\mathrm{e}^2 T_\mathrm{e1}^4 \sigma\,, \tag{2}$$

a tedy

$$T_\mathrm{e1} = \sqrt[4]{\frac{L_*(1-A)}{16\pi d^2 \sigma}}\,.$$

Dosud jsme uvažovali, že exoplaneta nemá žádnou atmosféru. Jak by se ale výsledek změnil, kdybychom atmosféru uvažovali? Modelujme atmosféru jako tenkou sférickou vrstvu nad povrchem planety, která má různé *transmisní koeficienty*[1] pro záření pocházející z hvězdy (ať již přímo dopadající na atmosféru, nebo to, které je odraženo od povrchu exoplanety) a záření, které je vyzářeno exoplanetou v důsledku zachování tepelné rovnováhy. Označme tyto transmisní koeficienty postupně jako t_* a t_e, $t_* \neq t_\mathrm{e}$ a předpokládejte, že jejich hodnota je nezávislá na úhlu dopadu přicházejícího záření a že oba jsou obecně nenulové.

b) Ukažte, že rovnice tepelné rovnováhy se v případě našeho jednoduchého modelu atmosféry modifikuje do následujícího tvaru

$$\frac{t_*(1-A)}{1-A(1-t_*)}\frac{L_*}{4\pi d^2}\pi R_\mathrm{e}^2 = \frac{t_\mathrm{e}}{1-A(1-t_\mathrm{e})}4\pi R_\mathrm{e}^2 T_\mathrm{e2}^4 \sigma\,, \tag{3}$$

kde na levé straně rovnice máme zářivý výkon přijatý povrchem exoplanety a na pravé straně máme zářivý výkon, který je povrchem exoplanety vyzářen. Oproti obvyklému tvaru této rovnice zde vystupují členy modifikující množství přijatého a vyzářeného výkonu v důsledku přítomnosti atmosféry. Při počítání mnohonásobného odrazu záření od atmosféry a povrchu planety by se vám mohlo hodit vědět, že pro $0 < |q| < 1$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \frac{a}{1-q}$$

.

Přítomnost atmosféry efektivně mění množství přijatého a vyzářeného výkonu, takže rovnice tepelné rovnováhy (2) se dá přepsat do tvaru

$$\frac{L_*}{4\pi d^2}\pi \alpha_\mathrm{abs} R_\mathrm{e}^2 = 4\pi \alpha_\mathrm{irr} R_\mathrm{e}^2 T_\mathrm{e2}^4 \sigma\,. \tag{4}$$

Zavedli jsme koeficient α_abs upravující množství absorbovaného výkonu a koeficient α_irr upravující množství vyzářeného výkonu. Jako obvykle předpokládáme, že vlnová délka záření se nemění při odrazu. Atmosféra způsobuje, že pouze část záření přicházejícího přímo z hvězdy projde skrz atmosféru a dopadne na povrch exoplanety. Tato část je v poměru k celkovému množství přicházejícího záření zřejmě rovna t_*. Dále je tato část záření částečně pohlcena povrchem exoplanety ($t_*(1-A)$) a částečně odražena ($t_* A$). Toto odražené záření částečně projde skrz atmosféru a opustí náš systém ($t_* A t_*$), ale část

[1] Transmisní koeficient t tenké vrsty je reálné číslo nabývající hodnot v intervalu $[0\,,\,1]$ a vyjadřuje, jaká část záření projde skrz tuto vrstvu. Záření, které neprojde skrz je odraženo zpět. Část záření, které je odražené zpět, se většinou značí jako r a platí $t + r = 1$, což znamená, že vrstva samotná se neohřívá.

je ho zpět odražena k povrchu ($t_* A(1-t_*)$) a absorbována ($t_* A(1-t_*)(1-A)$). Po druhém odraze od atmosféry, bude množství záření pohlceného povrchem $t_* A(1-t_*)A(1-t_*)(1-A) = t_* A^2(1-t_*)^2(1-A)$, po třetím odraze $t_* A^3(1-t_*)^3(1-A)$ a tak dále. Abychom zjistili koeficient α_{abs} musíme sečíst následující nekonečnou geometrickou řadu

$$\alpha_{\mathrm{abs}} = \sum_{n=0}^{\infty} t_*(1-A)A^n(1-t_*)^n = \frac{t_*(1-A)}{1-A(1-t_*)}\,,$$

přičemž výsledek jsme snadno dostali aplikací vztahu uvedeného v zadání v nápovědě. Nyní provedeme podobný výpočet pro koeficient α_{irr}. Záření vyzářené povrchem exoplanety dosáhne „vnitřní strany“ atmosféry. Část ho opustí náš systém (t_{e}) a část je ho odražená zpět na povrch ($(1-t_e)$). Část tohoto záření je pohlcená povrchem ($(1-t_{\mathrm{e}})(1-A)$) a část je odražená zpět ($(1-t_{\mathrm{e}})A$). Část, která je odražená dosáhne atmosféry. Z toho část atmosférou pronikne a opustí systém ($(1-t_{\mathrm{e}})At_{\mathrm{e}}$), ale část je odražená zpět. Tím pro množství záření, které opustí náš systém po druhém odraze, dostaneme $(1-t_{\mathrm{e}})A(1-t_{\mathrm{e}})At_{\mathrm{e}} = (1-t_{\mathrm{e}})^2A^2t_{\mathrm{e}}$. Po třetím odraze to je $(1-t_{\mathrm{e}})^3A^3t_{\mathrm{e}}$ a tak dále. Koeficient α_{irr} dostaneme sečtením

$$\alpha_{\mathrm{irr}} = \sum_{n=0}^{\infty} t_{\mathrm{e}}(1-t_{\mathrm{e}})^n A^n = \frac{t_{\mathrm{e}}}{1-A(1-t_{\mathrm{e}})}\,.$$

Po dosazení α_{abs} a α_{irr} do (4) dostaneme tvar rovnice, který jsme měli ukázat.

c) Jaká je rovnovážná termodynamická teplota T_{e2} exoplanety v případě přítomnosti atmosféry, která je popsána jednoduchým modelem uvedeným výše v zadání?

Teplotu dostaneme vyjádřením T_{e2} z rovnice, kterou jsme měli dokázat v úloze b). Platí

$$T_{\mathrm{e2}} = \sqrt[4]{\frac{L_*(1-A)}{16\pi d^2\sigma}\frac{t_*[1-A(1-t_{\mathrm{e}})]}{t_{\mathrm{e}}[1-A(1-t_*)]}}\,.\,.$$

d) Jaký musí být vztah mezi transmisními koeficienty t_* a t_{e}, abychom mohli pozorovat skleníkový efekt, tj. nárůst teploty oproti situaci bez atmosféry?

Pokud má nastat situace $T_{\mathrm{e1}} < T_{\mathrm{e2}}$, je zřejmé že musí platit $\frac{t_*[1-A(1-t_{\mathrm{e}})]}{t_{\mathrm{e}}[1-A(1-t_*)]} > 1$. To nám dává podmínku

$$t_*[1-A(1-t_{\mathrm{e}})] > t_{\mathrm{e}}[1-A(1-t_*)]\,,$$

a tedy

$$t_* > t_{\mathrm{e}}\,.$$

e) Pokud by nastalo $t_* = t_{\mathrm{e}}$, jak by toto ovlivnilo teplotu povrchu exoplanety. Porovnejte s výsledky z předchozích úloh.

Je jednoduché ukázat, že pokud bude $t_* = t_\mathrm{e}$, zlomky obsahující transmisní koeficienty v rovnici (3) se pokrátí. Tím pádem teplota bude v tomto případě stejná jako v úloze a), tedy $T_{\mathrm{e}1}$.

Poznámka: Nyní je dobré trochu okomentovat naše výsledky. Na základě výpočů v této úloze si můžeme snadno uvědomit, že pojmenování "skleníkový efekt"je zavádějící. Skutečný skleník, který můžeme vidět na některých zahradách, funguje na principu uzavření objemu vzduchu, který je ohříván a nemůže se mísit s okolní atmosférou vně skleníku. To pak způsobuje nárůst teploty vzduchu uvnitř skleníku. Skleníkový efekt, který pozorujeme v atmosféře je založen na jiném principu. Protože Země je chladnější než Slunce, má vlnovou délku maxima vyzařování delší než Slunce. Zatímco atmosféra je dobře propustná pro záření přicházející přímo ze Slunce, je méně propustná pro záření o delší vlnové délce, které je emitováno Zemí v důsledku zachování tepelné rovnováhy. Kvůli tomu je část záření odražena atmosférou zpět na zemský povrch. Tento efekt způsobují rozdílné transmisní koeficienty pro záření pocházející ze Slunce a záření emitované Zemí. Důsledkem toho, pak vzrůstá teplota. Plyny, které mají výše popsanou vlastnost pak nazýváme jako skleníkové plyny.