Astronomická olympiáda
SLEZSKÁ UNIVERZITA FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ
Česká astronomická společnost
http://www.astro.cz
http://olympiada.astro.cz

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

E Kocourkovská vesmírná agentura

(max. 25 bodů)

Obyvatelé Kocourkova se rozhodli vypustit svou meziplanetární sondu na cestu k Marsu. V první fázi sondu vynesli na kruhovou oběžnou dráhu okolo Země ve výšce $h = 10\,000\,\mathrm{km}$, kde čekala na vhodný okamžik k odletu. Ten nastane v okamžiku, kdy bude mít sonda nejvyšší možnou heliocentrickou rychlost. Předpokládejte, že Země obíhá Slunce po kružnici.

a) Vypočtěte velikost v_G (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) geocentrické kruhové oběžné rychlosti sondy.

Máme

$$v_\mathrm{G} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{h + R_\mathrm{Z}}}\,,$$

kde jsme označili M_Z hmotnost Země a R_Z poloměr Země. Číselně $v_\mathrm{G} \doteq 4{,}9\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

b) Jaké nejvyšší heliocentrické rychlosti v_H (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) může sonda dosáhnout?

Nejvyšší heliocentrické rychlosti sonda dosáhne v okamžiku, kdy mají vektory rychlosti sondy $\mathbf{v}_\mathrm{G}$ a rychlosti Země $\mathbf{v}_\mathrm{Z}$ stejný směr. Velikost heliocentrické rychlosti bude potom

$$v_\mathrm{H} = v_\mathrm{G} + v_\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{GM_\mathrm{Z}}{h + R_\mathrm{Z}}} + \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\mathrm{Z}}}\,.$$

Zde jsme označili $M_\odot$ hmotnost Slunce a a_z poloměr oběžné dráhy Země okolo Slunce. Číselně dostáváme $v_\mathrm{H} \doteq 34{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.

V okamžiku, kdy dosáhla své nejvyšší heliocentrické rychlosti, zažehla sonda své motory, aby zvýšila svou rychlost, a odletěla ke vzdáleným planetám. Protože však kocourkovští technici tento manévr špatně vypočítali, bylo v okamžiku manévru sondě k dispozici pouze $\mu = 77\,\mathrm{kg}$ paliva. Rychlost výtoku zplodin je $v_\mathrm{e} = 5\,000\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

c) O jakou maximální hodnotu Δv (v $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$) se změní velikost rychlosti sondy po provedení manévru? Změnu hmotnosti sondy zanedbejte: po celou dobu manévru počítejte s hmotností $m = 2\,500\,\mathrm{kg}$.

Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti

$$mv_1 = mv_2 - \mu v_e \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta v = \frac{\mu}{m} v_e\,,$$

kde rychlost sondy před manévrem, resp. po manévru jsme označili v_1, resp. v_2 a definujeme $\Delta v = v_2 - v_1$. Po dosazení máme $\Delta v \doteq 154\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Téměř ihned po provedení manévru navíc došlo k neočekávané chybě, která měla za následek snížení rychlosti sondy na $v = 3\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ vzhledem k Zemi, aniž by se změnil její směr. V důsledku toho se začala sonda pohybovat po eliptické dráze okolo středu Země.

d) Jakého největšího přiblížení r_min (v km) ke středu Země by sonda na této dráze teoreticky mohla dosáhnout?

Nápověda: Celková mechanická energie tělesa o hmotnosti m obíhajícího v centrálním gravitačním poli gravitujícího tělesa o hmotnosti M je $E = -\frac{GMm}{2a}$, kde a je velká poloosa oběžné dráhy.

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Ze zákona zachování mechanické energie

$$-\frac{GM_Z m}{2a} = -\frac{GM_Z m}{h+R_Z} + \frac{mv^2}{2}$$

vyjádříme velkou poloosu a jako

$$a = \frac{GM_Z(h+R_Z)}{2GM_Z - v^2(h+R_Z)} \doteq 10\,000\,\mathrm{km}\,.$$

Pro největší přiblížení potom platí $r_{\min} = 2a - (h+R_Z)$. Číselně $r_{\min} \doteq 3\,700\,\mathrm{km}$. Jelikož se takový bod nachází pod povrchem Země, znamená to, že sonda dopadne zpět na Zemi.

Z výsledku podúlohy d) plyne, že sonda při pohybu na této dráze narazí do Země.

e) Pod jakým úhlem α dopadla sonda na zemský povrch? Efekty atmosféry zanedbejte. Úhel α měříme od roviny tečné k povrchu Země.

Ze zákona zachování momentu hybnosti ve tvaru $v(h+R_Z) = v_\perp R_Z$ vyjádříme kolmou složku rychlostí sondy v okamžiku nárazu jako $v_\perp = v(1 + h/R_Z) \doteq 7{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Ze zákona zachování mechanické energie si vyjádříme celkovou rychlost v okamžiku nárazu jako

$$v_{\mathrm{tot}} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_Z} - \frac{1}{a}\right)}\,.$$

Pro úhel dopadu potom platí

$$\cos\alpha = \frac{v_\perp}{v_{\mathrm{tot}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \arccos\frac{v_\perp}{\sqrt{GM_Z(\frac{2}{R_Z} - \frac{1}{a})}}$$

Číselně dostáváme $\alpha \doteq 34°$.

F Studium hvězdokupy

(max. 25 bodů)

Uvažujme kulovou hvězdokupu NGC 6397 (souhvězdí Oltáře) o pozorované vizuální hvězdné velikosti $m_H = 5{,}17\,\mathrm{mag}$ a úhlovém průměru $\theta = 4{,}7'$. V roce 2018 se týmu vědců ze STScI (Space Telescope Science Institute) podařilo změřit její paralaxu $\pi = 0{,}42\,\mathrm{mas}$ ($1\,\mathrm{mas} = 10^{-3}$ úhl. vteřiny). Předpokládejte, že hvězdy v hvězdokupě jsou všechny v průměru podobné Slunci.

a) Určete vzdálenost r hvězdokupy NGC 6397 v pc.

Vzdálenost r hvězdokupy lze vyjádřit jako $r = (\mathrm{arcsec}/\pi)\,\mathrm{pc}$. Číselně $r \doteq 2{,}4\,\mathrm{kpc}$.

b) Určete přibližně, kolik hvězd N tvoří tuto hvězdokupu.

Můžeme nyní dosadit do Pogsonovy rovnice

$$m_\mathrm{H} - M_\odot = -2{,}5\log\frac{\frac{NL_\odot}{4\pi r^2}}{\frac{L_\odot}{4\pi(10\,\mathrm{pc})^2}} = -2{,}5\log N + 5\log\frac{r}{10\,\mathrm{pc}} = -2{,}5\log N + 5\log\frac{\mathrm{arcsec}}{10\pi}\,,$$

kde $M_\odot = 4{,}83\,\mathrm{mag}$ je absolutní vizuální hvězdná velikost Slunce. Úpravami dostaneme

$$N = 10^{-0{,}4[m_\mathrm{H} - M_\odot + 5\log(10\pi/\mathrm{arcsec})]}\,.$$

Číselně $N \doteq 4\cdot 10^4$.

c) Určete přibližně únikovou rychlost v_esc z hvězdokupy (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$).

Únikovou rychlost přibližně určíme jako

$$v_\mathrm{esc} = \sqrt{\frac{4GM_\mathrm{H}}{R_\mathrm{H}}} = \sqrt{\frac{4GNM_\odot}{\theta r}} \doteq 15\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Předpokládejte nyní, že hvězdy v hvězdokupě jsou rovnoměrně rozprostřeny uvnitř kruhové oblasti o úhlovém průměru θ.

d) Jaký nejmenší průměr D (v cm) musí mít dalekohled, který by (teoreticky) rozlišil jednotlivé hvězdy v hvězdokupě? Uvažujte, že pozorujeme na vlnové délce $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.

Vyjdeme z Rayleigho kritéria, které udává, jaký nejmenší průměr musí mít dalekohled, aby byla dvojice objektů pozorovaných na vlnové délce λ od sebe ještě rozeznatelná

$$\alpha_\mathrm{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}\,.$$

Jelikož v limitním případě uvažujeme $\alpha_\mathrm{min} \approx \theta/\sqrt{N}$, pak pro průměr dalekohledu dostáváme

$$D = 1{,}22\frac{\lambda\sqrt{N}}{\theta}\,.$$

Číselně dostaneme $D \doteq 10\,\mathrm{cm}$.

e) Vypočtěte, jakou hvězdnou velikost μ má oblast hvězdokupy o ploše $1\,\mathrm{arcsec}^2$. Můžeme tuto hvězdokupu pozorovat z centra Melbourne, kde jas oblohy dosahuje $18\,\mathrm{mag\cdot arcsec^{-2}}$?

Oblast hvězdokupy má plochu $A = \pi\theta^2/4 \doteq 6\cdot 10^4\,\mathrm{arcsec}^2$. Oblast o ploše $1\,\mathrm{arcsec}^2$ tedy má hvězdnou velikost $\mu = m_\mathrm{H} + 2{,}5\log(A/\mathrm{arcsec}^2) \doteq 17\,\mathrm{mag}$. Plošná jasnost hvězdokupy je větší, než jas oblohy v Melbourne: teoreticky tedy můžeme hvězdokupu pozorovat.