Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část

Krátké úlohy

A Sluneční palivo

(max. 10 bodů)

Julius Mayer (1814–1878), jeden z průkopníků zákona zachování energie, ve své době postuloval, že Slunce získává svou zářivou energii z neustálého pohlcování planetek a komet.

a) Řádově odhadněte kolik typických těles (pro jednoduchost předpokládejme jejich rozměr $\sim 1\,\mathrm{km}^3$) vyskytujících se v Oortově oblaku by za jednu sekundu muselo dopadnout na Sluneční povrch, aby se takto vygeneroval její zářivý výkon.

Jedná se o Fermiho úlohu na odhad tudíž postup není zásadní. Spíše hodnotíme použité klíčové znalosti vstupující do odhadu: hmotnost $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, poloměr $7 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$ a zářivý výkon Slunce $4 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$.

Vzdálenost Oortova mračna považujeme za nekonečnou a tedy gravitační energie uvolněná pádem tělesa na povrch Slunce je řádově

$$E = \frac{GM}{R} \doteq 2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}\,.$$

Objekty v Oortově mračnu jsou většinou tvořeny zmrzlou vodou, tedy $1\,\mathrm{km}^3$ má přibližně hmotnost $10^{12}\,\mathrm{kg}$. K vysvětlení Sluneční luminozity je tedy potřeba řádově 2 000 dopadů za sekundu.

b) Řádově také odhadněte jak dlouho by tímto způsobem mohlo být Slunce energicky zásobeno.

Hmotnost Oortova oblaku se odhaduje na 100 hmotností Země. Toto sluneční palivo by proto vydrželo řádově 10 000 let, než by se oblak zcela vyčerpal.

B Zorné pole

(max. 10 bodů)

Určete průměr d zorného pole dalekohledu (v úhlových stupních), víme-li, že Polárce (α UMi, rektascenze $\alpha = 2^{\mathrm{h}}\,31^{\mathrm{m}}\,49^{\mathrm{s}}$, deklinace $\delta = 89^\circ\,15'\,51''$) trvalo přesně $t = 6\,\mathrm{h}$, než se ze středu zorného pole dostala na jeho okraj. Dalekohled je usazen na nemotorizované montáži.

Je zřejmé, že zorné pole dalekohledu zabírá velmi malou část oblohy, můžeme tedy s dobrou přesností používat rovinnou geometrii. Nejdříve uvažujme kružnici Σ se středem N ve směru severního světového pólu o poloměru $\rho = 90^\circ - \delta \doteq 44'\,9''$. Toto je množina bodů, které Polárka vykresluje na obloze během jednoho dne. Dále zkonstruujeme kružnici S o poloměru $r = d/2 < 2\rho$ se středem C na obvodu kružnice Σ. Ze zadání je potom zřejmé, že úhel mezi poloměrem kružnice Σ vedeným do bodu C a poloměrem kružnice Σ vedeným do jednoho z průsečíků kružnic S a Σ je přesně t. Zároveň vidíme, že platí

$$r = 2\rho \sin\frac{t}{2} = \sqrt{2}\rho\,,$$

a tedy $d = 2\sqrt{2}\rho = 2{,}1^\circ$.

C Dvojhvězda I

(max. 10 bodů)

Dvojhvězda má roční paralaxu $\pi = 0{,}06''$. Obě její složky jsou identické a mají efektivní povrchovou teplotu $T = 7\,000\,\mathrm{K}$. Jaká je minimální vzdálenost složek od sebe (v au), aby je bylo možné rozlišit na snímcích pořízených optickým dalekohledem s průměrem objektivu 8 cm? Uvažujte, že dalekohled je vybaven snímačem s uniformní spektrální odezvou, tedy že má stejnou citlivost na všech vlnových délkách v optickém oboru. Jaký by musel mít takovýto dalekohled průměr, aby dokázal obě hvězdy ukázat jako kotoučky (a ne jako bodové zdroje), víme-li, že dvojhvězdu na obloze pozorujeme jako objekt s hvězdnou velikostí $m = 5{,}0\,\mathrm{mag}$? Kotouček považujeme za rozlišený, pokud ho dokážeme zobrazit s rozlišením alespoň 4×4 pixely. Bolometrickou korekci a mezihvězdnou extinkci zanedbejte.

Nejprve vypočteme minimální úhlovou vzdálenost mezi složkami. Z Wienova zákona určíme vlnovou délku maxima vyzařování obou složek

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}\,.$$

Potom pro rozlišovací schopnost platí (při uniformní spektrální odezvě detektoru je pro určení rozlišovací schopnosti relevantní právě Wienovo maximum)

$$\sin\theta \approx \theta = \frac{1{,}22\lambda_{\max}}{D}\,.$$

Dvojhvězda má roční paralaxu $\pi = 0{,}06''$, tedy jedna au ve vzdálenosti této dvojhvězdy je vidět pod úhlem $\pi = 0{,}06''$. Potom pro vzdálenost složek od sebe v au dostaneme

$$d = \frac{\theta}{\pi} \approx \frac{1{,}22\lambda_{\max}}{\pi D}\,,$$

a tedy $d \doteq 21{,}7\,\mathrm{au}$. Aby bylo možné složky dvojhvězdy od sebe rozlišit daným dalekohledem, musejí být od sebe daleko alespoň 21,7 au.

Dále spočteme absolutní hvězdnou velikost systému M. Z Pogsonovy rovnice máme

$$M = m + 5 + 5\log\pi \doteq 3{,}9\,\mathrm{mag}\,.$$

Z Pogsonovy rovnice rovněž píšeme

$$2L_0 = 10^{-0{,}4(M - M_\odot)} L_\odot\,,$$

kde $M_\odot \doteq 4{,}74\,\mathrm{mag}$ je absolutní hvězdná velikost Slunce, $L_\odot$ je zářivý výkon Slunce a L_0 je zářivý výkon jedné složky dvojhvězdy. Ten můžeme ze Stefanova–Boltzmannova zákona napsat jako

$$L_0 = 4\pi R^2 \sigma T^4\,,$$

kde R je poloměr složky. Průměr tedy lze vyjádřit jako

$$2R = \sqrt{\frac{L_0}{4\pi\sigma T^4}} = \sqrt{\frac{10^{-0{,}4(m+5+5\log\pi - M_\odot)} L_\odot}{8\pi\sigma T^4}} \doteq 0{,}0066\,\mathrm{au}\,.$$

Abychom ale dokázali kotouček zobrazit s rozlišením alespoň 4×4 pixely, musíme být schopni od sebe rozlišit na povrchu hvězdy sva body vzdálené ne oe celý půměr $2R$, ale o jeho čtvrtinu $R/2$. Pomocí výsledku předchozí části úlohy tedy trojčlenkou dostáváme, že hypotetický dalekohled, který by ukázal jednotlivé složky jako kotoučky, by musel mít v průměru přibližně 1 050 m.

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Neznámé místo

(max. 10 bodů)

Pozorovatel na neznámém místě na Zemi spatřil ve 23:00 pásmového času hvězdu, která se nacházela přesně v zenitu. Následující den opět ve 23:00 pásmového času si všiml, že se zenitová vzdálenost této hvězdy změnila na $z = 0{,}8°$. Určete zeměpisnou šířku φ pozorovatele.

Prochází-li daná hvězda kdykoli během dne zenitem, musí být její deklinace rovna $\delta = \varphi$. Vyjdeme ze sférického trojúhelníku PHZ, kde P značí světový pól, H značí polohu hvězdy druhý den pozorování a Z značí zenit. V tomto trojúhelníku máme vzdálenosti $|\mathsf{PH}| = 90° - \delta = 90° - \varphi$ a $|\mathsf{PZ}| = 90° - \varphi$ a rovněž známe velikost úhlu ZPH, totiž

$$\omega \equiv |\sphericalangle \mathsf{ZPH}| = 24^{\mathrm{h}} - 23^{\mathrm{h}}56^{\mathrm{m}}4^{\mathrm{s}} = 3{,}932^{\mathrm{m}} = 58{,}98' \,.$$

Také známe vzdálenost $|\mathsf{ZH}| = z = 0{,}8°$. Ze sférické kosinové věty

$$\cos|\mathsf{ZH}| = \cos|\mathsf{PZ}|\cos|\mathsf{PH}| + \sin|\mathsf{PZ}|\sin|\mathsf{PH}|\cos|\sphericalangle \mathsf{ZPH}| \,,$$

tedy dostáváme vztah

$$\cos z = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos\omega = 1 + \cos^2\varphi(\cos\omega - 1) \,.$$

Odtud můžeme konečně psát

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos z}{1-\cos\omega}} \approx \frac{z}{\omega} \,,$$

kde v posledním kroku jsme využili faktu, že $z, \omega \ll 1$ (vyjádřeno v radiánech) a že $\cos x \approx 1 - x^2/2$ pro $x \ll 1$. Číselně dostaneme $\varphi \doteq 35{,}5°$.

Poznámka: Jelikož, úhly ω a z jsou velmi malé, je možné úlohu řešit i za použití aproximace, kdy stranu HZ *trojúhelníka* PHZ *nebereme jako oblouk hlavní kružnice, nýbrž jako oblouk vedlejší kružnice konstantní deklinace. Takovýto trojúhelník pak není sférický a identifikace $|\mathsf{ZH}| \approx z$ platí pouze přibližně pro malé hodnoty z. V takovémto trojúhelníku pak jednoduše máme*

$$|\mathsf{ZH}| = \omega\cos\varphi$$

a tedy

$$\cos\varphi = \frac{|\mathsf{ZH}|}{\omega} \approx \frac{z}{\omega} \,.$$

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

E Dvojhvězda II

(max. 20 bodů)

Vizuální dvojhvězda (rektascenze $\alpha = 19^{\mathrm{h}}\,12^{\mathrm{m}}\,33^{\mathrm{s}}$, deklinace $\delta = 34^\circ\,52'\,2''$), která leží v neznámé vzdálenosti d od Země, sestává ze dvou identických složek o neznámých hmotnostech $M_1 = M_2 \equiv M$. Z dlouhodobých astrometrických pozorování plyne, že hvězdy obíhají kolem společného hmotného středu s periodou $P = 1{,}2\,\mathrm{y}$ po kruhové dráze, jejíž poloměr r se astronomům na Zemi jeví pod úhlem $\rho = 0{,}01''$.

Dne 10. dubna 2021 ve 12:00 SELČ byl u jedné ze složek naměřen vlastní pohyb $\mu_\alpha = 0{,}003^{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{y}^{-1}$ v rektascenzi a $\mu_\delta = 0{,}03'' \cdot \mathrm{y}^{-1}$ v deklinaci. V tentýž okamžik byla za pomocí spektroskopického pozorování změřena vlnová délka čáry H_α ve spektru této složky $\lambda = 656{,}26\,\mathrm{nm}$, přičemž laboratorní vlnová délka čáry H^α činí $\lambda_0 = 656{,}28\,\mathrm{nm}$.

Vlastní pohyb hmotného středu dvojhvězdy a vliv roční paralaxy v této úloze neuvažujeme.

a) Vypočtěte číselně velikost v_r radiální rychlosti složky v $\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ v okamžiku měření.

Označme $\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_0|$. Z Dopplerova jevu víme, že $v_\mathrm{r} = c\Delta\lambda/\lambda_0$. Číselně dostáváme $v_\mathrm{r} \doteq 9{,}14\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

b) Vypočtěte číselně vlastní pohyb μ složky na zemské obloze v úhlových vteřinách za rok v okamžik měření.

Platí $\mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 \cos^2 \delta + \mu_\delta^2}$, kde μ_α a μ_δ dosazujeme ve stejných jednotkách. Číselně dostáváme $\mu \doteq 0{,}05'' \cdot \mathrm{y}^{-1}$.

c) Najděte obecný vztah svazující veličiny d, ρ, P, μ a v_r. Pomůže vám, když si nejdříve různými způsoby vyjádříte velikost v rychlosti složek vzhledem k hmotnému středu dvojhvězdy.

Pro velikost v rychlosti složek vzhledem k hmotnému středu dvojhvězdy platí $v = \sqrt{v_\mathrm{r}^2 + \mu^2 d^2}$ a zároveň $v = 2\pi r/P = 2\pi\rho d/P$. Máme tedy $2\pi\rho d/P = \sqrt{v_\mathrm{r}^2 + \mu^2 d^2}$ nebo také

$$\frac{v_\mathrm{r}}{d} = \sqrt{\left(\frac{2\pi\rho}{P}\right)^2 - \mu^2}\,.$$

d) Určete číselně vzdálenost d dvojhvězdy od Země v pc.

Z předchozích částí můžeme vyjádřit

$$d = \frac{v_\mathrm{r}}{\sqrt{\left(\frac{2\pi\rho}{P}\right)^2 - \mu^2}}\,.$$

Číselně máme $d \doteq 88\,\mathrm{pc}$.

e) Určete hmotnost M každé složky v jednotkách hmotnosti Slunce.

Ze 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{2GM}{4\pi^2} = \frac{8r^3}{P^2} = \frac{8\rho^3 d^3}{P^2}\,,$$

neboli

$$M = \frac{16\rho^3 d^3 \pi^2}{GP^2}\,.$$

Číselně máme $M \doteq 1{,}9 M_{\mathrm{S}}$.

F Opozice Marsu

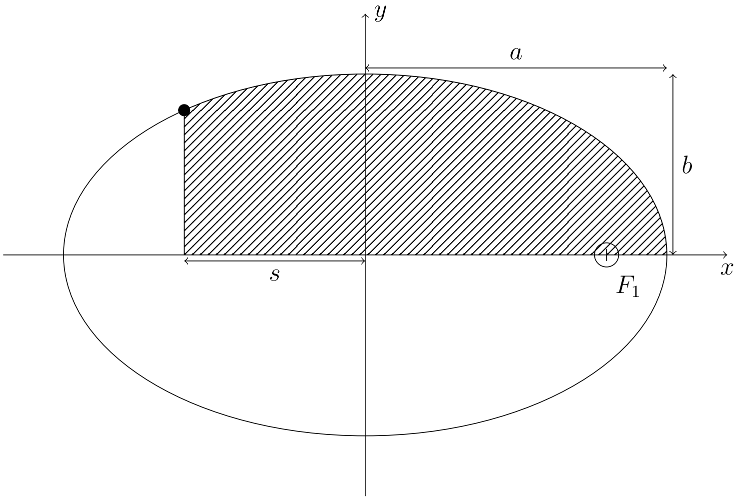
(max. 20 bodů)

Poznámka: Podúlohy e) a f) můžete řešit bez další bodové penalizace, i pokud se vám nepovedlo vyřešit podúlohy a) až d).

V této úloze se budeme věnovat detailnímu popisu časové zavislosti pohybu těles po elipse. Na obrázku 1 vidíte obecnou eliptickou dráhu s excentricitou e s vyznačenou planetou (černý puntík). Slunce se nachází v ohnisku F_1. Plocha šrafované části v závislosti na s je

$$S_1 = \frac{ab}{2}\left(\arccos\frac{s}{a} - \frac{s}{a}\sqrt{1-\left(\frac{s}{a}\right)^2}\right)\,.$$

Vzdálenost s je kladná v kladném směru osy x a záporná v opačném směru (takže pro situaci na



Obrázek 1

obrázku 1 platí $s < 0$).

a) Vyjádřete plochu S opsanou spojnicí Slunce–planeta od okamžiku, kdy planeta prošla perihéliem, pomocí veličin a, b, s a e.

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Plochu opsanou průvodičem zjistíme tak, že k ploše S_1 přičteme obsah trojúhelníku S_2 (viz obrázek 2)

$$S_2 = \frac{1}{2}(s - ea)h\,,$$

a tedy

$$S_2 = \frac{1}{2}(s - ea)b\sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2}\,.$$

Stále zachováváme znaménkovou konvenci u veličiny s. Všimněte si, že pokud $s < ea$, pak plocha S_2 vyjde záporná a vlastně ji odečítáme. Plocha S opsaná průvodičem (šrafovaná plocha) je

$$S = S_1 + S_2\,,$$

takže dosazením dostáváme

$$S = \frac{ab}{2}\left(\arccos\frac{s}{a} - \frac{s}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2}\right) + \frac{1}{2}(s - ea)b\sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2}\,,$$

a tedy

$$S = \frac{ab}{2}\left(\arccos\frac{s}{a} - e\sqrt{1 - \left(\frac{s}{a}\right)^2}\right)\,.$$

Předpokládejme, že planeta obíhá Slunce s periodou T a od průchodu perihéliem uběhl čas t. Při popisu polohy na elipse se objevují tři úhly, kterým se říká jim anomálie. Střední anomálie M je úhel, který by planeta urazila za čas t pohybujíc se po kruhové dráze konstantní úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi/T$.

Definovat excentrickou anomálii E slovně je poněkud složitější. Sestrojme kružnici o poloměru a se středem v počátku a dále sestrojme rovnoběžku s osou y procházející planetou. Kružnice a rovnoběžka se protínají ve společném průsečíku. Excentrická anomálie E je potom úhel perihélium–střed elipsy–průsečík.

Pravá anomálie ν je úhel perihélium–Slunce–planeta. Excentrická anomálie E a pravá anomálie ν jsou zakresleny v obrázku 3.

b) Vyjádřete výsledek pro plochu S a podúlohy a) pomocí veličin a, b, e a E.

Pro excentrickou anomálii platí (viz obrázek 2)

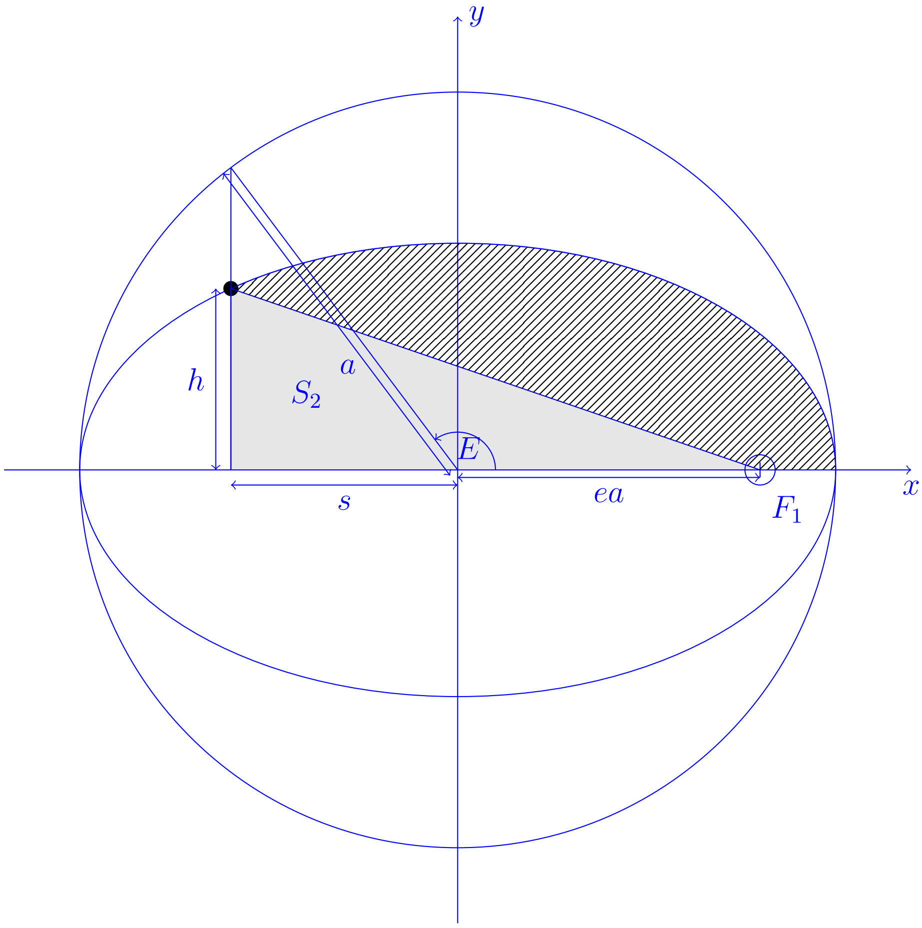
$$\cos E = \frac{s}{a}\,.$$

Dosadíme do vztahu, který nám vyšel v předchozí podúloze

$$S = \frac{ab}{2}\left(\arccos(\cos E) - e\sqrt{1 - \cos^2 E}\right)\,,$$

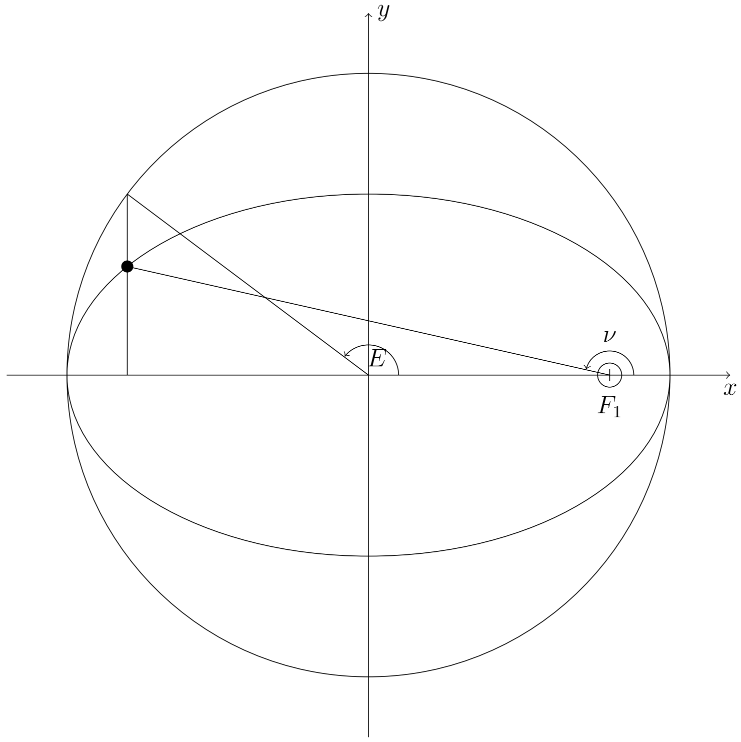
a tedy

$$S = \frac{ab}{2}(E - e\sin E)\,.$$



Obrázek 2

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 3

c) S pomocí výsledku z podúloh a) a b) a druhého Keplerova zákona odvoďte Keplerovu rovnici

$$M = E - e \sin E\,.$$

Střední anomálie M je úhel, jaký by planeta urazila za čas t, kdyby se pohybovala po kružnici rovnoměrně úhlovou rychlostí $\omega = 2\pi/T$, kde T je oběžná doba planety

$$M = \omega t = \frac{2\pi t}{T}\,.$$

V případě, že by kružnice měla poloměr $\sqrt{ab}$, průvodič planety by za čas t opsal plochu

$$S_\mathrm{k} = \pi\left(\sqrt{ab}\right)^2 \frac{M}{2\pi} = \frac{ab}{2}M\,.$$

Pro pohyb planety po elipse platí, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je konstantní (druhý Keplerův zákon). Takže opsaná plocha bude stejná, ať už se planeta pohybuje po elipse s poloosami a a b nebo po kružnici s poloměrem $\sqrt{ab}$, takže

$$S = S_\mathrm{k}\,,$$

odkud dostáváme

$$\frac{ab}{2}M = \frac{ab}{2}(E - e \sin E)\,,$$

a tedy

$$M = E - e \sin E\,.$$

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

d) Odvoďte vztah

$$\cos E = \frac{\cos\nu + e}{1 + e\cos\nu}\,,$$

mezi excentrickou anomálií E a pravou anomálií ν. Bude se vám k tomu hodit vztah

$$r(\nu) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} \tag{1}$$

udávající velikost průvodiče $r(\nu)$ jako funkci pravé anomálie ν.

Z trojúhelníku v obrázku 2 vyplývá

$$\frac{s - ea}{r} = \cos\nu\,,$$

kde r je vzdálenost planety od Slunce. Rovnici můžeme dále upravit do tvaru

$$\frac{a(\cos E - e)}{\cos\nu} = r\,,$$

kde jsme využili $s/a = \cos E$, což také můžete vidět v obrázku 2. Rovnice elipsy v polárních souřadnicích s ohniskem v počátku je

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varphi}\,.$$

Souřadnicový úhel φ je totožný s pravou anomálií ν. Takže můžeme napsat

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} = \frac{a(\cos E - e)}{\cos\nu}\,.$$

Odtud poté postupnými úpravami dostaneme

$$\cos\nu + e = \cos E + e\cos\nu\cos E\,.$$

Vztah mezi excentrickou anomálií a pravou anomálií potom je

$$\cos E = \frac{\cos\nu + e}{1 + e\cos\nu}\,,$$

nebo

$$\cos\nu = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}\,.$$

Jelikož střední anomálie M závisí na čase t jednoduše jako $M(t) = 2\pi t/T$ a výsledky úloh c) a d) nám dávají metodu výpočtu pravé anomálie ν na základě znalosti střední anomálie, můžeme nyní v principu zrekonstruovat časovou závislost $\nu(t)$ pravé anomálie a pomocí vztahu (1) rovněž časovou závislost $r(t)$ velikosti průvodiče.

Jediný problém v tomto postupu nastává při výpočtu excentrické anomálie ze střední anomálie, protože Keplerova rovnice neumožňuje vyjádřit E jako funkci M v uzavřeném tvaru. Pro danou hodnotu

Finále 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

M ale můžeme vždy Keplerovu rovnici vyřešit pro E numericky následujícím postupem. Nejprve kvalifikovaně zvolíme počáteční odhad E_1 řešení. Přesnější odhad E_2 potom získáme z Keplerovy rovnice jako $E_2 = M + e \sin E_1$. Opakováním tohoto postupu získáme sérii stále přesnějších odhadů E_n, kde

$$E_{n+1} = M + e \sin E_n \,.$$

Ve chvíli, kdy se již po sobě následující odhady budou lišit méně, než je požadovaná přesnost výsledku, můžeme vzít finální odhad jako řešení Keplerovy rovnice.

Tuto metodu si nyní vyzkoušíme na příkladu opozice Marsu, která nastala v noci 14.–15. 10. 2020.

e) V této podúloze nejprve uvažujte, že dráhy Marsu i Země jsou kruhové. V který den (či noc) nastane další opozice?

Synodickou periodu Marsu P vypočteme ze vztahu

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T_\mathrm{Z}} - \frac{1}{T_\mathrm{M}} \,,$$

odkud máme

$$P = \frac{T_\mathrm{Z} T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M} - T_\mathrm{Z}} \,,$$

a tedy

$$P = 2{,}136\,\mathrm{yr} = 780\,\mathrm{d} \,,$$

kde T_M, resp. T_Z, jsou oběžné doby Marsu, resp. Země. Další opozice nastane za 780 dní po opozici v roce 2020, stačí tedy jen spočítat, který den to bude. Ani rok 2021 ani rok 2022 nejsou přestupné, takže v noci 14.–15. 10. 2022 uplyne 730 dní od předchozí opozice, v noci 14.–15. 11. 2022 uplyne 761 dní. Dojdeme tak k odpovědi, že opozice nastane v noci 3.–4. 12. 2022 , kdy uplyne 780 dní od opozice v roce 2020.

Mars se v noci 14.–15. 10. 2020 nacházel na ekliptikální délce $\lambda_\mathrm{M} = 20{,}8^\circ$. Ekliptikální délka perihélia Marsu je $\psi_\mathrm{M} = -24{,}0^\circ$. Ekliptikální délka perihélia Země je $\psi_\mathrm{Z} = 102{,}9^\circ$. Uvažujte pro zjednodušení, že obě planety obíhají v rovině ekliptiky. Ekliptikální délka objektu nacházejícího se v rovině ekliptiky je definována jako úhel jarní bod–Slunce–objekt.

f) Časový údaj, který jste spočítali v podúloze d), je pouze přibližným datem opozice. Nyní nezanedbávejte excentricity orbit Země a Marsu a spočítejte skutečné ekliptikální délky Země i Marsu pro tento den. Nastane skutečná opozice dříve, nebo později?

Nejdříve musíme spočítat pravé anomálie Marsu a Země při opozici v noci 14.–15.10.2020. Z ní spočítáme střední anomálii obou planet v tento den, přičteme k ní změnu střední anomálie odpovídající času P a novou střední anomálii přepočítáme zpět na pravou anomálii obou planet v noci 3.–4.12.2022. Pak už se jen budeme muset zamyslet, jestli opozice nastane dříve nebo později. Mars má vyšší excentricitu (druhá nejvyšší z planet), takže očekáváme, že pokud vezmeme excentricity orbit do úvahy, uvidíme rozdíl oproti výsledku z podúlohy e).

Při opozici leží Slunce, Země a Mars v jedné přímce. Jelikož Mars se v tu dobu nacházel na ekliptikální délce $\lambda_\mathrm{M} = 20{,}8^\circ$, znamená to, že úhly jarní bod–Slunce–Země a jarní bod–Slunce–Mars měly oba velikost λ_M. Délka perihélia i ekliptikální délka se měří od jarního bodu proti směru hodinových ručiček. Pravé anomálie obou planet při opozici v roce 2020 jsou tudíž

$$\nu_\mathrm{Z} = \lambda_\mathrm{M} - \psi_\mathrm{Z}\,,$$
$$\nu_\mathrm{M} = \lambda_\mathrm{M} - \psi_\mathrm{M}\,,$$

a tedy

$$\nu_\mathrm{Z} = -82{,}1^\circ\,,$$
$$\nu_\mathrm{M} = 44{,}8^\circ\,.$$

Tato čísla dosadíme do vztahu mezi excentrickou anomálií E a pravou anomálií ν z podúlohy e), dostaneme

$$E_\mathrm{Z} = -81{,}14^\circ\,,$$
$$E_\mathrm{M} = 41{,}16^\circ\,.$$

Z Keplerovy rovnice $M = E - e\sin E$ pak spočítáme střední anomálie planet. Pozor, excentrickou anomálii E musíme dosadit v radiánech, ne ve stupních. Střední anomálie Země a Marsu v noci 14.–15. 10. 2020 jsou

$$M_\mathrm{Z} = -80{,}18^\circ\,,$$
$$M_\mathrm{M} = 37{,}65^\circ\,.$$

Všimněte si, že díky vyšší excentricitě Marsu se střední anomálie od pravé anomálie liší o více než 6°. V případě kruhové oběžné dráhy by se rovnaly. Za jednu synodickou periodu $P = 780\,\mathrm{d}$ (tedy v noci 3.–4. 12. 2022) se střední anomálie obou planet změní na

$$M'_\mathrm{Z} = M_\mathrm{Z} + 2\pi\frac{P}{T_\mathrm{Z}}\,,$$
$$M'_\mathrm{M} = M_\mathrm{M} + 2\pi\frac{P}{T_\mathrm{M}}\,,$$

a tedy

$$M'_\mathrm{Z} = 688{,}78^\circ\,,$$
$$M'_\mathrm{M} = 446{,}67^\circ\,.$$

Od výsledku můžeme odečíst libovolný počet násobků 360°, takže budeme počítat s hodnotami

$$M'_\mathrm{Z} = -31{,}22^\circ\,,$$
$$M'_\mathrm{M} = 86{,}67^\circ\,.$$

Keplerova rovnice bohužel nemá analytické řešení pro E, takže ji musíme vyřešit numericky. Použijeme metodu postupných iterací, kde n-tý výsledek slouží jako odhad řešení pro $(n+1)$-tý výpočet

$$E_{n+1} = M + e\sin E_n\,.$$

Jako počáteční odhad E_1 zvolíme M'_Z, resp. M'_M, protože nic lepšího nemáme. Metoda konverguje dostatečně přesně po 3–4 iteracích. Dostaneme excentrické anomálie

$$E'_\mathrm{Z} = -31{,}73^\circ\,,$$
$$E'_\mathrm{M} = 92{,}00^\circ\,.$$

Pravou anomálii spočítáme pomocí vztahu z podúlohy e) jako

$$\nu'_\mathrm{Z} = -32{,}2^\circ\,,$$
$$\nu'_\mathrm{M} = 97{,}3^\circ\,.$$

Úhel jarní bod–Slunce–planeta v noci 3.–4. 12. 2022 bude

$$\theta' = \psi + \nu'\,,$$

tedy

$$\theta'_\mathrm{Z} = 70{,}7^\circ\,,$$
$$\theta'_\mathrm{M} = 73{,}3^\circ\,.$$

Z výsledků vyplývá, že Mars bude o 2,6° před Zemí. Země se však pohybuje vyšší úhlovou rychlostí okolo Slunce, takže Mars v příštích dnech dohoní. Skutečná opozice nastane později než v noci 3.–4. 12. 2022 (jen pro zajímavost, bude to 8. 12. 2022).