Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

V úlohách E a F budeme zkoumat zákrytovou proměnnou dvojhvězdu skládající se ze složek, které obíhají po kruhových drahách kolem společného hmotného středu. Uvažujte, že zorný paprsek pozorovatele leží v rovině oběhu.

E Zákrytová dvojhvězda I: světelná křivka

(max. 25 bodů)

Zaveďme následující označení: teplejší ze složek zákrytové dvojhvězdy má poloměr R_1 a teplotu T_1, chladnější hvězda má poloměr R_2 a teplotu T_2. Primární minimum světelné křivky má hloubku Δm_1, sekundární minimum má hloubku Δm_2 (tedy $\Delta m_1 \geqslant \Delta m_2$). Efekt okrajového ztemnění disků hvězd a mezihvězdnou extinkci v této úloze zanedbejte. Předpokládejte, že obě složky svítí pouze vlastním (nikoli odraženým) světlem.

a) Vyjádřete zářivé výkony L_1 a L_2 obou složek pomocí R_1, R_2 a T_1, T_2.

Ze Stefanova-Boltzmannova zákona máme

$$L_i = 4\pi R_i^2 \sigma T_i^4$$

pro $i = 1, 2$, kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta.

b) Určete hustoty J_1 a J_2 zářivého toku od jednotlivých složek, které registruje pozorovatel na Zemi. Výsledek vyjádřete pomocí T_1, T_2 a úhlového poloměru disků složek α_1, α_2.

Pro $i = 1, 2$ dostáváme

$$J_i = \frac{L_i}{4\pi d^2} = \left(\frac{R_i}{d}\right)^2 \sigma T_i^4 = \alpha_i^2 \sigma T_i^4 \,.$$

c) Určete hustoty j_1 a j_2 zářivého toku od jednotlivých složek na jednotku plochy jejich disku v úhlové míře. Výsledek vyjádřete pomocí T_1 a T_2.

Pro $i = 1, 2$ dostáváme

$$j_i = \frac{J_i}{\pi \alpha_i^2} = \frac{\sigma}{\pi} T_i^4 \,.$$

d) Zdůvodněte, proč musí být v okamžiku primárního minima chladnější hvězda před teplejší (z pohledu pozorovatele) nezávisle na tom, jakých hodnot nabývají R_1 a R_2.

Z výsledku předchozí podúlohy plyne, že plošná jasnost disku složek závisí pouze na teplotě, a to jako $j \propto T^4$. Pokud je $R_1 \leqslant R_2$, potom je v případě, kdy je teplejší hvězda před chladnější, část disku chladnější hvězdy nahrazena diskem teplejší hvězdy (s větší plošnou jasností) a jasnost systému v této konfiguraci tedy musí být větší než v případě, kdy se chladnější hvězda nachází před teplejší (a vidíme pouze celý disk chladnější hvězdy). Primární (hlubší) minimum tedy musí nastat v případě, kdy je chladnější hvězda před teplejší. Pokud naopak $R_1 \geqslant R_2$, potom je v případě, kdy se chladnější hvězda nachází před teplejší, část disku teplejší hvězdy nahrazena částí disku chladnější hvězdy (s menší plošnou jasností), což dá za vznik hlubšímu minimu, než v případě, kdy vidíme pouze celý disk jasnější hvězdy. Opět tedy dostáváme, že v okamžiku primárního minima se z pohledu pozorovatele musí chladnější hvězda nacházet před teplejší.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

e) Vyjádřete Δm_1 a Δm_2 pomocí proměnných $\rho = R_2/R_1$ a $\tau = T_2/T_1 < 1$. Výpočet proveďte zvlášť pro $\rho \leqslant 1$ a pro $\rho \geqslant 1$.

Pro $\rho \leqslant 1$ z Pogsonovy rovnice dostáváme

$$\Delta m_1 = 2{,}5 \log \frac{\pi\alpha_1^2 j_1 + \pi\alpha_2^2 j_2}{\pi(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) j_1 + \pi\alpha_2^2 j_2} = 2{,}5 \log \left(\frac{1 + \rho^2\tau^4}{1 - \rho^2 + \rho^2\tau^4} \right) ,$$

$$\Delta m_2 = 2{,}5 \log \frac{\pi\alpha_1^2 j_1 + \pi\alpha_2^2 j_2}{\pi\alpha_1^2 j_1} = 2{,}5 \log \left(1 + \rho^2\tau^4 \right) .$$

Pro $\rho \geqslant 1$ dostáváme

$$\Delta m_1 = 2{,}5 \log \frac{\pi\alpha_1^2 j_1 + \pi\alpha_2^2 j_2}{\pi\alpha_2^2 j_2} = 2{,}5 \log \left(1 + \rho^{-2}\tau^{-4} \right) ,$$

$$\Delta m_2 = 2{,}5 \log \frac{\pi\alpha_1^2 j_1 + \pi\alpha_2^2 j_2}{\pi(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) j_2 + \pi\alpha_1^2 j_1} = 2{,}5 \log \left(\frac{1 + \rho^2\tau^4}{1 - \tau^4 + \rho^2\tau^4} \right) .$$

f) Jsou veličiny ρ a τ obecně určeny hodnotami Δm_1 a Δm_2 fyzikálně jednoznačně? Zdůvodněte svoji odpověď.

Pro $\rho \leqslant 1$ dostáváme

$$\rho = 10^{0{,}2(\Delta m_2 - \Delta m_1)} (10^{0{,}4\Delta m_1} - 1)^{+1/2} , \tag{1a}$$

$$\tau = 10^{0{,}1(\Delta m_1 - \Delta m_2)} \left(\frac{10^{0{,}4\Delta m_2} - 1}{10^{0{,}4\Delta m_1} - 1} \right)^{1/4} . \tag{1b}$$

Pro $\rho \geqslant 1$ dostáváme

$$\rho = 10^{0{,}2(\Delta m_2 - \Delta m_1)} (10^{0{,}4\Delta m_2} - 1)^{-1/2} , \tag{2a}$$

$$\tau = 10^{0{,}1(\Delta m_1 - \Delta m_2)} \left(\frac{10^{0{,}4\Delta m_2} - 1}{10^{0{,}4\Delta m_1} - 1} \right)^{1/4} . \tag{2b}$$

Pro poměr τ dostáváme v obou případech shodný výsledek (1b) a (2b). Navíc můžeme snadno ověřit, že $\tau < 1$ právě tehdy, když $\Delta m_1 > \Delta m_2$ a rovněž, že $\tau = 1$ právě tehdy, když $\Delta m_1 = \Delta m_2$. Poměr τ je tedy hodnotami $\Delta m_1, \Delta m_2$ vždy určen jednoznačně, a to pro libovolné hodnoty $\Delta m_1, \Delta m_2$ takové, že $\Delta m_1 \geqslant \Delta m_2$. Naopak poměr ρ obecně není hodnotami $\Delta m_1, \Delta m_2$ určen jednoznačně. Obecně si lze všimnout, že podmínky $\rho \leqslant 1$, resp. $\rho \geqslant 1$ jsou v kombinaci se vztahy (1a), resp. (2a) obě ekvivalentní podmínce

$$\Delta m_1 + \Delta m_2 \leqslant 2{,}5 \log(10^{0{,}4\Delta m_1} + 10^{0{,}4\Delta m_2}) , \tag{3}$$

neboli $i_1 i_2 \leqslant i_1 + i_2$, kde $i_{1,2} = 10^{0{,}4\Delta m_{1,2}}$. Zároveň si všimněme, že rovnost $\rho = 1$ nastává právě tehdy, když $i_1 i_2 = i_1 + i_2$. Konečně si všimněme, že výrazy (1a) a (2a) jsou vztaženy převodem $\rho \to 1/\rho$ právě tehdy, když $\Delta m_1 = \Delta m_2$, a tedy právě tehdy, když $\tau = 1$. Odtud plyne, že libovolné dvě hodnoty $\Delta m_1, \Delta m_2$, které splňují $\Delta m_1 > \Delta m_2$ společně s $i_1 i_2 < i_1 + i_2$ (např. $\Delta m_1 = 0{,}2$ mag a $\Delta m_2 = 0{,}1$ mag), dávají nejednoznačný výsledek pro ρ.

Struktura prostoru parametrů $\Delta m_1, \Delta m_2$ je následující

- $\Delta m_1 > \Delta m_2$ a $i_1 i_2 < i_1 + i_2$: $\tau < 1$, dvě fyzikálně neekvivalentní řešení pro ρ
- $\Delta m_1 > \Delta m_2$ a $i_1 i_2 = i_1 + i_2$: $\tau < 1$, stejně velké složky ($\rho = 1$)
- $\Delta m_1 = \Delta m_2$ a $i_1 i_2 < i_1 + i_2$: stejně teplé složky ($\tau = 1$), dvě fyzikálně ekvivalentní řešení pro ρ vztažené převodem $\rho \to 1/\rho$
- $\Delta m_1 = \Delta m_2$ a $i_1 i_2 = i_1 + i_2$: identické složky ($\tau = 1$, $\rho = 1$)
- $\Delta m_1 < \Delta m_2$ nebo $i_1 i_2 > i_1 + i_2$: nefyzikální oblast

F Zákrytová dvojhvězda II: radiální rychlosti

(max. 25 bodů)

Při studiu spektra zákrytové dvojhvězdy byly rozlišeny absorpční čáry obou složek. Bylo zjištěno, že čáry oscilují kolem středních poloh s periodou P. Amplitudu z tohoto posuvu v relativní míře definujeme jako $z = \Delta\lambda/\lambda$, kde $\Delta\lambda$ je maximální posuv čáry od její střední vlnové délky λ. Veličina z nabývá stejné hodnoty (z_1, resp. z_2) pro všechny absorpční čáry dané složky (1, resp. 2).

a) Vyjádřete oběžné rychlosti v_1 a v_2 obou složek pomocí z_1, z_2.

Z dopplerovského vztahu dostáváme $v_i = cz_i$ pro $i = 1, 2$.

b) Vyjádřete poloměry r_1 a r_2 oběžných drah obou složek pomocí z_1, z_2 a P.

Máme $2\pi r_i = v_i P = cz_i P$, tedy $r_i = cz_i P/2\pi$ pro $i = 1, 2$.

c) Vyjádřete celkovou hmotnost M systému pomocí z_1, z_2 a P.

Z 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2},$$

a tedy

$$M = \frac{4\pi^2}{G}\frac{(r_1 + r_2)^3}{P^2} = \frac{c^3}{2\pi G} P (z_1 + z_2)^3 .$$

d) Vyjádřete poměr $\mu = M_1/M_2$ hmotností M_1 a M_2 pomocí z_1 a z_2.

Z podmínky oběhu kolem společného hmotného středu dostáváme $M_1 r_1 = M_2 r_2$, a tedy (dosadíme $r_i = cz_i P/2\pi$ pro $i = 1, 2$) $M_1 z_1 = M_2 z_2$. Odtud $M_1/M_2 = z_2/z_1$.

e) Vyjádřete hmotnosti M_1 a M_2 jednotlivých složek pomocí z_1, z_2 a P.

Máme $M = M_1 + M_2 = M_2(1 + M_1/M_2)$, a tedy

$$M_2 = \frac{M}{1+\mu} = \frac{\frac{c^3}{2\pi G} P (z_1 + z_2)^3}{1 + \frac{z_2}{z_1}} = \frac{c^3}{2\pi G} P z_1 (z_1 + z_2)^2 .$$

Podobně dostáváme

$$M_1 = \frac{M}{1+\frac{1}{\mu}} = \frac{\frac{c^3}{2\pi G} P (z_1 + z_2)^3}{1 + \frac{z_1}{z_2}} = \frac{c^3}{2\pi G} P z_2 (z_1 + z_2)^2 .$$

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Pro zákrytovou proměnnou dvojhvězdu YZ Cassiopeiae byly naměřeny hodnoty (*Lacy et al.* (1981)) $z_1 = (2{,}45 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-4}$, $z_2 = (4{,}19 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$ a $P = 4{,}467\,223\,5\,\mathrm{d}$. Předpokládejte, že měření z_1 a z_2 byla nezávislá. Nejistotu v určení P neuvažujte.

f) Vypočtěte hodnoty M_1 a M_2 pro YZ Cassiopeiae. Nemusíte určovat jejich nejistoty.

Číselně máme $M_1 = 2{,}31 M_\odot$ a $M_2 = 1{,}36 M_\odot$.

g) Vypočtěte hodnoty M a μ pro YZ Cassiopeiae včetně jejich nejistot.

Pro absolutní nejistoty Δ_M, resp. Δ_μ celkové hmotnosti M, resp. poměru hmotností μ dostáváme pomocí standardních vzorců pro výpočet nejistot výsledek

$$\Delta_M = \frac{3c^3}{2\pi G} P (z_1 + z_2)^2 \sqrt{\Delta_{z_1}^2 + \Delta_{z_2}^2}\,,$$
$$\Delta_\mu = \frac{1}{z_1^2} \sqrt{z_2^2 \Delta_{z_1}^2 + z_1^2 \Delta_{z_2}^2}\,.$$

Číselně máme $M = (3{,}65 \pm 0{,}04) M_\odot$ a $\mu = 1{,}71 \pm 0{,}01$.