Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Analýza dat
Úlohy

G V838 Monocerotis

(max. 40 bodů)

Na začátku roku 2002 došlo k výbuchu hvězdy V838 Mon, čímž se okamžitě stala předmětem zájmu astronomů. Výbuch dosáhl svého maxima 6. února 2002. V následujících měsících pořídil Hubbleův vesmírný dalekohled několik fotografií světelného echa okolo hvězdy. Tento velice vzácný úkaz může posloužit k odhadu vzdálenosti k objektu, o což se v této úloze také pokusíme.

Světelné echo vzniká, když se silný záblesk ze zdroje odráží na mezihvězdném prachu. Pokud budeme předpokládat, že se každý foton odrazí právě jednou, dojdeme k tomu, že osvětlený prach musí splňovat rovnost $r+l = d+ct$, kde r je vzdálenost osvětleného prachu od zdroje záření, l je vzdálenost osvětleného prachu od pozorovatele, d je vzdálenost mezi zdrojem a pozorovatelem a t je čas, který uplynul od pozorovaného záblesku. Z této rovnosti lze snadno nahlédnout, že osvětlený prach leží na elipsoidu s ohnisky ve zdroji a v pozorovateli.

V našem případě budeme předpokládat, že hvězda byla obklopena několika sférickými prachovými slupkami, na nichž světelné echo tvoří jasné prstence. Pro poloměr takového prstence r_e, který přísluší slupce o poloměru r_0 v čase t od pozorovaného výbuchu dostaneme vztah $r_e = \sqrt{2r_0ct - c^2t^2}$, z čehož lze odvodit rychlost růstu poloměru r_e jako

$$v = \frac{r_0c - c^2t}{\sqrt{2r_0ct - c^2t^2}}.$$

Na obr. 1 jsou dvě fotky hvězdného echa pořízené Hubbleovým vesmírným dalekohledem, horní je v B filtru z 30. 4. 2002 a spodní je z 20. 5. 2002 a vznikla složením fotek v B, V a I filtru. Vaším úkolem bude identifikovat na obou fotografiích prstence, které odpovídají stejné prachové slupce, změřit úhlovou rychlost rozpínání prstence a z vhodné závislosti úhlové rychlosti rozpínání na úhlovém poloměru odhadnout vzdálenost hvězdy.

a) Vyjádřete úhlovou rychlost rozpínání jednoho prstence pomocí jeho úhlového poloměru θ, času od pozorovaného výbuchu t, vzdálenosti hvězdy od pozorovatele d a rychlosti světla c.

Dostáváme

$$r_0 = \frac{r_e^2}{2ct} + \frac{ct}{2}$$

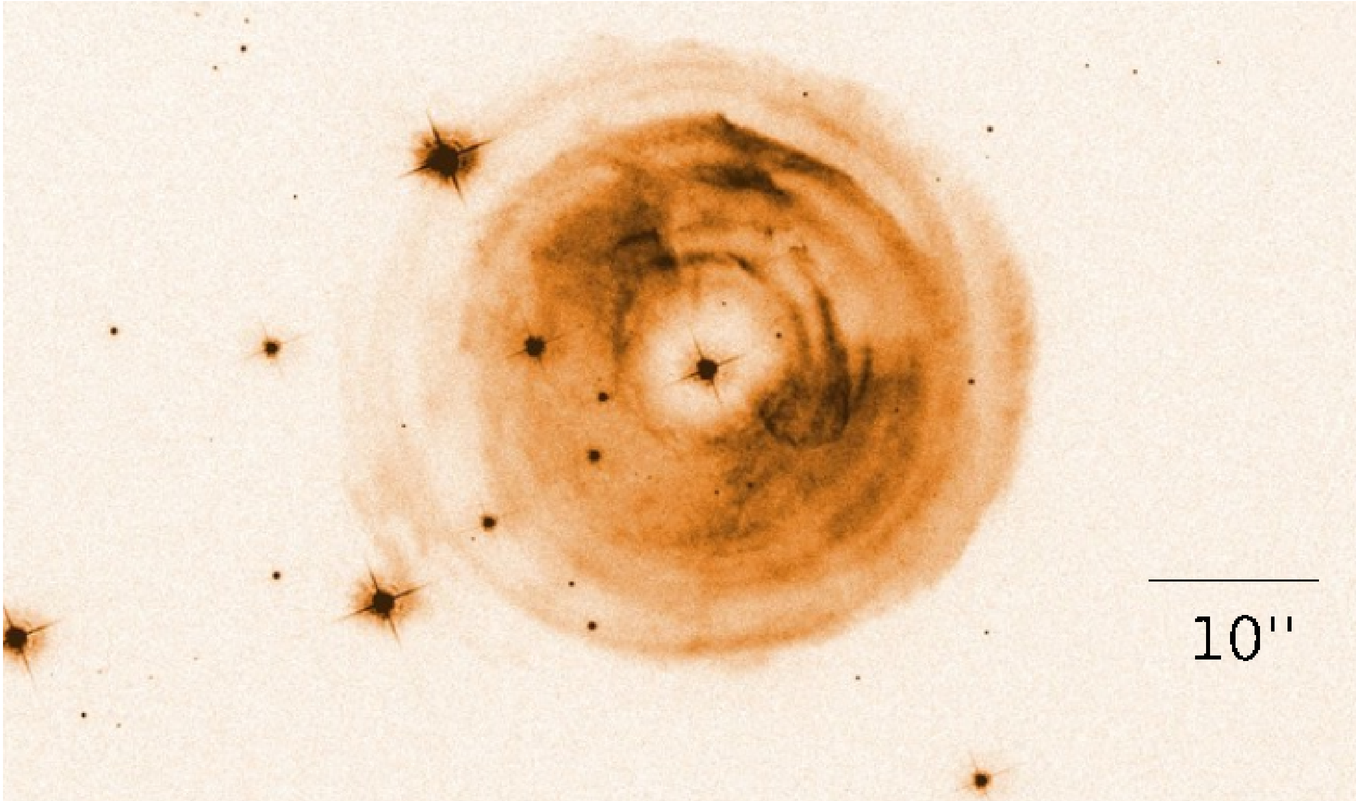
a

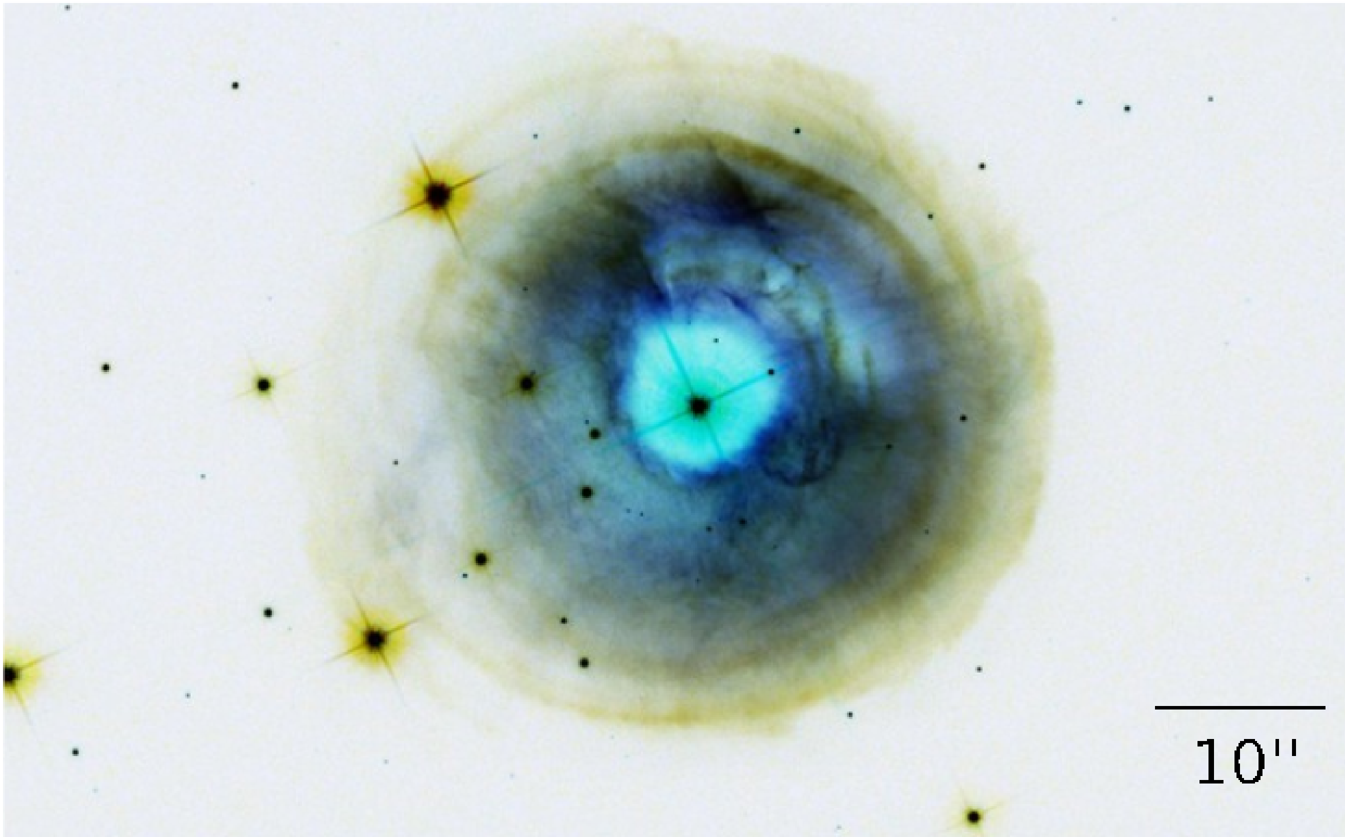
$$\omega = \frac{v}{d} = \frac{r_e}{2td} - \frac{c^2t}{2dr_e} = \frac{\theta}{2t} - \frac{c^2t}{2d^2\theta}.$$

b) Identifikujte na obou obrázcích alespoň pět dvojic prstenců, které přísluší stejné slupce. Na obou obrázcích změřte poloměr těchto prstenců v aspoň pěti bodech. Z těchto měření určete průměrný poloměr každého prstence a vypočítejte úhlovou rychlost rozpínání.

Dostáváme tabulku 1.

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

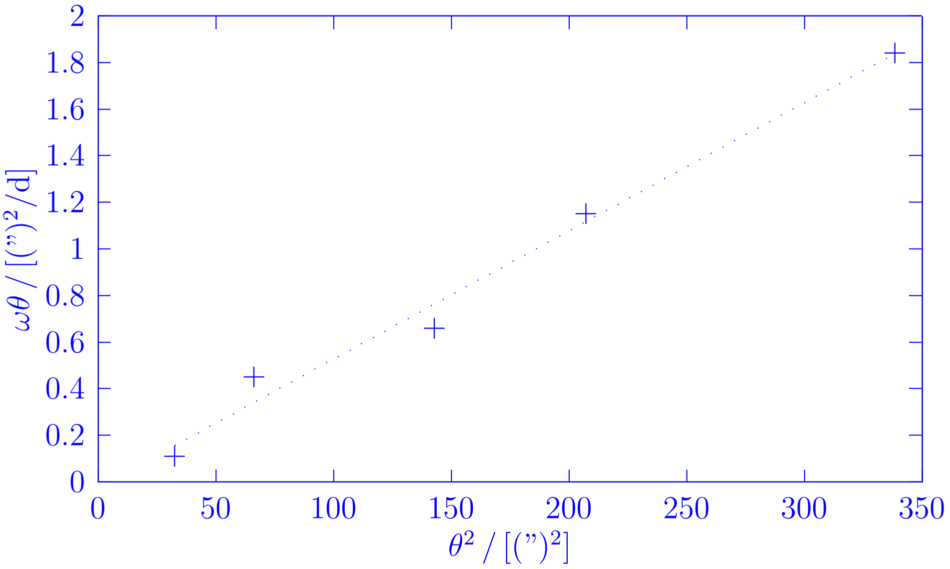




Obrázek 1: Nahoře fotografie V838 Mon z 30. 4. 2002 v B filtru, dole fotografie z 20. 5. 2002. Zdroj E. Bond et al. (2003)

$\frac{t}{\mathrm{d}}$		1.["]	2.["]	3.["]	4.["]	5.["]	θ ["]	$\frac{\omega}{\mathrm{mas \cdot d^{-1}}}$
83 103	1. slupka	17,9 20,2	17,3 19,6	15,6 18,4	17,9 17,9	18,4 20,8	17,4 19,4	100
83 103	2. slupka	14,4 16,1	13,3 15,6	12,7 13,8	13,3 13,8	14,4 16,7	13,6 15,2	80
83 103	3. slupka	11,0 12,1	10,4 12,1	9,8 10,4	9,8 11,0	11,0 12,1	10,4 11,5	55
83 103	4. slupka	8,6 9,2	7,5 8,6	6,9 8,6	6,3 9,2	8,6 8,1	7,6 8,7	55
83 103	5. slupka	6,3 6,9	5,8 6,3	4,6 5,2	5,2 5,2	5,8 5,8	5,5 5,9	20

Tabulka 1: K řešení úlohy b).



Obrázek 2: K řešení úloh c) a d).

Finále 2020/21, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

c) Nakreslete graf závislosti $\omega\theta$ na θ^2 pro čas $t = 93\,$dní. Za úhlovou velikost berte průměrnou hodnotu.

Výsledný graf vidíme na obrázku 2.

d) Pomocí metody nejmenších čtverců proložte body v grafu vhodnou přímkou.

Metoda nejmenších čtverců: prokládáme-li daty (x_i, y_i) pro $i = 1, \ldots, N$ přímku $y_i = \alpha + \beta x_i$ (kde hodnoty x_i vynášíme na osu x a hodnoty y_i vynášíme na osu y), potom střední hodnoty $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}$ parametrů β, α této přímky zjistíme pomocí vztahů

$$\overline{\beta} = \frac{N\sigma_{xy} - \sigma_x\sigma_y}{N\sigma_{xx} - \sigma_x^2} \qquad \text{a} \qquad \overline{\alpha} = \frac{1}{N}\left(\sigma_y - \overline{\beta}\sigma_x\right) ,$$

kde $\sigma_x = \sum_i x_i$, $\sigma_y = \sum_i y_i$, $\sigma_{xy} = \sum_i x_i y_i$, $\sigma_{xx} = \sum_i x_i^2$ a $\sigma_{yy} = \sum_i y_i^2$.

Vypočítané hodnoty z metody nejmenších čtverců jsou $\overline{\beta} \doteq 0,0055\,\mathrm{d}^{-1}$ a $\overline{\alpha} \doteq -0,0223\,('')^2 \cdot \mathrm{d}^{-1}$.

e) Pomocí vhodného odečtení z grafu určete vzdálenost hvězdy V838 Mon.

Protože podle části a) platí

$$\omega\theta = \frac{1}{2t}\theta^2 - \frac{c^2 t}{2d^2} ,$$

přímka, která prokládá závislost $\omega\theta$ na θ^2, protíná osu y v bodě $-c^2t/2d^2$. Platí tedy $-c^2t/2d^2 = \overline{\alpha}$. Po vhodném převedení jednotek a úpravě dostaneme odhad vzdálenosti $d \approx 8\,\mathrm{kpc}$.