Krajské kolo 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **13. 2. 2021** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Veněra 9

(max. 20 bodů)

Před 45 lety, 22. října 1975, dosedl na povrch Venuše přistávací modul sondy Veněra 9. Sovětský program Veněra byl velice úspěšný a značně rozšířil naše poznatky o Venuši. Konkrétně přistávací modul Veněra 9 pořídil první fotografie z povrchu planety a orbitální sekce sondy se stala první umělou družicí Venuše.

Program Veněra trval přes dvě desetiletí v letech 1961 až 1983 a během té doby se sondy pochopitelně zdokonalovaly. Sonda Veněra 9 byla první z řady, která byla vynesena silnější raketou Proton, takže mohla být pětkrát hmotnější než předchozí mise. Celá sonda při vzletu vážila 4 936 kg, z toho 1 560 kg připadlo na přistávací modul (i s tepelným štítem), 2 231 kg patřilo orbitální části a zbytek hmotnosti tvořilo palivo. Raketový motor sondy dokázal vyvinout tah 18 900 N.

Nejvýhodnější způsob přesunu mezi dvěma blízkými kruhovými oběžnými drahami je Hohmannova trajektorie[1]. Je to půlelipsa, jež se tečně dotýká obou kruhových drah.

a) Spočítejte velkou poloosu a excentricitu Hohmannovy elipsy pro přelet od Země k Venuši.

V tabulkách si najdeme poloměry drah Země a Venuše (považujeme jejich dráhy za kružnice)

$$
\begin{aligned}
a_{\mathrm{V}} &= 0{,}72\,\mathrm{au} = 1{,}07 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \quad \dots \quad \text{poloměr dráhy Venuše,}\\
a_{\mathrm{Z}} &= 1{,}00\,\mathrm{au} = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \quad \dots \quad \text{poloměr dráhy Země.}
\end{aligned}
$$

Délka velké poloosy Hohmannovy elipsy je

$$a = \frac{a_{\mathrm{V}} + a_{\mathrm{Z}}}{2} \doteq 0{,}86\,\mathrm{au} \doteq 1{,}29 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}\,.$$

Vzdálenosti a_{V}, resp. a_{Z} jsou pak vzdálenost perihelia, resp. vzdálenost afelia od Slunce. Excentricita e Hohmannovy elipsy je

$$
\begin{aligned}
1 - e &= \frac{a_{\mathrm{V}}}{a}\,,\\
e &= 1 - \frac{2a_{\mathrm{V}}}{a_{\mathrm{V}} + a_{\mathrm{Z}}}\,,\\
e &= \frac{a_{\mathrm{Z}} - a_{\mathrm{V}}}{a_{\mathrm{V}} + a_{\mathrm{Z}}} \doteq 0{,}163\,.
\end{aligned}
$$

[1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hohmannova_elipsa

Krajské kolo 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Předpokládejte, že nosná raketa vynesla sondu dostatečně daleko od Země, že její gravitační vliv můžeme zanedbat. Sonda se teď pohybuje okolo Slunce po stejné dráze jako Země.

b) O kolik se musí snížit rychlost sondy, aby přešla na Hohmannovu trajektorii k Venuši?

Na začátku se sonda pohybuje po kruhové dráze okolo Slunce oběžnou rychlostí

$$v_\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{Z}}} \doteq 29{,}75\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,,$$

kde $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}}$ je gravitační konstanta a $M_\mathrm{S} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Slunce. Sonda musí zpomalit na rychlost v_a v aféliu Hohmannovy elipsy, kterou musíme spočítat

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{GM_\mathrm{S}\left(\frac{2}{(1+e)a} - \frac{1}{a}\right)}\,,$$

$$v_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\frac{1-e}{1+e}} \doteq 27{,}21\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

Rychlost sondy se musí snížit o $v_\mathrm{Z} - v_\mathrm{a} \doteq 2{,}5\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Během příletu na kolizním kurzu k Venuši se oddělí přistávací modul. Orbitální část je pak navedena na oběžnou dráhu okolo Venuše. Ve vzdálenosti 112 200 km nad povrchem planety se spustí raketový motor a převede orbitální část na dráhu s apocentrem v tomto bodě a pericentrem ve výšce 1 510 km nad povrchem Venuše.

c) Jak se musí změnit rychlost sondy, aby přešla na tuto oběžnou dráhu okolo Venuše?

Hohmannova elipsa se dotýká oběžné dráhy Venuše ve svém perihéliu. Kdyby sonda neprolétala v blízkosti Venuše, její rychlost by byla

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{GM_\mathrm{S}\left(\frac{2}{(1-e)a} - \frac{1}{a}\right)}\,,$$

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\frac{1+e}{1-e}} \doteq 37{,}81\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}\,.$$

Jelikož se však sonda dostane do blízkosti Venuše, její rychlost v okamžiku přechodu na oběžnou dráhu bude nepochybně vyšší. Velikost rychlosti dokážeme spočítat ze zákona zachování energie. Na počátku (po přechodu na Hohmannovu trajektorii z oběžné dráhy Země) byla energie na jednotku hmotnosti sondy

$$\epsilon = \frac{1}{2}\frac{GM_\mathrm{S}}{a}\frac{1-e}{1+e} - \frac{GM_\mathrm{S}}{(1+e)a} = -\frac{GM_\mathrm{S}}{2a}\,.$$

První člen je kinetická energie sondy a druhý člen je potenciální energie sondy vzhledem ke Slunci. Potenciální energie vzhledem k Venuši můžeme díky velké vzdálenosti zanedbat.

Krajské kolo 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Jenže, při vzdálenosti 112 200 km nad povrchem Venuše už nemůžememe potenciální energii sondy vzhledem k Venuši zanedbat. Naštěstí se energie na jednotku hmotnosti sondy zachovává, takže

$$\epsilon = -\frac{GM_\mathrm{S}}{2a} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_\mathrm{V}}{r_\mathrm{V}} - \frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{V}}\,,$$
$$v = \sqrt{\frac{2GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{V}} + \frac{2GM_\mathrm{V}}{r_\mathrm{V}} - \frac{GM_\mathrm{S}}{a}} \doteq 38{,}18\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,,$$

kde $M_\mathrm{V} = 4{,}87 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ je hmotnost Venuše a $r_\mathrm{V} = 118\,252\,\mathrm{km}$ je vzdálenost od středu planety. Toto je rychlost ve vztažné soustavě spojené se Sluncem. Nemohli bychom spočítat změnu rychlosti nutnou k přechodu na oběžnou dráhu okolo Venuše, kdybychom neznali vzájemnou rychlost sondy a Venuše. Při příletu po Hohmannově trajektorii sonda jakoby „stíhá“ Venuši, přibližuje se k ní zezadu. Vektory rychlostí sondy a Venuše jsou tudíž rovnoběžné. Oběžná rychlost Venuše okolo Slunce je

$$v_\mathrm{V} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{S}}{a_\mathrm{V}}} \doteq 35{,}22\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Ve vztažné soustavě Venuše se orbitální část přibližuje rychlostí

$$w_1 = v - v_\mathrm{V} \doteq 2{,}96\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Raketový motor musí snížit tuto rychlost na nulu a zároveň udělit sondě rychlost kolmou na spojnici sonda–Venuše. Poloměr Venuše je $R_\mathrm{V} = 6\,052\,\mathrm{km}$. Vzdálenost pericentra je tudíž $r_\mathrm{p} = 7\,562\,\mathrm{km}$ a vzdálenost apocentra je $r_\mathrm{a} = 118\,252\,\mathrm{km}$ od středu planety. Velká poloosa a_1 a excentricita e_1 této eliptické dráhy jsou

$$a_1 = \frac{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}}{2} \doteq 62\,900\,\mathrm{km}\,,$$
$$e_1 = \frac{r_\mathrm{a} - r_\mathrm{p}}{r_\mathrm{p} + r_\mathrm{a}} \doteq 0{,}880\,.$$

Rychlost v apocentru je

$$v_\mathrm{a1} = \sqrt{GM_\mathrm{V}\left(\frac{2}{(1+e_1)a_1} - \frac{1}{a_1}\right)}\,,$$
$$v_\mathrm{a1} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{V}}{a_1}\frac{1-e_1}{1+e_1}} \doteq 0{,}57\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Takže dojdeme k odpovědi, že orbitální část musí zpomalit o $3{,}0\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ ve směru k Venuši a získat rychlost $0{,}57\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ ve směru kolmém na směr k Venuši.

Tyto dva manévry (přechod na Hohmannovu elipsu a přechod na oběžnou dráhu kolem Venuše) stojí bez pochyby velké množství paliva. První změnu dráhy provedl ještě poslední stupeň nosné rakety, manévr u Venuše už však musel provést vlastní raketový motor orbitální části. Teď zanedbejte palivo použité na korekce dráhy během letu a předpokládejte, že všechno palivo bylo spotřebováno při tomto manévru.

Krajské kolo 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Jaká by musela být výtoková rychlost spalin? Změna rychlosti rakety v závislosti na množství spotřebovaného paliva a rychlosti spalin je popsána Ciolkovského rovnicí[2] Přistávací modul nenesl žádné palivo.

Ciolkovského rovnice svazuje dohromady změnu rychlosti rakety Δv s rychlostí zplodin u, počáteční hmotností m_1 a koncovou hmotností m_2

$$\Delta v = u \ln \frac{m_1}{m_2} \,.$$

Při přechodu na oběžnou dráhu okolo Venuše sonda změnila rychlost o

$$\Delta v_\mathrm{V} = \sqrt{2,96^2 + 0,57^2}\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \doteq 3{,}01\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \,.$$

U Venuše motor urychloval už pouze orbitální část, přistávací modul padal na planetu. Připomeňme si hmotnosti, celá sonda vážila $m_0 = 4\,936\,\mathrm{kg}$, z toho bylo $m_\mathrm{o} = 2\,231\,\mathrm{kg}$ orbitální část, $m_\mathrm{m} = 1\,560\,\mathrm{kg}$ přistávací modul a $m_\mathrm{p} = 1\,145\,\mathrm{kg}$ palivo. Dostaneme tedy rovnici

$$\Delta v_\mathrm{V} = u \ln \frac{m_\mathrm{o} + m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{o}} \,,$$
$$u = \frac{\Delta v_\mathrm{V}}{\ln \frac{m_\mathrm{o}+m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{o}}} \doteq 7{,}3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}} \,.$$

Veněra 9 používala raketový motor na kapalné palivo. Tato hodnota rychlosti spalin je vyšší než dosahují běžné kapalinové raketové motory ve vakuu ($3{,}5 - 4{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$). To znamená, že Veněra 9 v reálu zvolila nějaký výhodnější způsob přechodu na oběžnou dráhu. Přece jenom, měnit vektor rychlosti o 90° není příliš výhodné. Sonda asi zapnula motor až blíže k Venuši, kde musela vektor rychlosti změnit o menší úhel.

Přistávací modul vstoupil do atmosféry Venuše ve výšce 125 km rychlostí $10{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

e) Spočítejte celkové množství energie uvolněné při sestupu sondy atmosférou. Vypočtěte též množství uvolněné energie na jednotku hmotnosti. Diskutujte, zda je možné, aby se tato energie proměnila výhradně na teplo.

Přistávací modul vstoupil do atmosféry rychlostí $w = 10{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ (ve vztažné soustavě Venuše) ve výšce $h = 125\,\mathrm{km}$. Počáteční energie přistávacího modulu je

$$E_1 = \frac{1}{2} m_\mathrm{m} w^2 - \frac{G M_\mathrm{V} m_\mathrm{m}}{R_\mathrm{V} + h} \doteq 7{,}267 \cdot 10^9\,\mathrm{J} \,.$$

Koncový stav je modul sedící na povrchu Venuše s nulovou rychlostí. Jeho energie je

$$E_2 = -\frac{G M_\mathrm{V} m_\mathrm{m}}{R_\mathrm{V}} \doteq -8{,}373 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \,.$$

Rozdíl energií E_1 a E_2 spočteme jako

$$E_1 - E_2 \doteq 9{,}10 \cdot 10^{10}\,\mathrm{J} \,.$$

[2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Ciolkovsk%C3%A9ho_rovnice

Uvolněná tepelná energie na jednotku hmotnosti je

$$\frac{E_1 - E_2}{m_\mathrm{m}} \doteq 5{,}83 \cdot 10^7\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}\,.$$

To je velmi vysoká hodnota energie, kde lze očekávat, že většina se přeměnila na teplo (a zbytek např. na mechanickou energii vlnění či ionizaci a excitaci v atmosféře Venuše). Vezměme si například, že voda má měrnou tepelnou kapacitu $c = 4\,200\,\mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Takové množství tepelné energie by ohřálo vodu se stejnou hmotností jako přistávací modul o 13 900 K. To je samozřejmě nesmysl, protože voda by se mezitím vypařila a molekuly by se ionizovaly. Při sestupu atmosférou část tepla odebere okolní prostředí, takže ne všechno absorbuje přistávací modul, ale i tak je to číslo obrovské. Proto podstatnou část přistávacího modulu tvořil tepelný štít (tepelný štít 900 kg, samotná přistávací část 660 kg), který byl odhozen až po zpomalení na $250\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, kdy byl také vystřelen první padák.

C Kosmická sprška

(max. 20 bodů)

Letos tomu bude 85 let od doby, kdy rakouský fyzik Victor F. Hess získal Nobelovu cenu za objev kosmického záření. Od té doby jsme se dozvěděli o kosmickém záření mnoho, a to třeba i díky projektům, jako je například H.E.S.S (High Energy Spectroscopy System), což je soustava několika teleskopů v Namibii, která má za úkol pozorovat Čerenkovovské fotony vyprodukované ve sprškách kosmického záření.

Kosmická sprška je jev, kdy vysokoenergetická částice pronikne do zemské atmosféry, kde způsobí vznik kaskády částic a elektromagnetického záření. Tyto spršky jsou na zemi různými způsoby detekovány a díky tomu se můžeme dozvídat více o částicích, které spršky způsobily a též o zdrojích těchto částic. Pokud se jedná o čistě elektromagnetickou spršku vyvolanou například ultra-relativistickým elektronem může následně docházet k těmto interakcím

$$\begin{aligned} e^- &\longrightarrow e^- + \gamma\,, \\ \gamma &\longrightarrow e^+ + e^-\,, \\ e^+ &\longrightarrow e^+ + \gamma\,. \end{aligned}$$

Řečeno slovy: primární elektron je zpomalen vlivem interakcí s atomy v zemské atmosféře. Při tom vyzařuje brzdné záření (fotony) γ dokud se nezastaví (první rovnice). Vyprodukované brzdné fotony produkují elektron-pozitronové páry. Při takovéto interakci brzdný foton zanikne, ale vzniknou dvě nové částice: elektron a pozitron (druhá rovnice). Vyprodukované pozitrony interagují podobně jako elektrony. Produkují brzdné záření, dokud se úplně nezastaví (třetí rovnice). A celý proces se opakovaně aplikuje pro všechny nově vzniklé částice. Při tom standardně platí zákony zachování.

Sprška dosáhne maxima intenzity[3] pokud pravděpodobnost produkce elektron-pozitronových párů je stejná jako pravděpodobnost ionizace atomů v zemské atmosféře. K tomu dochází při takzvané

[3] Jedná se o hloubku v zemské atmosféře, kdy vzniká nejvíce částic.

kritické energii, která je rovna $E_\mathrm{c} = 80\,\mathrm{MeV}$. Jedna interakce (libovolná z výše popsaných) proběhne v průměru na vzdálenosti X. Tuto vzdálenost nazýváme radiační délka a v atmosféře je rovna $X = 304\,\mathrm{m}$.

a) Představte si, že do zemské atmosféry vlétnul elektron s energií $E_\mathrm{in} = 1\,\mathrm{TeV}$ a k primární interakci došlo ve výšce $H_0 = 15\,\mathrm{km}$ nad zemským povrchem. Na základě výše uvedených předpokladů odhadněte, v jaké výšce nad zemským povrchem dosáhne sprška maxima intenzity.

Pokud uvažujeme, že k jedné interakci dochází přesně na vzdálenosti jedné interakční délky, vznikne na k interkačních délkách

$$N = 2^k$$

částic. Tedy zapsáno pomocí radiační délky a vzdálenosti d od první iterakce máme $k = d/X$. Pokud sprška zaniká když energie vyprodukovaných částic je rovna E_c, musí zřejmě platit

$$\frac{E_\mathrm{in}}{E_\mathrm{c}} = 2^{\frac{d}{X}}\,,$$

a odtud

$$d = X \log_2\left(\frac{E_\mathrm{in}}{E_\mathrm{c}}\right)\,.$$

Výška nad povrchem Země tedy bude

$$H = H_0 - d = H_0 - X \log_2\left(\frac{E_\mathrm{in}}{E_\mathrm{c}}\right)\,,$$

z čehož po číselném dosazení hodnot máme $H \doteq 10\,863\,\mathrm{m}$.

Pokud některá z vyprodukovaných částic překročí rychlost světla v atmosféře, vzniká Čerenkovovo záření. Představte si, že bychom chtěli postavit observatoř, která by se skládala z několika dalekohledů (podobně jako experiment H.E.S.S.) a chtěli bychom, aby jedna sprška byla pozorována více dalekohledy najednou, abychom mohli pozorovat stereoskopický obraz.

b) Přibližně odhadněte průměr kruhové plochy na Zemi, kterou má smysl pokrýt dalekohledy tak, abychom měli dalekohledy co nejdále od sebe (pro lepší stereoskopický efekt), ale naopak aby plocha nebyla zbytečně velká (větší pokrytá plocha znamená potřebu více dalekohledů a větší náklady na stavbu observatoře). Svoji odpověď zdůvodněte a podložte výpočtem. Uvažujte parametry spršky z předchozí úlohy a předpokládejte, že sprška v atmosféře téměř nepokračuje po tom, co dosáhne maxima a že většina vyprodukovaných částic je koncentrována v těsné blízkosti osy spršky. Též je známo, že čerenkovovské fotony jsou vyzařovány izotropně v celé délce spršky. Index lomu atmosféry ve výšce, kde běžně vzniká sprška, berte $n = 1{,}000\,1$.

Nápověda: Čerenkovovo záření je vyzařováno do kuželu s dobře definovaným vrcholovým úhlem.

Čerenkovovo záření je vyzařováno částicí ve směru jejího pohybu do kuželu s vrcholovým úhlem

$$\cos\theta = \frac{1}{n\beta}\,,$$

kde $\beta = v/c$. Hledané rozměry observatoře budou tedy odpovídat ploše na Zemi, kterou mohou osvítit fotony vyzářené do tohoto kužele. Největší vrcholový úhel bude pro nejpomalejší částice ve spršce. Uvažujme tedy elektrony s energií E_c. Rychlost těchto elektronů vypočítáme použitím relativistického vztahu $\beta = pc/E$, kde pro hybnost platí

$$pc = \sqrt{E^2 - m_e^2 c^4}\,,$$

přičemž m_e je klidová hmotnost elektronu ($m_e = 511\,\mathrm{keV}/c^2$). Poloměr ozářené plochy bude

$$r = H \arccos\left(\frac{E_c}{n\sqrt{E_c^2 - m_e^2 c^4}}\right)\,,$$

což po dosazení číselných hodnot dává $r \doteq 137\,\mathrm{m}$, potom průměr této oblasti je $D \doteq 274\,\mathrm{m}$. Ve výpočtu jsme předpokládali, že elektrony s energií E_c jsou v místě, kde sprška dosáhne maxima. Výsledky se mohou mírně lišit v závislosti na tom, jaké použijeme energie elektronů a v jaké výšce předpokládáme, že k vyzáření čerenkovovských fotonů dojde.

Teleskop A určený pro pozorování čerenkovovských fotonů vzniklých ve spršce zachytil následující událost (vizte obrázek 1). Snímek zabírá ve směru vertikální osy 5° na obloze. Dalekohled mířil přímo do zenitu. Ze snímku z teleskopu B, který pozoroval spršku z místa kousek vedle, bylo určeno, že osa spršky směřovala kolmo k povrchu Země a procházela ve vzdálenosti $b = 100\,\mathrm{m}$ od středu zrcadla teleskopu A.

c) Odhadněte lineární rozměr této spršky (t.j. vzdálenost od první interakce primární částice až po místo zániku spršky).

Prostřední obrazový segment na snímku je shodný se zenitem. Fakt, že sprška mířila kolmo k Zemi implikuje, že sprška se nám jeví na snímku jako elipsa, jejíž hlavní osa prochází středem snímku (naopak toto neplatí). Protože známe rozměry snímku ve vertikálním směru, můžeme určit, kolik stupňů na obloze zabírá obraz spršky. Protože se pořád jedná o poměrně malý kus oblohy, můžeme předpokládat, že ještě nedochází ke zkreslení projekce na okraji snímku. Zenitová vzdálenost počátečního bodu spršky je ze snímku $z_1 \doteq 0{,}58°$ a zenitová vzdálenost koncového bodu spršky je $z_2 \doteq 2{,}64°$. Zenitové vzdálenosti měříme od středu snímku v ose spršky.[4] Lineární rozměr l spršky proto určíme jako

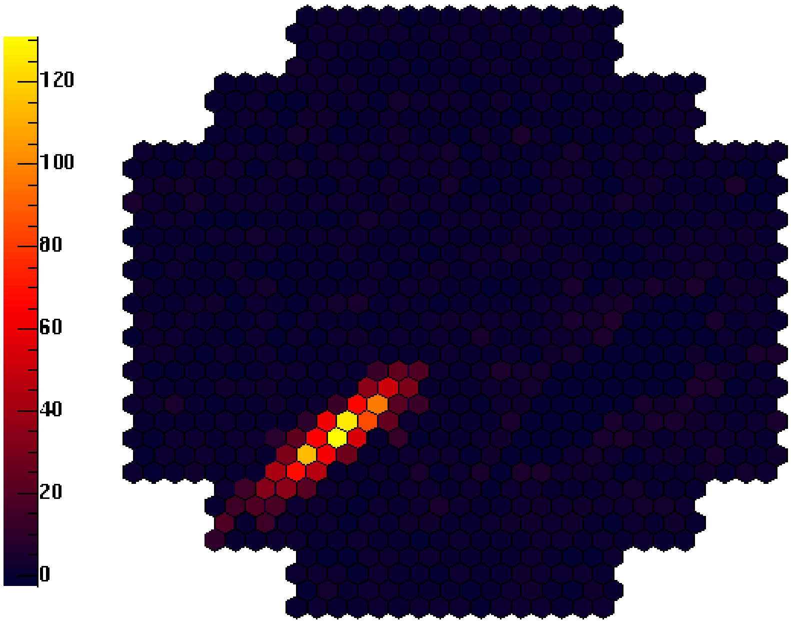
$$l = b\left[\mathrm{tg}\,(90° - z_1) - \mathrm{tg}\,(90° - z_2)\right].$$

Číselně vychází $l \doteq 7\,710\,\mathrm{m}$.

d) Odhadněte nejistotu určení lineárního rozměru spršky z předchozí úlohy. Na základě vypočtené nejistoty též uveďte lineární rozměr vypočtený v předchozí úloze ve vhodném tvaru (výsledek udaný na vhodný počet platných číslic ± nejistota).

[4] Z rozměrů změřených na snímku pravítkem určíme úhlové rozměry pomocí trojčlenky, protože víme, že vertikální rozměr snímku odpovídá 5°

Krajské kolo 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Snímek spršky z čerenkovovského teleskopu. Barevná škála určuje intenzitu záření, která byla detekována daným obrazovým elementem, v jednotkách počtu vytvořených fotoelektronů na daném obrazovém elementu. Adaptováno na základě snímku dostupného na `https://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/`

Nejistotu určení počátečního nebo koncového bodu je oprávněné uvažovat jako polovinu nejdelšího rozměru jednoho šestiúhelníkového obrazového elementu. Měřením z obrázku odhadneme nejistotu určení počátku nebo konce na $\sigma_\mathrm{z} = 0{,}1°$. V případě, že jsme v předchozí úloze změřili zenitové vzdálenosti jako hodnoty, které nejlépe charakterizují tvar spršky, mohl (s uvážením nejistoty) největší rozměr spršky, který jsme mohli změřit, být

$$l_\mathrm{max} = b\,[\tan(90° - z_1 + \sigma_\mathrm{z}) - \mathrm{tg}\,(90° - z_2 - \sigma_\mathrm{z})]$$

a nejmenší rozměr

$$l_\mathrm{min} = b\,[\tan(90° - z_1 - \sigma_\mathrm{z}) - \mathrm{tg}\,(90° - z_2 + \sigma_\mathrm{z})].$$

Nejistotu určení lineárního rozměru pak můžeme vzít jako polovinu intervalu mezi těmito hodnotami, tedy

$$\sigma_l = \frac{l_\mathrm{max} - l_\mathrm{min}}{2}\,.$$

Číselně vychází $\sigma_l \doteq 1{,}8\,\mathrm{km}$ (nejistotu neuvádíme na zbytečně mnoho platných číslic, není-li k tomu dobrý důvod). Výsledek lineárního rozměru spršky zaokrouhlíme a zapíšeme ve tvaru $l \doteq (7{,}7 \pm 1{,}8)\,\mathrm{km}$.

Pokud je primární částicí hadron, vznikají v interakcích π mezony, jejichž rozpadem dochází k produkci mionů. Uvažujte, že energie vyprodukovaného mionu je $E_\mu = 4{,}8\,\mathrm{GeV}$ a jeho doba života (měřeno v klidové soustavě mionu) je $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

e) Jakou dobu života mionu změří pozorovatel na Zemi, který stojí přímo v ose kosmické spršky?

Přímou aplikací vztahu pro dilataci času zjistíme dobu života mionu, kterou změří pozorovatel na Zemi

$$t = \gamma\tau = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2}\tau\,.$$

Zde jsme využili vztah pro relativistický faktor $\gamma = \frac{E_\mu}{m_\mu c^2}$, přičemž $m_\mu = 105\,\mathrm{MeV/c^2}$ je klidová hmotnost mionu. Po číselném dosazení vychází $t \doteq 1{,}0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$.

f) V jaké maximální výšce nad Zemí může mion z předchozí úlohy vzniknout, aby ho bylo možné na Zemi detekovat?

Pro maximální výšku vzniku mionu tak, aby mohl být na Zemi detekován, zřejmě platí

$$h_{\max} = vt\,.$$

Rychlost vypočítáme podobně, jako jsme v druhé podúloze počítali rychlost elektronů a pozitronů, tedy

$$v = \frac{pc}{E_\mu} = \frac{\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4}}{E_\mu}c\,.$$

Číselně vychází $h_{\max} \doteq 30\,\mathrm{km}$.

D Velikost Měsíce (praktická)

(max. 30 bodů)

Tématem této úlohy bude měření úhlové velikosti Měsíce a jejích změn v čase, k čemuž využijete fotoaparát na stativu. Na základě výsledků svých měření následně určíte excentricitu oběžné dráhy Měsíce kolem Země.

a) Do vašeho řešení uveďte značku a typ fotoaparátu, který použijete.

b) Pro účely měření nastavte fixní ohniskovou vzdálenost objektivu (zoom) a rozlišení fotografií. Tyto parametry zvolte vhodným způsobem tak, aby byl efekt změny úhlové velikosti Měsíce mezi perigeem a apogeem měřitelný. Hodnoty těchto parametrů zaznamenejte do vašeho řešení.

c) Pořiďte několik snímků Měsíce co nejblíže perigeu a apogeu (využijte hvězdářskou ročenku nebo internet k vyhledaní okamžiků perigea a apogea). U každého snímku zaznamenejte čas a místo pořízení snímku.

d) Pro každý snímek určete velikost Měsíce v pixelech.

e) Určete průměrné hodnoty velikosti D_p a D_a Měsíce v pixelech v perigeu a v apogeu. Odhadněte nejistoty ΔD_p a ΔD_a získaných hodnot.

f) Na základě získaných dat určete numerickou excentricitu e dráhy Měsíce kolem Země a její nejistotu Δe.

Zanedbáme-li rozdíly způsobené polohou pozorovatele na povrchu Země, potom platí

$$\frac{D_\mathrm{p}}{D_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{1+e}{1-e}\,,$$

kde jsme označili r_a a r_p velikost průvodiče Měsíce v apogeu a v perigeu. Odtud pak máme

$$e = \frac{D_\mathrm{p} - D_\mathrm{a}}{D_\mathrm{p} + D_\mathrm{a}}\,.$$

Nejistotu Δe ve výpočtu excentricity pak z Gaussova vzorce pro šíření nejistot určíme jako

$$\Delta e = \frac{2}{(D_\mathrm{p} + D_\mathrm{a})^2}\sqrt{(D_\mathrm{p}\Delta D_\mathrm{a})^2 + (D_\mathrm{a}\Delta D_\mathrm{p})^2}\,.$$

g) Jak bychom mohli korigovat chybu, kterou vnášíme do výsledku zanedbáním konečného rozměru Země?

Je zřejmé, že vliv na úhlovou velikost Měsíce na obloze bude mít úhel sevřený mezi spojnicí středů Země a Měsíce a spojnicí středu Země s pozorovatelem. Budeme-li pracovat s přiblížením $x \equiv R_\mathrm{Z}/a_\mathrm{M} \approx 0{,}016 \ll 1$ (kde jsme označili R_Z poloměr Země a a_M velkou poloosu dráhy měsíce), potom je výše popsaný úhel roven zenitové vzdálenosti z Měsíce pro daného pozorovatele. Úhlovou velikost δ Měsíce na obloze pak můžeme vyjádřit jako

$$\delta = \frac{R_\mathrm{M}}{r_\mathrm{M} - R_\mathrm{Z}\cos z}\,,$$

kde R_M je skutečná velikost Měsíce a r_M je velikost průvodiče Měsíce. Přibližně lze toto přepsat jako

$$\delta \approx \frac{\delta_0}{1 - x\cos z}\,,$$

kde $\delta_0 \equiv D_\mathrm{M}/r_\mathrm{M}$ je úhlová velikost Měsíce, kterou by naměřil pozorovatel ve středu Země a kde ve jmenovateli jsme nahradili $r_\mathrm{M} \approx a_\mathrm{M}$ (variace v r_M by už tak byly potlačeny hodnotou $x \ll 1$). Ve skutečnosti tedy platí

$$\frac{D_\mathrm{p}}{D_\mathrm{a}} = \frac{1+e}{1-e}\frac{1 - x\cos z_\mathrm{a}}{1 - x\cos z_\mathrm{p}}\,,$$

kde z_p a z_a jsou hodnoty zenitových vzdáleností Měsíce při pozorování v perigeu a apogeu. Volbou času měření tak, aby bylo splněno $z_\mathrm{p} = z_\mathrm{a}$, tedy dosáhneme odstranění vlivu konečného rozměru Země na výsledek.