Krajské kolo 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **13. 3. 2021** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Eliptická galaxie

(max. 20 bodů)

Od roku 1926 používají astronomové ke klasifikaci galaxií na základě jejich tvaru schéma sestavené Edwinem Hubblem. To se obvykle znázorňuje ve tvaru vidlice (nebo také ladičky) a rozděluje galaxie do tří základních kategorií: galaxie eliptické, spirální a spirální s příčkou.

V této úloze budete uvažovat eliptickou galaxii typu E0 o hmotnosti M – galaxie tedy bude mít přibližně kulový tvar. Předpokládejte, že hmota je v galaxii rozložena rovnoměrně s hustotou ρ.

a) Vyjádřete zrychlení $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ hmotného bodu ve vzdálenosti r od středu galaxie obecně pomocí G, ρ a r (kde G je Newtonova gravitační konstanta).

Hmotný bod není ovlivněn hmotou, která se nachází vně poloměru r. Efekt hmoty uvnitř poloměru r je stejný, jako kdybychom všechnu tuto hmotu koncentrovali do středu galaxie. Z Newtonova gravitačního zákona tedy dostáváme

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r^3}\mathbf{r}$$
$$= -\frac{4}{3}G\pi\rho\,\mathbf{r}\,.$$

Dostáváme tedy čistě dostředivé zrychlení o velikosti

$$a(r) = \frac{4}{3}G\pi\rho r\,.$$

b) S přihlédnutím k chování harmonického oscilátoru určete tvar trajektorií hmotných bodů pohybujících se uvnitř galaxie.

Zavedeme-li kartézskou soustavu souřadnic s počátkem ve středu galaxie, dostáváme v jednotlivých osách

$$a_x = -\frac{4}{3}G\pi\rho x\,,$$
$$a_y = -\frac{4}{3}G\pi\rho y\,,$$
$$a_z = -\frac{4}{3}G\pi\rho z\,.$$

Krajské kolo 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Dostáváme tedy tři nezávislé harmonické oscilátory, jeden v každé ose. Všechny tyto oscilátory mají navíc stejnou úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}G\pi\rho}\,.$$

Vhodnou volbou souřadnic a počáteční fáze můžeme vždy docílit toho, že libovolnou trajektorii můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos \omega t\,, \\ y(t) &= A_y \sin \omega t\,, \\ z(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

Tyto rovnice popisují elipsu, jejíž střed souhlasí se středem galaxie a která má velikosti poloos rovny A_x, A_y.

c) Ukažte, že oběžné periody všech objektů uvnitř galaxie jsou stejné. Vyjádřete tuto univerzální oběžnou periodu pomocí ρ a G.

Na základě diskuze z předchozí části píšeme

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4G\pi\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}\,.$$

d) Určete číselnou hodnotu ρ (v $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) za předpokladu, že $P = 10^8\,\mathrm{y}$.

Máme

$$\rho = \frac{3\pi}{GP^2} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}\,.$$

Předpokládejme dále, že galaxie je z 80 % tvořena temnou hmotou a z 20 % hvězdami podobnými Slunci.

e) Určete počet hvězd n, které připadají na parsek krychlový objemu galaxie.

Dostáváme

$$n = \frac{1}{5}\frac{\rho}{M_\odot} = \frac{3\pi}{5GM_\odot P^2} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{-51}\,\mathrm{m^{-3}} \doteq 0{,}041\,\mathrm{pc^{-3}}\,.$$

f) Určete celkový počet hvězd N, které může vidět pouhým okem pozorovatel nacházející se ve středu galaxie. Mezní hvězdnou velikost pro pozorování pouhým okem berte 6 mag.

Maximální vzdálenost r_0 hvězdy (která je podobná Slunci) od pozorovatele taková, aby hvězdu ještě viděl, musí splňovat

$$6 - V_\odot = 5\log\frac{r_0}{\mathrm{pc}} - 5\,,$$

kde $V_\odot = 4{,}83\,\mathrm{mag}$ je absolutní hvězdná velikost Slunce ve viditelném oboru. Máme tedy

$$r_0 = 10^{\frac{11-V_\odot}{5}}\,\mathrm{pc}\,.$$

Máme potom

$$N = \frac{4}{3}\pi r_0^3 n \doteq 900\,.$$

C Konjunkce

(max. 20 bodů)

Již za časů Johannese Keplera uměli astronomové vypočíst relativní vzdálenosti planet ve sluneční soustavě. Dlouhou dobu však nikdo nedokázal tyto vzdálenosti porovnat s pozemskými měřítky. Toho s rozumnou přesností docílil až Jerome Lalande v roce 1771 změřením paralaxy Venuše při jejím přechodu přes sluneční kotouč. V této úloze se zaměříte na porovnání velikosti fází Venuše a Měsíce při jejich vzájemné konjunkci.

Předpokládejte, že došlo ke konjunkci Venuše a Měsíce při elongaci λ. Elongací označujeme úhlovou vzdálenost objektu na obloze od Slunce. Pro jednoduchost budeme v této úloze uvažovat, že oběžné dráhy všech zúčastněných těles jsou kruhové a leží v rovině ekliptiky. Rovněž označme a_Z, a_M, resp. a_V poloměry oběžných drah Země, Měsíce, resp. Venuše, d_MS, resp. d_VZ vzdálenost mezi Měsícem a Sluncem, resp. Venuší a Zemí v okamžik úkazu, a také α_M, resp. α_V velikost úhlů Slunce–Měsíc–Země, resp. Slunce–Venuše–Země.

a) Nakreslete situaci při pohledu „shora“ (od severního ekliptikálního pólu) do přehledného schematu, ve kterém vyznačíte trojúhelníky Země–Slunce–Měsíc a Země–Slunce–Venuše, a rovněž vzdálenosti a_Z, a_M, a_V, d_MS, d_VZ a úhly λ, α_M, α_V.

Pro účel této úlohy definujeme fázi objektu na obloze jako úhel ϕ, který roste od $0°$ do 360^ϕ, kde $\phi = 0°$ nastává v novu, $\phi = 90°$ nastává v první čtvrti, $\phi = 180°$ nastává při úplňku a $\phi = 270°$ nastává v poslední čtvrti. Fáze je tedy úhel, který svírá rovina terminátoru s rovinou tečnou k nebeské sféře,

b) Vyjádřete fáze ϕ_M Měsíce a ϕ_V Venuše pomocí úhlů α_M a α_V.

Ze schematu situace plyne, že máme

$$\alpha_\mathrm{M} = \phi_\mathrm{M} + 2\gamma_\mathrm{M}\,,$$
$$\alpha_\mathrm{V} = \phi_\mathrm{V} + 2\gamma_\mathrm{V}\,,$$

kde

$$\gamma_\mathrm{M} = \alpha_\mathrm{M} - \frac{\pi}{2}\,,$$
$$\gamma_\mathrm{V} = \alpha_\mathrm{V} - \frac{\pi}{2}\,,$$

a tedy

$$\phi_{\mathrm{M}} = \pi - \alpha_{\mathrm{M}}\,,$$
$$\phi_{\mathrm{V}} = \pi - \alpha_{\mathrm{V}}\,.$$

c) Vyjádřete $\sin\alpha_{\mathrm{V}}$ pomocí a_{M}, a_{V} a λ.

Ze sinové věty máme

$$\sin\alpha_{\mathrm{V}} = \frac{a_{\mathrm{Z}}}{a_{\mathrm{V}}}\sin\lambda\,.$$

d) Jaká je maximální velikost $\lambda_{\max}$ elongace pro Venuši? Výsledek vyjádřete obecně pomocí a_{Z}, a_{V} i číselně ve stupních.

Jelikož je zřejmé, že úhel α_{V} může nabývat libovolné hodnoty, máme

$$\sin\lambda_{\max} = \frac{a_{\mathrm{V}}}{a_{\mathrm{Z}}} \doteq 0{,}723\,,$$

a tedy $\lambda_{\max} \doteq 46°$.

e) Vyjádřete vzdálenost d_{MS} pomocí proměnných a_{Z}, a_{M} a λ.

Z kosinové věty máme

$$d_{\mathrm{MS}} = \sqrt{a_{\mathrm{M}}^2 + a_{\mathrm{Z}}^2 - 2a_{\mathrm{M}}a_{\mathrm{Z}}\cos\lambda}\,.$$

f) Vyjádřete $\sin\alpha_{\mathrm{M}}$ pomocí proměnných a_{Z}, a_{M} a λ.

Ze sinové věty máme

$$\begin{aligned}\sin\alpha_{\mathrm{M}} &= \frac{a_{\mathrm{Z}}}{d_{\mathrm{MS}}}\sin\lambda \\ &= \frac{a_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{a_{\mathrm{M}}^2 + a_{\mathrm{Z}}^2 - 2a_{\mathrm{M}}a_{\mathrm{Z}}\cos\lambda}}\sin\lambda\,.\end{aligned}$$

g) Vyjádřete $\sin\phi_{\mathrm{M}}$ a $\sin\phi_{\mathrm{V}}$ pomocí proměnných a_{Z}, a_{M}, a_{V} a λ.

Jelikož platí $\sin(\pi - x) = \sin x$, máme jednodušše

$$\begin{aligned}\sin\phi_{\mathrm{M}} &= \frac{a_{\mathrm{Z}}}{\sqrt{a_{\mathrm{M}}^2 + a_{\mathrm{Z}}^2 - 2a_{\mathrm{M}}a_{\mathrm{Z}}\cos\lambda}}\sin\lambda\,, \\ \sin\phi_{\mathrm{V}} &= \frac{a_{\mathrm{Z}}}{a_{\mathrm{V}}}\sin\lambda\,.\end{aligned}$$

h) Ukažte, že pro velmi malé úhly λ (pokud je úhel λ vyjádřen v radiánech, máme $\lambda \ll 1$, a tedy $\sin\lambda \approx \lambda$ a $\cos\lambda \approx 1 - \lambda^2/2$) nezávisí poměr fází $p = \phi_\mathrm{M}/\phi_\mathrm{V}$ na λ. Předpokládejte přitom situaci, kdy se Venuše blíží do dolní konjunkce se Sluncem. Vyjádřete p nejprve obecně pomocí poměrů $u_\mathrm{M} = a_\mathrm{M}/a_\mathrm{Z}$, $u_\mathrm{V} = a_\mathrm{V}/a_\mathrm{Z}$ a poté spočtěte jeho číselnou hodnotu.

Je zřejmé, že pro velmi malé úhly λ budou rovněž hodnoty ϕ_M a ϕ_V velmi malé. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned}\phi_\mathrm{M} &\approx \frac{a_\mathrm{Z}}{\sqrt{a_\mathrm{M}^2 + a_\mathrm{Z}^2 - 2a_\mathrm{M}a_\mathrm{Z}}}\lambda\,,\\ \phi_\mathrm{V} &\approx \frac{a_\mathrm{Z}}{a_\mathrm{V}}\lambda\,,\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}p &\approx \frac{a_\mathrm{V}}{a_\mathrm{Z} - a_\mathrm{M}}\,,\\ &\approx \frac{u_\mathrm{V}}{1 - u_\mathrm{M}}\,,\\ &\approx u_\mathrm{V}\,,\\ &\approx 0{,}72\,.\end{aligned}$$

Pro malé elongace je tedy v konjunkci fáze ϕ_M Měsíce v porovnání s fází ϕ_V Venuše přibližně tříčtvrtinová.

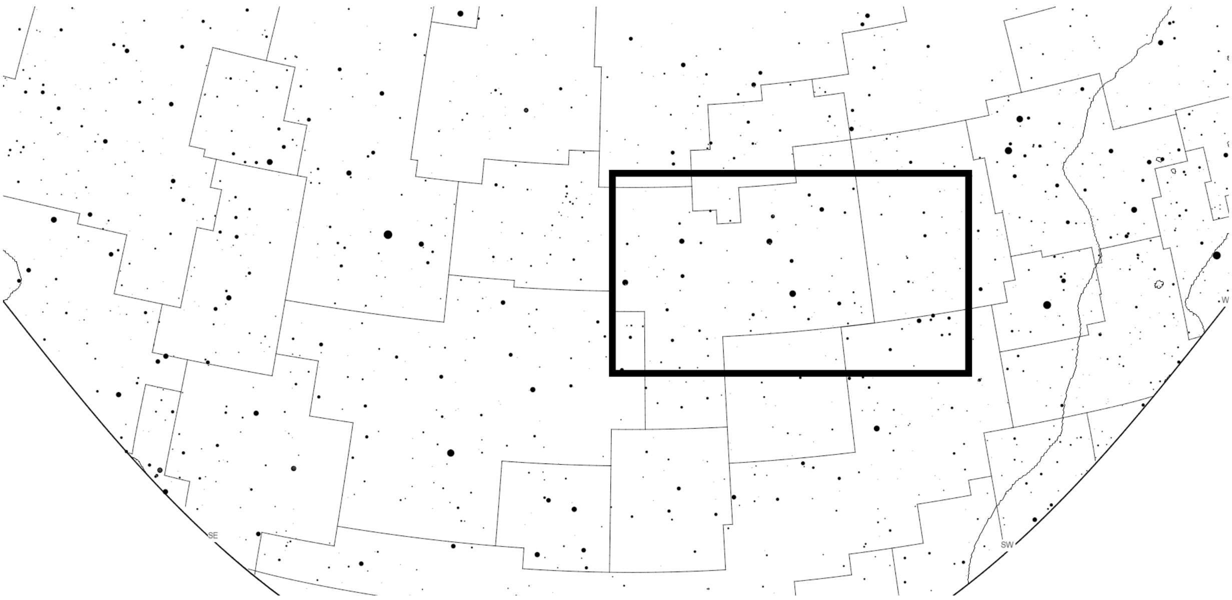
Krajské kolo 2020/21, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Fotografie jarní oblohy (praktická)

(max. 30 bodů)

Za vhodného počasí vyfotografujte ze stativu část oblohy vyznačenou obdélníkem na mapce. Snímky je možné i skládat. Na svém snímku označte příslušným číslem objekty uvedené v tabulce. Do tabulky pak doplňte požadované údaje (hvězdnou velikost ve filtru V a jméno) o vybraných objektech, jak je naleznete v databázi SIMBAD[1]

Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno	Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno
1	HIP 42806	4,65	Asellus Borealis	6	HR 4534	2,13	Denebola
2	BD+12 2149	1,40	Regulus	7	UBV 8675	4,25	Acubens
3	HIC 50583	2,37	Algieba	8	WEB 8912	3,52	Subra
4	HR 3461	3,94	Asellus Australis	9	SAO 99512	3,35	Chertan
5	GC 15438	2,53	Zosma	10	HD 85503	3,88	Rasalas



[1] http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/