Krajské kolo 2019/20, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **10. 3. 2020** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Marťan

(max. 20 bodů)

V roce 2015 byl natočen sci-fi film Marťan o astronautovi Marku Watneym, který byl společně s dalšími astronauty vyslán na misi Ares 3 na planetu Mars. Zde málem zahynul během prachové bouře. Po probuzení však zjistil, že zbytek posádky již planetu opustil a on zůstal na Marsu sám. Vymýšlí proto způsob, jak na Marsu přežít se zbytkem zásob a jak vyslat signál na Zemi.

Snímek je adaptací stejnojmenného románu, v němž je podrobně popsán průběh celé mise, včetně technických údajů. V této úloze se budete zabývat počátkem mise a cestou kosmických lodí na Mars. Uvažujte, že Země, resp. Mars se pohybují okolo Slunce v jedné rovině po kruhových drahách o poloměrech $r_Z = 1{,}00\,\mathrm{au}$, resp. $r_M = 1{,}52\,\mathrm{au}$.

Zásobovací sondy pro Ares 3 startovaly ve čtrnácti po sobě jdoucích dnech během Hohmannova okna.[1]

a) Vypočtěte dobu T, za jakou zásobovací rakety Aresu 3 dorazí na Mars, pohybují-li se po Hohmannově trajektorii. Rovněž spočtěte heliocentrickou rychlost raket v_1 v poloze poblíž Země a v_2 v poloze poblíž Marsu.

Hohmannova elipsa pro přelet mezi Zemí a Marsem se ve svém perihéliu dotýká zemské dráhy a v aféliu marsovské dráhy. Velikost její velké poloosy $a = (r_Z + r_M)/2 = 1{,}26\,\mathrm{au}$. Doba T je rovna polovině oběžné doby. Ze 3. Keplerova zákona tedy máme

$$T = \frac{P}{2} = \sqrt{\frac{a^3\pi^2}{GM_\odot}} \doteq 258\,\mathrm{d}\,.$$

Pro heliocentrickou rychlost na eliptické dráze píšeme

$$v_{1,2} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_{Z,M}} - \frac{1}{a}\right)}\,.$$

Po dosazení příslušných hodnot dostáváme $v_1 \doteq 32{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a $v_2 \doteq 21{,}6\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

b) Vypočtěte velikost úhlu α Slunce-Země-Mars, při kterém dochází k Hohmannovu oknu. Jak často k tomuto oknu dochází?

[1] WEIR, Andy: *Marťan*, Euromedia, Praha, 2015, s. 144

Krajské kolo 2019/20, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Při Hohmannově okně platí, že úhel Země($t=0$)-Slunce-Mars(T) je 180°. Definujme úhel β jako úhel Země-Slunce-Mars v čase $t=0$. Pro úhel β platí

$$\beta = 180° - \frac{T}{T_\mathrm{M}} \cdot 360° \doteq 44{,}3°\,,$$

kde $T_\mathrm{M} = \sqrt{4\pi^2 r_\mathrm{M}^3/(GM_\odot)} \doteq 1{,}874\,\mathrm{y}$ je oběžná doba Marsu. Z kosinové a sinové věty potom dostáváme úhel α

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{r_\mathrm{M}\sin\beta}{\sqrt{r_\mathrm{Z}^2 + r_\mathrm{M}^2 - 2r_\mathrm{Z}r_\mathrm{M}\cos\beta}}\right) \doteq 85{,}3°\,.$$

K Hohmannovu oknu tak dochází poblíž západní kvadratury Marsu s periodou jedné synodické oběžné doby

$$T_\mathrm{syn} = \frac{T_\mathrm{Z}T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{M} - T_\mathrm{Z}} \doteq 2{,}14\,\mathrm{y}\,.$$

Vogel zkontroloval pozici a orientaci Hermesu vůči plánované dráze. Byly v pořádku, jako obyčejně. Kromě toho, že v misi zastával funkci chemika, byl také vynikající astrofyzik. Navigátorské povinnosti navíc byly směšně jednoduché.[2]

Ve filmu je vesmírná loď Hermes na cestě k Marsu poháněná iontovými motory s konstantním zrychlením $2\,\mathrm{mm\cdot s^{-2}}$. Pro účely úlohy však předpokládejme, že Hermes opustil zemskou gravitaci ve směru oběhu Země s rychlostí $v = 11{,}5\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ vzhledem k Zemi a na své dráze dále nezrychloval.

c) Vypočtěte heliocentrickou rychlost v_H Hermesu při přiblížení k Marsu a úhel φ, pod kterým se trajektorie Hermesu a Marsu protnou.

Pomocí rovnice pro heliocentrickou rychlost dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých v_H a velké poloose A

$$v_\mathrm{Z} + v = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_\mathrm{Z}} - \frac{1}{A}\right)}\,,$$

$$v_\mathrm{H} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_\mathrm{M}} - \frac{1}{A}\right)}\,,$$

kde $v_\mathrm{Z} = \sqrt{GM_\odot/r_\mathrm{Z}} = 29{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ je oběžná rychlost Země kolem Slunce. Po odečtení kvadrátu druhé rovnice od kvadrátu první a úpravě dostáváme

$$v_\mathrm{H} = \sqrt{(v_\mathrm{Z}+v)^2 + 2GM_\odot\left(\frac{1}{r_\mathrm{M}} - \frac{1}{r_\mathrm{Z}}\right)} \doteq 33{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Ze zákonu zachování momentu hybnosti platí $(v_\mathrm{Z}+v)r_\mathrm{Z} = v_\mathrm{H}r_\mathrm{M}\cos\varphi$, z čehož dostáváme úhel

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(v_\mathrm{Z}+v)r_\mathrm{Z}}{v_\mathrm{H}r_\mathrm{M}}\right) \doteq 34{,}8°\,.$$

[2] WEIR, Andy: *Marťan*, Euromedia, Praha, 2015, s. 195

d) Vypočtěte rychlost v_∞ Hermesu při přiblížení k Marsu vzhledem k Marsu. Gravitační působení Marsu zanedbejte.

Při výpočtu rychlosti Hermesu vzhledem k Marsu musíme započítat složku oběžné rychlosti Marsu $v_\mathrm{M} = \sqrt{GM_\odot/r_\mathrm{M}} = 24{,}2\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Průmět vektoru rychlosti lodi do směru pohybu Marsu je $v_\mathrm{H}\cos\varphi$. Složením vektorů ve směru pohybu Marsu a vektoru k němu kolmém dostáváme

$$v_\infty = \sqrt{(v_\mathrm{H}\cos\varphi - v_\mathrm{M})^2 + (v_\mathrm{H}\sin\varphi)^2} \doteq 19{,}1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Pokud máte pocit, že turbulence jsou hrozné v letadle, které se pohybuje rychlostí 720 kilometrů za hodinu, zkuste si je představit v rychlosti 28 000 kilometrů za hodinu.[3]

Nyní předpokládejme, že Hermes, jehož celková hmotnost (včetně paliva) je $M_0 = 110\,000\,\mathrm{kg}$, zažehl své (konvenční) motory, a tím zpomalil na rychlost, kterou uvádí Mark Watney ve svém deníkovém záznamu.

e) Vypočtěte délku Δt tohoto zážehu. Výtoková rychlost paliva při zážehu je $u = 50\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a hmotnostní průtok paliva je $\dot{m} = 620\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$. Uvažujte, že loď má ke zpomalení dostatek paliva.

Nápověda: K vyřešení úlohy e) se vám bude hodit Ciolkovského rovnice.[4]

Konečná rychlost, na kterou musí loď zpomalit, je $v_0 = 28\,000\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 7{,}8\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Z Ciolkovského rovnice vychází

$$v_\infty - v_0 = u\ln\frac{M_0}{M_0 - \dot{m}\Delta t} = -u\ln\left(1 - \frac{\dot{m}\Delta t}{M_0}\right)\,.$$

Po úpravě dostáváme

$$\Delta t = \frac{M_0}{\dot{m}}\left(1 - \mathrm{e}^{-(v_\infty - v_0)/u}\right) \doteq 36\,\mathrm{s}\,.$$

C Messier 13

(max. 20 bodů)

V této úloze se zaměříme na jeden z nejznámějších Messierova katalogu, totiž na kulovou hvězdokupu M 13. Tento seznam vzdálených (tzv. deep-sky) objektů, které se v malém dalekohledu jeví jako mlhavé obláčky, sestavil Charles Messier v druhé polovině 18. století za účelem usnadnění identifikace nových komet.

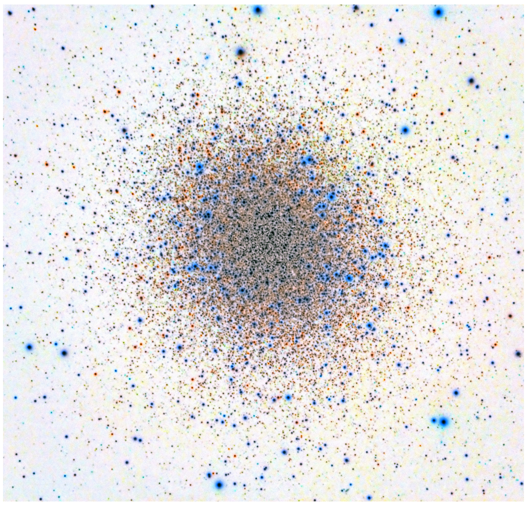
Kulová hvězdokupa M 13 (obr. 1a) je od nás vzdálená $d = 6{,}8\,\mathrm{kpc}$ a na obloze se jeví jako mlhavá skvrnka s celkovou hvězdnou velikostí $m = 5{,}8\,\mathrm{mag}$.

a) Vypočtěte absolutní hvězdnou velikost M hvězdokupy (v mag).

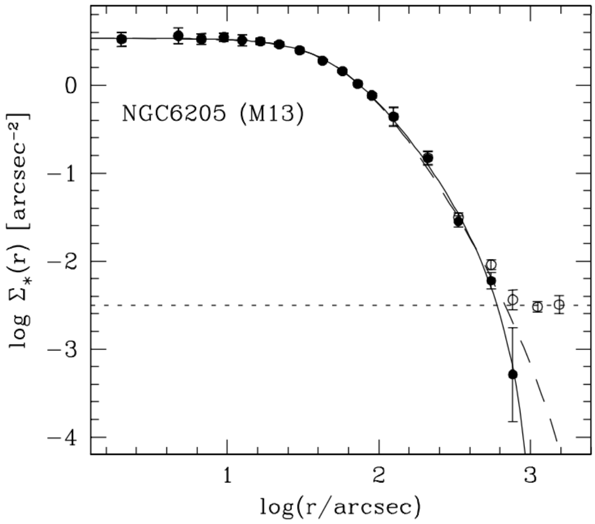
[3] WEIR, Andy: *Marťan*, Euromedia, Praha, 2015, s. 32

[4] `https://cs.wikipedia.org/wiki/Ciolkovsk%C3%A9ho_rovnice`

Krajské kolo 2019/20, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



(a) Fotografie kulové hvězdokupy M 13 (v invertovaných barvách).



(b) Závislost plošné hustoty Σ_* hvězd na úhlové vzdálenosti r od středu M 13: body bez výplně znázorňují plošnou hustotu všech hvězd na snímku, body s výplní odpovídají pouze hvězdám patřícím do M 13. Úroveň galaktického popředí je znázorněna přerušovanou horizontální čarou.

Obrázek 1: Data k úloze C (zdroj: Wikimedia a *Miocchi et al.* (2013)).

Dostáváme

$$M = m + 5 - 5\log\frac{d}{\mathrm{pc}} = 5{,}8 + 5 - 5\log 6800 \doteq -8{,}4\,\mathrm{mag}\,.$$

b) Vypočtěte celkový zářivý výkon L hvězdokupy v jednotkách zářivého výkonu Slunce $L_\odot$.

Označíme-li $M_\odot \doteq 4{,}8\,\mathrm{mag}$ absolutní hvězdnou velikost Slunce, máme

$$M - M_\odot = -2{,}5\log\frac{L}{L_\odot}\,,$$

a tedy

$$L = 10^{-0{,}4(M-M_\odot)}L_\odot \doteq 1{,}9\cdot 10^5\,L_\odot\,.$$

Na obrázku 1b vidíme závislost plošné hustoty hvězd na snímku M 13 (pořízeného ze Země) na úhlové vzdálenosti od středu hvězdokupy. Obě osy jsou v logaritmické míře.

c) Na základě dat na obr. 1b určete co nejpřesněji celkový počet N_* hvězd v hvězdokupě (zaokrouhlete na desetitisíce).

Nejprve odečtěme z obr. 1b hodnoty r a $\Sigma_*(r)$ odpovídající datovým bodům s výplní (které znázorňují plošnou hustotu hvězd patřících do M 13). Viz tab. 1. Pokud si obraz

n	$\log \frac{r}{\mathrm{arcsec}}$	$\log \frac{\Sigma_*(r)}{\mathrm{arcsec}^{-2}}$	$\frac{r}{\mathrm{arcsec}}$	$\frac{\Sigma_*(r)}{\mathrm{arcsec}^{-2}}$	ΔN_*
1	$-\infty$	0,53	0,00	3,41	44
2	0,31	0,52	2,03	3,34	206
3	0,68	0,56	4,79	3,64	249
4	0,83	0,52	6,75	3,34	484
5	0,98	0,54	9,52	3,49	723
6	1,10	0,51	12,63	3,20	1138
7	1,22	0,50	16,54	3,14	2079
8	1,35	0,46	22,22	2,88	3528
9	1,48	0,40	30,20	2,49	6196
10	1,63	0,28	42,59	1,89	8023
11	1,76	0,16	57,90	1,43	7686
12	1,86	0,01	73,11	1,02	7749
13	1,95	−0,12	90,09	0,76	14361
14	2,10	−0,36	125,51	0,44	26206
15	2,32	−0,83	210,22	0,15	18985
16	2,53	−1,54	335,22	0,03	10572
17	2,74	−2,23	554,63	0,01	2791
18	2,88	−3,29	763,25	0,00	—

Tabulka 1: Odečtené hodnoty r a $\Sigma_*(r)$ z obr. 1b.

hvězdokupy rozdělíme na koncentrické prstýnky kružnicemi o poloměrech $r_1, \ldots, r_{18}$ (kde $r_1 = 0$), dostáváme pro počet hvězd $\Delta N_*(n)$ v n-tém prstýnku vztah

$$\Delta N_*(n) \approx \frac{1}{2}\Big(\Sigma_*(r_n) + \Sigma_*(r_{n+1})\Big)\pi(r_{n+1}^2 - r_n^2)\,.$$

Číselné hodnoty $\Delta N_*(n)$ jsou zobrazeny v posledním sloupci tabulky 1. Jejich součtem dostáváme $N_* \doteq 110\,000$.

Nápověda: hvězdokupu si rozdělte na několik koncentrických slupek.

Předpokládejme od teď pro jednoduchost, že všechny hvězdy v hvězdokupě M 13 jsou identické.

d) Vypočtěte zářivý výkon L_0 (v jednotkách $L_\odot$) a absolutní hvězdnou velikost M_0 (v mag) jednotlivých hvězd, které tvoří hvězdokupu M 13.

Máme $L_0 = L/N_* \doteq 1{,}7 L_\odot$ a $M_0 = M + 2{,}5 \log N_* \doteq 4{,}2\,\mathrm{mag}$.

Na základě znalosti plošného hustotního profilu $\Sigma_*(r)$ je v principu možné rekonstruovat závislost objemové hustoty hvězd $\rho_*(x)$ v hvězdokupě na radiální vzdálenosti x od středu hvězdokupy. Jelikož je ale tento výpočet poměrně komplikovaný, budeme od teď modelovat hvězdokupu M 13 jako homogenní kouli o poloměru R a konstantní objemové hustotě hvězd ρ_*.

e) Vyjádřete plošnou hustotu $\Sigma_{*,0} \equiv \Sigma_*(0)$ ve středu hvězdokupy obecně pomocí R, ρ_* a d.

Máme $\Sigma_{*,0} = 2R\rho_* d^2$, kde dosazením číselných hodnot bychom dostali výsledek v rad^{-2}.

Krajské kolo 2019/20, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

f) Vyjádřete rovněž celkový počet N_* hvězd v hvězdokupě obecně pomocí R a ρ_*.

Máme $N_* = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_*$.

g) Určete hodnoty R (číselně v pc) a ρ_* (číselně v pc^{-3}) pro kulovou hvězdokupu M 13.

Z předchozích dvou podúloh získáme

$$R = d\sqrt{\frac{3}{2\pi}\frac{N_*}{\Sigma_{*,0}}} \doteq 4{,}1\,\mathrm{pc}\,,$$

a také

$$\rho_* = \frac{\Sigma_{*,0}}{2d^3}\sqrt{\frac{2\pi}{3}\frac{\Sigma_{*,0}}{N_*}} \doteq 380\,\mathrm{pc}^{-3}\,,$$

kde jsme dosadili $\Sigma_{*,0} = 3{,}14\,\mathrm{arcsec}^{-2}$.

Vesmírný průzkumník zaparkoval svoji loď přesně ve středu hvězdokupy M 13.

h) Jaká je střední hodnota hvězdné velikosti m_0 nejjasnější hvězdy na obloze pro pozorovatele na kosmické lodi?

Střední vzájemnou vzdálenost hvězd v centru hvězdokupy odhadneme jako $l = \rho_*^{-1/3} \doteq 0{,}14\,\mathrm{pc}$. Máme tedy přibližně

$$m_0 = M_0 - 5 + 5\log\frac{l}{2\,\mathrm{pc}} \doteq -6{,}6\,\mathrm{mag}\,.$$

Pozn.: Přesnější hodnotu bychom dostali jako

$$m_0 = \frac{1}{l}\int_0^l dr\left(M_0 - 5 + 5\log\frac{r}{\mathrm{pc}}\right) \doteq -7{,}2\mathrm{mag}\,,$$

kde předpokládáme, že náhodná proměnná „vzdálenost nejbližší hvězdy k pozorovateli“ má uniformní rozdělení na intervalu $[0, l]$.

i) Vypočtěte kombinovanou hvězdnou velikost m_{tot} všech hvězd, které může průzkumník pozorovat (tedy hvězdnou velikost objektu, který by vznikl přesunutím všech hvězd do jednoho směru na průzkumníkově obloze).

Ve slupce hvězdokupy o tloušťce Δx ve vzdálenosti x od středu se nachází $\Delta N_*(x) = 4\pi x^2 \Delta x \rho_*$ hvězd. Od každé z nich přichází k průzkumníkovi zářivý tok $F_0(x) = L_0/(4\pi x^2)$. Pokud bychom všechny hvězdy ve slupce nahradili jediným objektem ve vzdálenosti x od středu, přicházel by k průzkumníkovi zářivý tok $\Delta F(x)$

$$\Delta F(x) = F_0(x)\Delta N_*(x) = \rho_* L_0 \Delta x\,.$$

Vysčítáním všech slupek tedy dostaneme celkový zářivý tok

$$F = \rho_* L_0 R \doteq 0{,}001\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}\,.$$

To odpovídá hvězdné velikosti

$$m_{\mathrm{tot}} = m_\odot - 2{,}5 \log \frac{F}{K_\odot} \doteq -11{,}3\,\mathrm{mag}\,,$$

kde jsme dosadili hodnotu hvězdné velikosti Slunce $m_\odot = -26{,}7\,\mathrm{mag}$ a solární konstanty $K_\odot = 1\,360\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$.

j) Může si číst svou oblíbenou knížku při osvětlení, které je generováno pouze hvězdami na jeho obloze?

Odpověď zní, že pravděpodobně nikoli. V předchozí podúloze nám vyšla hvězdná velikost, která je vyšší než hvězdná velikost Měsíce v úplňku. Přitom skutečný tok dopadající na rovinnou plochu (knížku) bude ještě nižší, než jsme spočítali, protože ve skutečnosti jsou hvězdy rovnoměrně rozložené na obloze a záření tedy dopadá pod různými úhly (nemluvě o tom, že knihu bude osvětlovat pouze polovina hvězd). Zároveň lze zjistit, že většina lidí při úplňku číst knihy nebo noviny nedokáže.

D Star-trails (praktická)

(max. 30 bodů)

Vaším úkolem v této úloze bude pořídit fotografii oblouků na obloze (tzv. star-trails), které hvězdy vykreslují v důsledku rotace Země kolem vlastní osy. Můžete k tomu použít buď metodu pořízení několika kratších expozic, které následně pomocí vhodného softwaru složíte do jednoho snímku, nebo pořízení jedné dlouhé expozice.

a) Pořiďte fotografii star-trails tak, aby snímek obsahoval severní světový pól. Snažte se o co nejdelší oblouky, odpovídající hodinový úhel by měl určitě přesáhnout $0^{\mathrm{h}}10^{\mathrm{m}}$. Podrobně popište postup zpracování snímku. Zaznamenejte do řešení čas a místo pořízení, délku jednotlivých expozic a parametry fotoaparátu. Vytištěnou fotografii v invertovaných barvách přiložte k vašemu řešení.

b) Jaké křivky vykreslují hvězdy na fotografii v závislosti na deklinaci δ_* dané hvězdy a rovněž na deklinaci δ_{c} středu snímku? Vaši odpověď důkladně zdůvodněte.

K vyřešení této úlohy budeme pro jednoduchost předpokládat, že paprsky přicházející z nekonečna při průchodu čočkou objektivu nezmění směr prohází-li optickým středem. Potom je zřejmé, že takové paprsky od dané hvězdy opisují během dne plášť kužele s vrcholovým úhlem $180° - 2\delta_*$, jehož osa protíná rovinu snímače fotoaparátu pod úhlem δ_{c}. Trajektorie hvězd na snímku tedy budou kuželosečky. Pokud hvězda nikdy nezapadne pod rovinu snímače ($|\delta_* + \delta_{\mathrm{c}}| > 90°$), jedná se obecně o elipsu (ve speciálním případě, kdy se světový pól nachází ve středu snímku, tedy $\delta_{\mathrm{c}} = 90°$, budou hvězdy vykreslovat kružnice). Pokud dolní kulminace hvězdy nastává v rovině snímače, jedná se o parabolu ($|\delta_* + \delta_{\mathrm{c}}| = 90°$). Pokud hvězda zapadá pod rovinu snímače (ale zároveň vychází nad rovinu snímače, tedy $|\delta_* + \delta_{\mathrm{c}}| < 90°$ a $|\delta_{\mathrm{c}} - \delta_*| < 90°$), jedná se obecně o hyberbolu. Ve speciálním případě, kdy máme $\delta_* = 0$, degeneruje kužel na rovinu. Hvězdy na světovém rovníku tedy na snímku vykreslí přímku.

Autorem přehledového testu A je Tomáš Gráf. Autorem příkladu B je Jiří Vala. Autorem úloh C a D je Jakub Vošmera.