Krajské kolo 2019/20, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na `http://olympiada.astro.cz/korespondencni`. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na `http://olympiada.astro.cz/ucitel`. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **4. 1. 2020** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B A precese točí!

(max. 20 bodů)

Cílem této úlohy bude zjistit, jak se mění viditelná obloha pro jednotlivé pozorovatele na Zemi v průběhu precesního cyklu. Uvažujte, že atmosferická refrakce u obzoru činí $\rho = 35'$ a že sklon ekliptiky vůči nebeskému rovníku je roven $\varepsilon = 23{,}4°$.

a) Kolik procent P_N oblohy můžeme vidět ze severního pólu v průběhu jednoho roku?

Ze severního pólu můžeme během roku spatřit všechny hvězdy s nezápornou deklinací plus pás hvězd s deklinací $-\rho \leqslant \delta \leqslant 0$, kde $\rho = 35'$ je hodnota atmosferické refrakce u obzoru. Vliv precese je v tomto časovém úseku zanedbatelný. Odpovídající zlomek oblohy tedy spočteme jako

$$P_\mathrm{N} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi\rho}{4\pi} = \frac{1}{2}(1+\rho) \doteq 50{,}5\,\%\,. \qquad (1)$$

b) Kolik procent P_eq oblohy můžeme vidět v průběhu roku z rovníku?

V tomto případě je zřejmé, že můžeme spatřit celou oblohu, tedy $P_\mathrm{eq} = 100\,\%$.

c) Vyjádřete podíl $P(\phi)$ části oblohy (v procentech) viditelné v průběhu jednoho roku jako funkci zeměpisné šířky ϕ pozorovatele.

Pozorovatel na zeměpisných šířkách $\rho \leqslant \phi \leqslant 90°$ může v průběhu roku spatřit všechny objekty s deklinací $\phi - 90° - \rho \leqslant \delta \leqslant 90°$. V pásu zeměpisných šířek $-\rho \leqslant \phi \leqslant \rho$ spatří pozorovatel během roku všechny objekty. Konečně, pozorovatel na zeměpisných šířkách $-90° \leqslant \phi \leqslant -\rho$ může v průběhu roku spatřit všechny objekty s deklinací $-90° \leqslant \delta \leqslant \phi + 90° + \rho$. Odečtením povrchu odpovídajících kulových vrchlíků od povrchu jednotkové koule tedy dostáváme

$$P(\phi) = \frac{4\pi - 2\pi\Big[1-\cos(|\phi|-\rho)\Big]}{4\pi} = \frac{1}{2}\Big[1+\cos(|\phi|-\rho)\Big] \qquad (2)$$

pro pozorovatele se zeměpisnou šířkou $\rho \leqslant |\phi| \leqslant 90°$ a $P(\phi) = 1$ pro pozorovatele se zeměpisnou šířkou $|\phi| \leqslant \rho$.

d) Kolik procent $\tilde{P}_\mathrm{N}$ oblohy můžeme spatřit ze severního pólu v průběhu 50 000 let?

Krajské kolo 2019/20, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Během 50 000 let dokončí Země téměř dva precesní cykly. Z pohledu pozorovatele na severním pólu se precesní pohyb jeví jako kruhový pohyb oblohy kolem severního ekliptikálního pólu. Zlomek viditelné oblohy tedy spočteme jako

$$P_\mathrm{N} = \frac{4\pi - 2\pi\Big[1 - \cos(90^\circ - \rho - \varepsilon)\Big]}{4\pi} = \frac{1}{2}\Big[1 + \sin(\rho + \varepsilon)\Big] \doteq 70{,}3\,\%\,. \tag{3}$$

e) Na jakých místech na Zemi lze v průběhu 50 000 let spatřit všechna místa na obloze?

Pokud zeměpisná šířka pozorovatele splňuje $|\phi| \leqslant \rho + \varepsilon$, potom platí, že oba ekliptikální póly spadají do části oblohy, kterou pozorovatel může během roku pozorovat. Během precesního cyklu tato oblast rotuje kolem ekliptikálních pólů takže takovýto pozorovatel potupně uvidí všechna místa na obloze. Na druhou stranu, pokud $|\phi| > \rho+\varepsilon$, potom platí, že alespoň jeden ekliptikální pól pozorovatel během roku (a tedy ani během precesního cyklu) nespatří. Hledaná podmínka pro zeměpisnou šířku pozorovatele tedy je $|\phi| \leqslant \rho+\varepsilon$.

f) Vyjádřete podíl $\tilde{P}(\phi)$ části oblohy (v procentech), která je viditelná v průběhu 50 000 let jako funkci zeměpisné šířky pozorovatele ϕ.

Jak jsme popsali v předchozí podúloze, část oblohy viditelná během roku rotuje v průběhu precesního cyklu kolem osy, která prochází ekliptikálními póly. Pro $|\phi| > \rho + \varepsilon$ tedy dostáváme

$$\tilde{P}(\phi) = \frac{4\pi - 2\pi\Big[1 - \cos[90^\circ - (\varepsilon + (90^\circ - |\phi|) + \rho)]\Big]}{4\pi} = \frac{1}{2}\Big[1 + \cos(|\phi| - \rho - \varepsilon)\Big]\,, \tag{4}$$

zatímco pro $|\phi| \leqslant \rho + \varepsilon$ máme $\tilde{P}(\phi) = 1$.

g) Vyjádřete ekliptikální souřadnice (J2000.0) severního a jižního světového pólu jako funkce času. Periodu precesního cyklu označte jako T_p.

Označme jako T_p periodu precesního cyklu. Označme ekliptikální souřadnice (J2000.0) světových pólů jako $(\beta_\pm(t), \lambda_\pm(t))$, kde index $+$ značí severní a $-$ jižní světový pól. Ekliptikální šířka světových pólů zůstává stejná, tedy

$$\beta_\pm(t) = \pm(90^\circ - \varepsilon) = \pm 66{,}6^\circ\,. \tag{5}$$

Počátek ekliptikální délky leží směrem polohy jarního bodu v roce 2000. Ekliptikální délka objektů tedy klesá rovnoměrně v čase s periodou T_p. Jelikož ekliptikální délka světových pólů v roce 2000 byla $\lambda_\pm(0) = \pm 90^\circ$, dostaneme

$$\lambda_\pm(t) = \pm 90^\circ - \frac{t}{T_\mathrm{p}} \cdot 360^\circ\,. \tag{6}$$

h) Vyjádřete rovníkové souřadnice (J2000.0) severního a jižního světového pólu jako funkce času.

Krajské kolo 2019/20, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Ze sférického trojúhelníku severní světový pól – severní ekliptikální pól – objekt můžeme odvodit následující transformace mezi rovníkovými a ekliptikálními souřadnicemi, obojí v dané epoše (například J2000.0):

$$\sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda\,, \tag{7a}$$

$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda\,, \tag{7b}$$

$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon\,. \tag{7c}$$

Uvažujme nyní případ světových pólů, pro které jsme v předchozí části odvodili $\beta_\pm(t) = \pm(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ a $\lambda_\pm(t) = \pm\frac{\pi}{2} - \omega t$ (kde $\omega = 2\pi/T_\mathrm{p}$). Dostáváme potom

$$\sin\delta_\pm(t) = \sin\beta_\pm(t)\cos\varepsilon + \cos\beta_\pm(t)\sin\varepsilon\sin\lambda_\pm(t) \tag{8a}$$

$$= \pm\cos^2\varepsilon \pm \sin^2\varepsilon\cos\omega t\,. \tag{8b}$$

Jelikož deklinace nabývá hodnot od $-90°$ do $+90°$, můžeme funkci sinus jednoznačně invertovat. Odtud také máme $\cos\delta_\pm(t) \geqslant 0$, a tedy

$$\cos\delta_\pm(t) = \sqrt{\sin^2\varepsilon\sin^2\omega t + \sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon(1-\cos\omega t)^2}\,. \tag{9}$$

Pro rektascenzi tedy dostáváme

$$\cos\alpha_\pm(t) = \frac{\mp\sin\varepsilon\sin\omega t}{\sqrt{\sin^2\varepsilon\sin^2\omega t + \sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon(1-\cos\omega t)^2}} \tag{10}$$

a

$$\sin\alpha_\pm(t) = \frac{\mp\sin\varepsilon\cos\varepsilon(1-\cos\omega t)}{\sqrt{\sin^2\varepsilon\sin^2\omega t + \sin^2\varepsilon\cos^2\varepsilon(1-\cos\omega t)^2}}\,. \tag{11}$$

i) S pomocí atlasu hvězdné oblohy nebo vhodného počítačového programu prozkoumejte oblast poblíž trajektorií severního a jižního světového pólu. Vyjmenujte jasné hvězdy, které v budoucnu mohou přibližně sloužit jako severní nebo jižní „Polárka“ (pro každou hvězdu uveďte minimální úhlovou vzdálenost ke světovému pólu a odpovídající rok).

Úlohu vyřešíme například za pomocí programu Stellarium. Zde je možné zapnout ekliptikální souřadnicovou síť a můžeme tedy přímo prohlížet oblasti v okolí „rovnoběžek“ $\beta = \pm 66{,}6°$. Předpokládejme rovněž $T_\mathrm{p} = 25\,772$ let.

Začneme na severní obloze, kde jediná jasná hvězda (kromě Polárky α UMi) nacházející se poblíž ekliptikální šířky $\beta = 66{,}6°$ je Vega (α Lyr). Její ekliptikální souřadnice (J2000.0) jsou $\beta_{\alpha\,\mathrm{Lyr}} = 61°46'$, $\lambda_{\alpha\,\mathrm{Lyr}} = -74°39'$. Na minimální vzdálenost $|66{,}6 - \beta_{\alpha\,\mathrm{Lyr}}| = 4°50'$ se Vega severnímu světovému pólu přiblíží v roce $2000 + T_\mathrm{p}\frac{90° - \lambda_{\alpha\,\mathrm{Lyr}}}{360°} = 13\,790$.

Na jižní obloze se nám naskýtá podstatně více možností: jmenujme především hvězdy tzv. Falešného jižního kříže ι Car (souřadnice $\beta_{\iota\,\mathrm{Car}} = -67°7'$, $\lambda_{\iota\,\mathrm{Car}} = 185°19'$, tedy největší přiblížení na $30'$ v roce 8060), δ Vel (souřadnice $\beta_{\delta\,\mathrm{Vel}} = -67°12'$, $\lambda_{\delta\,\mathrm{Vel}} = 168°58'$, tedy největší přiblížení na $35'$ v roce 9230) a pak také hvězdy γ Vel (souřadnice $\beta_{\gamma\,\mathrm{Vel}} = -64°28'$, $\lambda_{\gamma\,\mathrm{Vel}} = 147°21'$, tedy největší přiblížení na $2°10'$ v roce 10 780) a β Hyi (souřadnice $\beta_{\beta\,\mathrm{Hyi}} = -64°56'$, $\lambda_{\beta\,\mathrm{Hyi}} = 300°34'$, tedy největší přiblížení na $1°40'$ v roce 25 520).

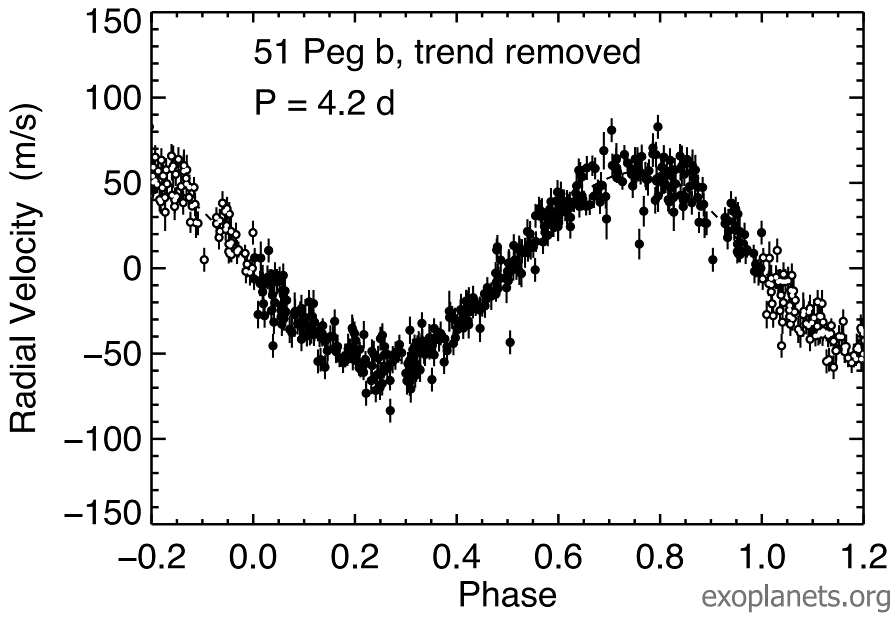
Krajské kolo 2019/20, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Vážení exoplanet

(max. 20 bodů)

V této úloze vypočteme hmotnost dvou exoplanet (51 Pegasi b a HAT-P-15 b) pomocí metody radiálních rychlostí. Hmotnost exoplanety, resp. její mateřské hvězdy označme M_p, resp. M_*. Obě složky obíhají kolem společného hmotného středu s periodou, kterou označme P.

Předpokládejme nejdříve, že oběžná dráha exoplanety je kruhová. To je (přibližně) případ exoplanety 51 Pegasi b, která byla předmětem přelomového objevu M. Mayora a D. Queloze z roku 1995, a jejíž křivku radiálních rychlostí vidíme na obr. 1. Hmotnost mateřské hvězdy 51 Peg předpokládejte $M_*^{51\ \mathrm{Peg}} = 1{,}05 M_\odot$.



Obrázek 1: Křivka radiálních rychlostí hvězdy 51 Pegasi.

a) Vyjádřete M_* a M_p pomocí G (gravitační konstanta), P a oběžných rychlostí hvězdy, resp. exoplanety vzhledem k hmotnému středu soustavy v_* resp., v_p.

Ze 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{(a_* + a_\mathrm{p})^3}{P^2} = \frac{G(M_* + M_\mathrm{p})}{4\pi^2}\,, \tag{12}$$

kde a_*, resp. a_p jsou poloměry oběžných drah hvězdy, resp. exoplanety a $2\pi a_*/P = v_*$, resp. $2\pi a_\mathrm{p}/P = v_\mathrm{p}$ jsou jejich oběžné rychlosti. Z definice hmotného středu rovněž máme $M_\mathrm{p} a_\mathrm{p} = M_* a_*$. Dosazením do (12) dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$M_* + M_\mathrm{p} = \frac{P}{2\pi G}(v_* + v_\mathrm{p})^3\,, \tag{13a}$$

$$M_* v_* - M_\mathrm{p} v_\mathrm{p} = 0\,. \tag{13b}$$

Odtud pak máme

$$M_* = \frac{P}{2\pi G}(v_* + v_\mathrm{p})^2 v_\mathrm{p}\,, \tag{14a}$$
$$M_\mathrm{p} = \frac{P}{2\pi G}(v_* + v_\mathrm{p})^2 v_*\,. \tag{14b}$$

b) Vyjádřete maximální velikost K_* pozorované radiální rychlosti hvězdy pomocí v_* a inklinace i (úhel mezi zorným paprskem a kolmicí k rovině oběhu).

Máme $K_* = v_* \sin i$.

Od tohoto okamžiku až do konce úlohy předpokládejme, že $M_* \gg M_\mathrm{p}$.

c) Vyjádřete hmotnostní parametr $M_\mathrm{p} \sin i$ exoplanety pomocí G, P, M_* a K_*.

Pokud máme $M_* \gg M_\mathrm{p}$, máme potom $v_* \ll v_\mathrm{p}$. Soustava rovnic (14) potom přejde v

$$M_* = \frac{P}{2\pi G} v_\mathrm{p}^3\,, \tag{15a}$$
$$M_\mathrm{p} = \frac{P}{2\pi G} v_\mathrm{p}^2 v_*\,, \tag{15b}$$

odkud máme

$$M_\mathrm{p} = \left(\frac{PM_*^2}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}} v_* = \left(\frac{PM_*^2}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{K_*}{\sin i}\,, \tag{16}$$

a tedy

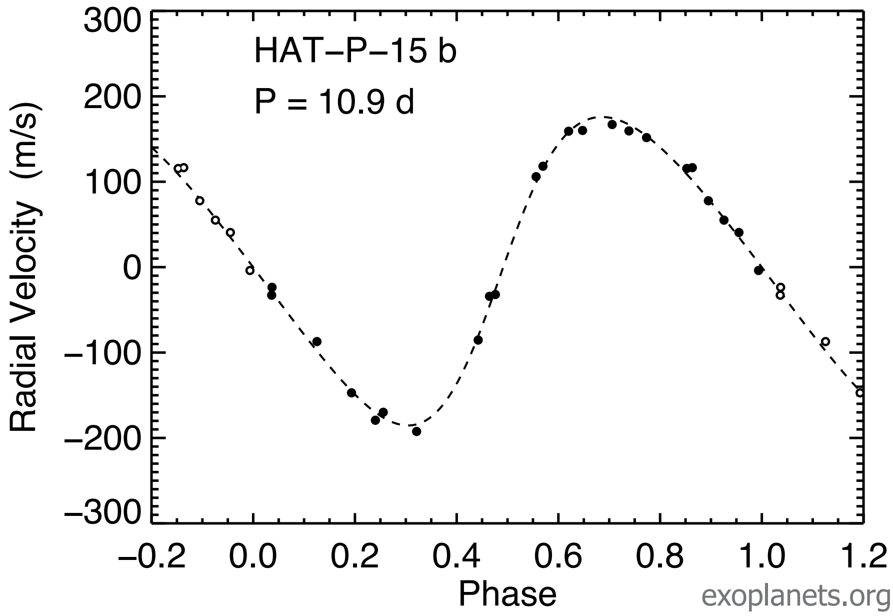
$$M_\mathrm{p} \sin i = \left(\frac{PM_*^2}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}} v_* = \left(\frac{PM_*^2}{2\pi G}\right)^{\frac{1}{3}} K_*\,. \tag{17}$$

d) Z obr. 1 odečtěte hodnotu K_* pro systém 51 Pegasi. Vypočtěte hodnotu parametru $M_\mathrm{p} \sin i$ (v hmotnostech Jupiteru) exoplanety 51 Pegasi b.

Z křívky radiálních rychlostí lze odečíst $K_*^{51\,\mathrm{Peg}} \doteq 55\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Dosazením do (17) pak dostaneme $(M_\mathrm{p} \sin i)^{51\,\mathrm{Peg}} \doteq 0{,}45 M_\mathrm{Jup}$.

Podívejme se nyní na exoplanetu HAT-P-15 b. Křivku radiálních rychlostí její mateřské hvězdy vidíme na obr. 2. V daném systému dochází k tranzitům, takže budeme předpokládat, že zorný paprsek leží v rovině oběhu exoplanety (inklinace rovna přibližně 90°). Hmotnost mateřské hvězdy HAT-P-15 předpokládejte $M_*^{\mathrm{HAT\text{-}P\text{-}15}} = 1{,}01 M_\odot$.

e) Nakreslete (schematicky) tvar oběžné dráhy mateřské hvězdy HAT-P-15 kolem hmotného středu systému. Do nákresu vyznačte směr k Zemi, směr oběhu a rovněž body, ve kterých je radiální rychlost pozorovaná na Zemi minimální, maximální a nulová.



Obrázek 2: Křivka radiálních rychlostí hvězdy HAT-P-15.

Pro radiální rychlost (vzhledem k pozorovateli) hvězdy v exoplanetárních systémech používáme konvenci, kdy kladné znaménko znamená, že se hvězda od pozorovatele vzdaluje (červený posuv spektrálních čar), zatímco záporné znaménko radiální rychlosti znamená, že se hvězda k pozorovateli přibližuje (modrý posuv). Asymetrický tvar křivky radiálních rychlostí nám říká, že oběžná dráha bude mít nenulovou excentricitu. Můžeme si ale povšimnout, že velikost maxim křivky je stejná jako velikost minim (níže budeme značit K_*). To znamená, že přímka apsid elipsy přibližně souhlasí se směrem k pozorovateli. Okolo fáze 0,5 přichází hvězda do periapsidy (nulová radiální rychlost a maximální kladné radiální zrychlení vzhledem k pozorovateli), okolo fáze 0,7 se od nás vzdaluje maximální rychlostí, okolo fáze 1,0 prochází hvězda apoapsidou (opět nulová radiální rychlost a maximálni záporné radiální zrychlení vzhledem k pozorovateli) a okolo fáze 0,3 se k nám přibližuje maximální rychlostí. To, že periapsida odpovídá fázi 0,5 a apoapsida odpovídá fázi 1,0 a ne naopak, lze vidět například tak, že si všimneme, že velikost radiálního zrychlení ve fází 0,5 je větší, než velikost zrychlení ve fází 1,0. Jelikož radiální zrychlení v periapsidě vzhledem k pozorovateli je kladné, znamená to, že periapsida leží směrem k pozorovateli (vzhledem k hmotnému středu soustavy) a apoapsida směrem od pozorovatele.

Označme jako A_*^+, resp. A_*^- pozorované hodnoty velikosti radiálního zrychlení mateřské hvězdy v periapsidě, resp. apoapsidě.

f) Z obr. 2 odečtěte hodnoty A_*^+ a A_*^- (v $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) pro hvězdu HAT-P-15.

Velikost radiálního zrychlení při průchodu periapsidou odečteme ze sklonu křivky radiálních rychlostí okolo fáze 0,5, zatímco velikost radiálního zrychlení při průchodu apoapsidou odečteme ze sklonu křivky radiálních rychlostí okolo fáze 0,0. Dostáváme $A_*^+ \doteq$

$1{,}74 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ společně s $A_*^- \doteq 0{,}81 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

g) Vyjádřete excentricitu e_*, resp. e_p drah hvězdy, resp. exoplanety jako funkci A_*^+ a A_*^-. Vypočtěte číselné hodnoty excentricity pro exoplanetární systém HAT-P-15.

Jelikož v každém okamžiku máme (z definice hmotného středu) $M_* r_* = M_\mathrm{p} r_\mathrm{p}$, kde r_*, resp. r_p jsme označili vzdálenosti hvězdy, resp. exoplanety od hmotného středu v každém okamžiku, platí, že oběžné dráhy hvězdy a exoplanety jsou si podobné (tedy, že se liší pouze o škálový faktor). Odtud plyne, že $e_* = e_\mathrm{p} \equiv e$. Velikost radiálního zrychlení v periapsidě a apoapsidě je rovno v daný okamžik velikosti dostředivého zrychlení. Z Newtonova gravitačního zákona tedy dostáváme

$$A_*^{\pm} = \frac{GM_\mathrm{p}}{(r_*^{\pm} + r_\mathrm{p}^{\pm})^2} = \frac{GM_\mathrm{p}}{(a_* + a_\mathrm{p})^2 (1 \mp e)^2}\,, \tag{18a}$$

kde jsme označili $r_*^{\pm}$ a $r_\mathrm{p}^{\pm}$ vzdálenost hvězdy a exoplanety od hmotného středu v periapsidě, resp. apoapsidě. Máme tedy

$$\frac{A_*^+}{A_*^-} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2\,, \tag{19}$$

odkud vyjádříme

$$e = \frac{\sqrt{A_*^+} - \sqrt{A_*^-}}{\sqrt{A_*^+} + \sqrt{A_*^-}}\,. \tag{20}$$

Dosazením hodnot z části f) dostaneme $e^{\text{HAT-P-15}} \doteq 0{,}19$.

h) Vyjádřete velikost rychlosti hvězdy $v_*(\theta)$ ve dráze jako funkci úhlu θ, který svírá průvodič hvězdy se směrem k periapsidě dráhy. Vaše funkce bude mít parametry G, P, M_*, M_p a e.

Nápověda: Vzdálenost bodu na obvodu elipsy od ohniska v závislosti na úhlu θ splňuje tzv. *polární rovnici elipsy*

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}\,,$$

kde a je velká poloosa elipsy.

Velikost rychlosti hvězdy ve dráze lze vyjádřit jako

$$v_* = \frac{M_\mathrm{p}}{M_*} v_\mathrm{p} = \frac{M_\mathrm{p}}{M_*}\sqrt{GM_*\left(\frac{2}{r_\mathrm{p}} - \frac{1}{a_\mathrm{p}}\right)}\,, \tag{21}$$

kde r_p jsme označili vzdálenost exoplanety od hmotného středu soustavy v daný okamžik. S využitím polární rovnice elipsy nakonec dostáváme

$$v_*(\theta) = \frac{M_\mathrm{p}}{M_*}\sqrt{GM_*\left(\frac{2}{a_\mathrm{p}}\frac{1+e\cos\theta}{1-e^2} - \frac{1}{a_\mathrm{p}}\right)} \tag{22a}$$

$$= \frac{M_\mathrm{p}}{M_*}\sqrt{\frac{GM_*}{a_\mathrm{p}}}\sqrt{\frac{1+2e\cos\theta+e^2}{1-e^2}} \tag{22b}$$

$$= M_\mathrm{p}\left(\frac{2\pi G}{PM_*^2}\right)^{1/3}\sqrt{\frac{1+2e\cos\theta+e^2}{1-e^2}}\,. \tag{22c}$$

i) Ukažte, že úhel α sevřený mezi kolmicí na průvodič a tečnou k trajektorii splňuje

$$\cos\alpha(\theta) = \frac{1+e\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\,, \qquad \sin\alpha(\theta) = \frac{e\sin\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\,.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti máme

$$v_*(\theta)r_*(\theta)\cos\alpha(\theta) = \text{const.} = v_*^+r_*^+ = \frac{M_\mathrm{p}}{M_*}\sqrt{GM_\mathrm{p}a_*(1-e^2)}\,, \tag{23}$$

takže po dosazení dostáváme

$$\cos\alpha(\theta) = \frac{1+e\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\,, \tag{24}$$

a tedy

$$\sin\alpha(\theta) = \frac{e\sin\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\,. \tag{25}$$

j) Ukažte rovněž, že radiální rychlost v_*^rad hvězdy, kterou naměří pozorovatel ležící ve směru periapsidy, splňuje $v_*^\mathrm{rad}(\theta) = K_*\sin\theta$, kde parametr K_* vyjádřete pomocí G, P, M_*, M_p a e.

Dostáváme

$$v_*^\mathrm{rad}(\theta) = v_*(\theta)\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\theta-\alpha)\right] \tag{26a}$$

$$= v_*(\theta)\sin(\theta-\alpha) \tag{26b}$$

$$= v_*(\theta)(\sin\theta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\theta) \tag{26c}$$

$$= v_*(\theta)\left(\frac{\sin\theta+e\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}} - \frac{e\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}}\right), \tag{26d}$$

tedy

$$v_*^\mathrm{rad}(\theta) = \frac{v_*(\theta)\sin\theta}{\sqrt{1+2e\cos\theta+e^2}} = M_\mathrm{p}\left(\frac{2\pi G}{PM_*^2}\right)^{1/3}\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}\sin\theta\,. \tag{27}$$

Odtud máme

$$K_* = M_\mathrm{p}\left(\frac{2\pi G}{PM_*^2}\right)^{1/3}\sqrt{\frac{1}{1-e^2}}\,. \tag{28}$$

k) Z obr. 2 odečtěte hodnotu K_* pro systém HAT-P-15. Vypočtěte hmotnost exoplanety HAT-P-15 b (v hmotnostech Jupiteru).

Dostáváme $K_*^\text{HAT-P-15} \doteq 180\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, a tedy $M_\mathrm{p}^\text{HAT-P-15} \doteq 1{,}94M_\mathrm{Jup}$.

Krajské kolo 2019/20, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

D Fotografie Vozky (praktická)

(max. 30 bodů)

V této úloze bude vaším úkolem pořídit fotografii souhvězdí zimní oblohy, na které identifikujete co nejvíce objektů a s pomocí které změříte úhlové vzdálenosti několika párů hvězd. Pro účel vypracování této úlohy nedoporučujeme použití objektivu typu „fish-eye“.

a) Za vhodných podmínek pořiďte fotografii souhvězdí Vozky (Auriga) a jeho okolí tak, aby na fotografii byly všechny níže zmíněné objekty. V invertovaných barvách ji vytiskněte v co největším formátu (alespoň A4) a přiložte ke svému řešení.

b) Do vašeho řešení uveďte čas a místo pořízení fotografie a rovněž parametry fotoaparátu, který jste použili k pořízení snímku: značku, typ, ohniskovou vzdálenost objektivu a clonu.

c) Na svém snímku označte příslušným číslem objekty uvedené v tabulce níže. Do tabulky pak doplňte požadované údaje (hvězdnou velikost ve filtru V a jméno) o vybraných objektech, jak je naleznete v databázi SIMBAD[1].

číslo	označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	jméno	číslo	označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	jméno
1	SAO 40186	0,08	Capella	6	Cr 71	6,00	M 36
2	HR 1791	1,65	Elnath	7	TYC 2391-1446-1	2,69	Hassaleh
3	Mel 38	5,60	M 37	8	HD 32630	3,18	Haedus
4	BD+22 739	4,30	τ Tau	9	WDS J05020+4349AB	3,00	Almaaz
5	34 Aur	1,90	Menkalinan	10	HIP 21421	−0,70	Aldebaran

d) Formulujte a popište co nejpřesnější metodu zjištění vzájemných úhlových vzdáleností vyfotografovaných objektů na základě měření poloh objektů na snímku pravítkem. Můžete využít znalost jedné referenční úhlové vzdálenosti dvou objektů na snímku.

Nápověda: nezapomeňte, že fotoaparát zobrazuje hvězdnou oblohu na rovinný snímač. V případě fotografování objektů „v nekonečnu“ můžeme soustavu čoček v objektivu dobře aproximovat tenkou čočkou o dané ohniskové vzdálenosti.

Předpokládejme, že optická osa objektivu prochází středem senzoru. Označme f ohniskovou vzdálenost objektivu. Rovněž označme a, b šířku a výšku senzoru a A, B šířku a výšku vytištěné fotografie. Platí tedy $A/a = B/b = \sigma$ pro nějaké číslo σ (škálu). Zaveďme *na vytištěné fotografii* kartézské souřadnice (x, y) s počátkem ve středu snímku, takže $-A/2 \leqslant x \leqslant A/2$ a $-B/2 \leqslant y \leqslant B/2$. Rovněž zaveďme *na obloze* pravotočivé sférické souřadnice (δ, λ) s pólem P směrem středu snímku, kde šířková souřadnice δ měří

[1] http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/

úhlovou vzdálenost na obloze od pólu a délkovou souřadnici měříme kladně od rostoucího směru souřadnice x. Uvážíme-li projekci sféry na rovinu, dostáváme převodní vztahy

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sigma f}\,, \tag{29a}$$

$$\lambda = \arg\left(x, y\right), \tag{29b}$$

kde

$$\arg\left(x, y\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{pro } x < 0 \end{cases}\,. \tag{30}$$

Konečně, úhlovou vzdálenost $\mathit{\Delta}_{12}$ na obloze dvou objektů, které mají na fotografii souřadnice $[x_1, y_1]$ a $[x_2, y_2]$, spočteme pomocí vztahu (který lze odvodit ze sférického trojúhelníku P – objekt 1 – objekt 2)

$$\cos \mathit{\Delta}_{12} = \cos\delta_1 \cos\delta_2 + \sin\delta_1 \sin\delta_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)\,, \tag{31}$$

kde sférické souřadnice $[\delta_1, \lambda_1]$ a $[\delta_2, \lambda_2]$ dopočteme pomocí (29). Parametr σf, který závisí na ohniskové vzdálenosti, velikosti snímače a velikosti vytištěného snímku, můžeme nejsnáze určit na základě znalosti jedné (referenční) úhlové vzdálenosti dvou objektů na snímku.

e) Vaši metodu aplikujte k určení úhlových vzdáleností následujících párů objektů v tabulce (včetně odhadu nejistot): objekty 2 a 7, 1 a 10, 4 a 5, 5 a 10. Jako referenční berte úhlovou vzdálenost objektů 1 a 8, která činí $5°6'$.

f) Vypočtěte nebo zjistěte skutečné úhlové vzdálenosti těchto párů hvězd a porovnejte je s vašimi změřenými hodnotami.

Pro pár 2 a 7 máme $7°46'$. Pro pár 1 a 10 máme $30°42'$. Pro pár 4 a 5 máme $27°3'$. Pro pár 5 a 10 máme $33°25'$.

Autorem přehledového testu A je Tomáš Gráf. Autory příkladů B, C a D jsou Jakub Vošmera a Jan Kožuško.